МЕТОДИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ

Н. Я. ВИЛЕНКИН (Москва)

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В МЛАДШИХ КЛАССАХ

Хорошо известно, что школьный курс математики сложился в результате длительного исторического процесса. Многие задачи, которые сейчас решают в начальной школе, дошли до наших времен из древности. Они отличаются от задач, решавшихся в вавилонских школах, лишь внешней формой, а не математическим содержанием. Арифметика в школе преподается почти так же, как и во времена, когда выпускник должен был уметь решать на практике лишь арифметические задачи.

В результате этого школьный курс арифметики несет очень малую идейную нагрузку. Его целью является лишь научить правильно выполнять арифметические действия над целыми числами и дробями, сообщить сведения о делимости целых чисел, необходимые для действий над дробями, и научить решать некоторые типовые задачи. Тем не менее на арифметику отводится более половины всего времени, даваемого на изучение математики (пять с половиной лет из десяти лет обучения). В результате у школьников не хватает времени освоить и до конца понять важнейшие математические понятия, которые находят сейчас все большее приложение на практике (функциональная зависимость и ее графическое изображение, производная, алгоритм). Для других же необходимых понятий (вероятность, интеграл) вообще не находится места в школьной программе. Итак, *чрезмерное увлечение арифметикой приводит к плохому знанию математики.* Некоторые приверженцы арифметики ссылаются на Гаусса, считавшего арифметику царицей математики. Но Гаусс имел в виду, конечно, не школьную арифметику, а теорию чисел. Кроме того, с тех пор прошло сто пятьдесят лет и взгляды на сравнительную роль математических дисциплин претерпели существенные изменения.

Возникает вопрос, как изменить существующий курс арифметики, чтобы усилить его идейную нагрузку, как добиться, чтобы уже в курсе арифметики закладывались основные идеи, характеризующие современную математику и ее приложения, — идеи уравнения, функции, производной, интеграла, алгебраической операции, вероятности, множества, алгоритма и т. д. Ясно, что путь к этому не может лежать в области расширения теоретического материала, введения в начальную школу сколько-нибудь сложных алгебраических преобразований и громоздких определений. На наш взгляд, единственным путем является систематическое использование новых видов математических задач — задач, решаемых с помощью обычных арифметических действий, но подготавливающих изучение более глубоких математических идей. Продуманная система таких задач позволит на весьма раннем этапе ввести эти идеи в школьное преподавание.

Выясним, какие же идеи должны подготавливаться в курсе арифметики. В первую очередь это идея *функции и ее графического изображения,* а также, в более далеком аспекте, *производной и интеграла.* Следующей важной идеей является *алгоритм* — совокупность действий, совершаемых по определенным правилам. Потом идут алгебраические идеи *уравнения и его решений, алгебраической операции и ее свойств,* а также понятие о действиях не над отдельными числами, а над совокупностями чисел и таблицами (т. е. идеи *линейной алгебры*). Далее нужно ознакомить учащихся с понятиями комбинаторики, тесно связанными с идеями *теории вероятностей.*

Не являются ли все эти идеи и понятия слишком сложными для того, чтобы в каком бы то ни было виде с ними можно бы-

ло знакомиться в курсе арифметики, чтобы в этом курсе можно было подготавливать их усвоение? Мы хотим показать в этой статье, что продуманная система арифметических задач и упражнений позволит ввести уже в младших классах функции и уравнения, комбинаторику и алгоритмы.

Начнем с понятия функции, играющего столь важную роль в современной математике. Фактически учащийся сталкивается с понятием функциональной зависимости с самого начала обучения арифметике, точнее, при изучении таблицы сложения сумма двух чисел является функцией слагаемых. На это надо обращать внимание учеников уже с I класса, составляя таблицы сумм чисел с заданным первым (или вторым) слагаемым. Иными словами, решив примеры вида $3 + 1 = 4$; $3 + 2 = 5$; $3 + 3 = 6$ и т. д., надо свести результаты в таблицу 1.

Таблица 1

Первое слагаемое равно 3

Второе слагаемое	1	2	3	4	5
Сумма	4	5	6	7	8

Такая таблица заключает в себе идею функциональной зависимости — она является таблицей значений функции $y = 3 + x$.

Точно так же полезно решать серии задач, отличающихся друг от друга лишь одним числовым данным, и сводить результаты решения в таблицы. Например, решается задача: *У Ани было 4 ореха, а у Пети на 2 ореха больше. Сколько орехов было у обоих вместе?*

После этого число 4 заменяем числами 5, 6 и т. д. В результате получаем таблицу 2.

Таблица 2

Число орехов у Ани	4	5	6	7	8
Число орехов у обоих	10	12	14	16	18

Иными словами, имеем таблицу функций $y = 2 + 2x$. В той же задаче, заменяя число 2 на 3, 4 и т. д., получим таблицу значений другой функции $y = 8 + x$.

При таком подходе легко объяснить учащимся, что меняющееся числовое значение в задаче надо обозначить буквой, после чего записать ответ в виде $y = 2 + 2x$. Теперь уже можно искать по этой формуле ответ и для значений x, не содержащихся в таблице.

Таким образом, к понятию функциональной зависимости учащиеся подходят, решая серии задач, отличающихся друг от друга одним числовым данным. Важным пособием в изучении понятия функциональной зависимости является и таблица умножения. Ее, разумеется, лучше всего записывать в виде квадратной таблицы 3.

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90

Тогда вторая строка таблицы является таблицей значений функции $y = 2x$, третья — функции $y = 3x$ и т. д. К тем же функциям можно подвести учащегося, решая задачи, аналогичные приведенным выше. В результате к концу знакомства с таблицей умножения школьник подойдет к идее линейной функциональной зависимости $y = ax + b$ (разумеется, с числовыми значениями коэффициентов a и b).

Однако таблица умножения приводит и к другой функциональной зависимости — квадратичной. Для того чтобы подойти к ней, надо рассмотреть в этой таблице числа, написанные по диагонали, и выписать их в таблицу 4.

Таблица 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

После этого можно пояснить учащимся, что числа во второй строке получаются, когда числа первой строки умножаются сами на себя, и что это произведение называется квадратом числа первой строки. Позже можно ввести и обозначение 4^2, 5^2 и т. д. Такой «динамический» подход к таблице умножения облегчит ее изучение и запоминание.

По мере расширения знаний учащихся можно вводить и несколько более сложные

функциональные зависимости, такие, как $y = 2x - 3$, и даже такие, как $y = x^2 + 4$ или $y = \frac{x^2+4}{x^2+12}$ (примерно в конце III — начале IV класса).

Такой подход важен не только для дальнейшего формирования общего понятия функциональной зависимости, но и для укрепления арифметических навыков. Весьма полезным упражнением в арифметических действиях явится вычисление значений функции при различных значениях аргумента x. Ведь в старших классах ученики часто не видят за алгебраическим выражением его числового значения при заданных значениях букв. Это и является основным затруднением при изучении алгебры, приводящим к тому, что алгебраические формулы заучиваются без должного понимания. Поэтому задолго до того, как начнется изучение алгебраических преобразований, надо систематически упражняться в вычислении значений функции при заданных значениях аргумента и, более обще, вычислении значений алгебраического выражения при заданных значениях входящих в него букв. Например, вычислять $a^2 + b^2$ при тех или иных значениях букв a и b.

Такие занятия не будут занятиями алгеброй или анализом, поскольку не выполняются никакие алгебраические преобразования. Это — занятия арифметикой, имеющие функциональную направленность.

Разумеется, эти занятия облегчат в дальнейшем изучение алгебры. В частности, станет ясен и смысл алгебраических преобразований, одной из целей которых является приведение алгебраического выражения к легко вычисляемой форме.

С точки зрения вычислительной математики полезно при решении задач указанного вида составлять роспись-план вычисления значения функции. Например, для вычисления значений функции $y = \frac{x^2+4}{x^2+12}$ при $x = 1, 2, \ldots$ роспись имеет вид, данный в таблице 5.

Таблица 5

x	x^2	$x^2 + 4$	$x^2 + 12$	y
1	1	5	13	5/13
2	4	8	16	1/2

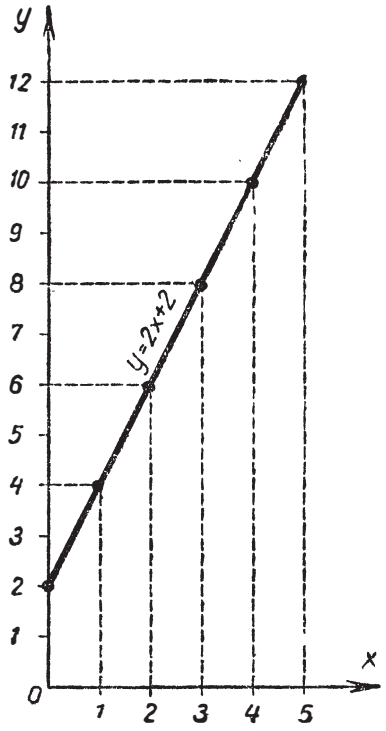
Составление росписи закрепляет в сознании учащихся порядок выполнения арифметических действий.

Отметим еще, что вначале изучение ведется только для линейных функций и только для натуральных значений аргумента. Но значения таких функций образуют арифметическую прогрессию (действительно, как вторые строки таблиц 1 и 2, так и все строки таблицы умножения образуют арифметические прогрессии). Таким образом, при указанном методе возникает и понятие арифметической прогрессии, и притом ранее, чем понятие линейной функции (уму непостижимо, почему сейчас в школе арифметическую прогрессию, т. е. линейную функцию дискретного аргумента, изучают после линейной функции непрерывно меняющегося аргумента).

Параллельно с рассмотрением функций следует давать и их геометрическое изображение. Начало этому надо положить в I классе, давая одновременно с введением чисел 1, 2, 3 и т. д. их изображение на числовом луче. Сложение и вычитание чисел также нужно изображать на числовом луче, как движение вправо или влево на несколько единиц. При таком подходе понятие числа не будет отрываться от своей основы — измерения величин (в частности, длин). Длина отрезка явится при этом «универсальной величиной», с помощью которой изображаются остальные величины. Незаменимым подспорьем явится при этом обычная линейка с нанесенными на ней делениями и обозначениями чисел.

Когда школьники освоятся с понятием числового луча, надо показать им геометрическое изображение данных таблицы 2, связанной с решением серии однотипных задач. Для этого надо сказать, что по одному направлению откладывают меняющееся условие задачи, а по перпендикулярному — ответ. В результате получается прямолинейный ряд точек (черт. 1). Мне кажется, что не следует бояться соединить эти точки прямой и назвать ее графиком соответствующей функции. Разумеется, для промежуточных точек прямой школьники еще не знают числового выражения. Что же делать, здесь геометрический образ будет предшествовать арифметическому изучению и стимулировать его развитие. При введении дробей будет естественным пояснение, что нам надо уметь вычислять и промежуточные точки графика.

Построив график функции, связанной с решением однотипных задач, можно потом по нему искать решения и при числовых данных, для которых еще не составлена таблица. При этом по графику можно решать и «обратную» задачу: искать, при каких зна-



Черт. 1

чениях изменяющейся величины получается заданный ответ.

После построения графиков линейных функций надо перейти к построению графиков квадратичных функций и т. д. Это построение полезно сочетать с описанными выше упражнениями по вычислению значений функции. Вычисление можно разбить между отдельными учениками, дав каждому из них одно значение аргумента, после чего нанести результаты вычисления на график. Ошибки отдельных учеников станут очевидными — вычисленные ими точки выпадут из графика. Заметим, что решение задач такого вида будет способствовать выработке у учеников понятия закономерности, правильности, недопустимости «отскоков» отдельных значений плавно меняющейся функции.

Важным является вопрос о месте и методе введения отрицательных чисел. Разумеется, первоначальное построение графиков должно вестись лишь в первом квадранте (а построение чисел — на числовом луче). Однако сама неестественность такого ограничения должна навести учеников на мысль: «А какие же числа соответствуют остальным точкам прямой; как задавать другие точки плоскости?» При этом естественно появятся отрицательные числа. Мне кажется, что их лучше всего вводить, используя температурную шкалу. Ведь любой ученик II класса понимает, что значит 15° выше нуля или 10° ниже нуля. Поэтому достаточно сказать, что температура ниже нуля обозначается так: —10°, — после чего решать задачи следующего вида: *Вчера температура воздуха была* 10° *выше нуля, а сегодня она понизилась на* 15°. *Чему равна температура воздуха сегодня?*

Решение таких задач позволит ввести положительные и отрицательные числа и выполнять для них операции сложения и вычитания. Значительно сложнее ввести для них операции умножения и деления. Возможно, следует сделать это догматически, отложив на более позднее время обоснование правила знаков. После введения отрицательных чисел можно строить графики функций во всей плоскости. Естественность правила знаков будет видна из того, что, например, линейная функция изображается при этом правиле прямой линией, а не ломаной.

Наряду с графиками функций полезно строить графики движения. При этом в школе обычно строят «чрезвычайно увлекательные» графики движения поездов, взятые из железнодорожного расписания дореволюционных времен. Эту часть курса можно сделать эмоционально насыщенной, рисуя график движения ракеты Земля — Луна, а также составляя графики по несложным рассказам, связанным с приключениями. Можно решать и обратную задачу — составлять рассказ по заданным графикам движения его участников.

В конце первоначального знакомства с функциями и их графиками надо перейти к задачам, закладывающим основы дифференциального и интегрального исчисления. Это — задачи на составление и изучение таблиц разностей функций, которые можно решать в IV—V классах. Пусть, например, дана функция $y = x^2$. Составим таблицу ее значений при целочисленных значениях аргумента, вычислим разности соседних значений функции и запишем результаты в особый столбец (между уменьшаемым и вычитаемым). Продолжая этот процесс, находим разности разностей (разности второго порядка) и т. д. В результате получим таблицу 6, из которой видно, что в нашем примере вторые разности постоянны. Как известно, это не случайно: если функция является многочленом k-ой степени, то ее k-ые разности постоянны. Ученики легко обнаруживают постоянство разностей. Воспользовавшись этим, можно строить таблицу дальше.

Таблица 6

n	n^2	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0			
		1		
1	1		2	
		3		0
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		0
4	16		×	
		××		
5	×××			

Именно, пусть уже вычислена таблица, изображенная выше. Так как вторые разности постоянны, то записываем в клеточку отмеченную ×, число 2. Оно является разностью между неизвестной нам следующей первой разностью и числом 7. Значит, следующая первая разность равна 9. Записываем 9 в таблицу на место, обозначенное ××. Число 9 является разностью между значением 5^2 и числом $16 = 4^2$. Поэтому $5^2 = 16 + 9 = 25$. Продолжая этот процесс, путем сложения найдем 6^2, 7^2 и т. д.

Аналогично можно построить таблицу кубов, исходя из постоянства третьих разностей. Именно, сначала строится таблица 7.

Таблица 7

n	n^3	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		
		61		×	
5	125		××		
		×××			
6					

Из нее видно, что все третьи разности равны 6. Запишем число 6 в клеточку, обозначенную ×, вычислим соответствующую вторую разность $\Delta^2 = 24 + 6 = 30$ и запишем ее в клеточку, обозначенную ××. Потом вычислим первую разность $\Delta = 61 + 30 = 91$ и наконец значение $6^3 = 125 + 91 = 216$.

Продолжая этот процесс, получаем таблицу кубов.

Точно так же можно построить таблицу значений любого квадратного или кубического многочлена, да и вообще любого многочлена.

Видно, что решение задач такого типа сводится к простым арифметическим действиям и вполне доступно школьникам V (а может быть, и IV) класса. В то же время идейная нагрузка этих задач велика, — ведь, по сути дела, решая их, мы занимаемся численным дифференцированием (считая разности) и численным интегрированием (находя значение функции с помощью разностей).

Таким образом, на наш взгляд, введение функционального элемента в начальную школу вполне возможно. Более того, возможно решение задач, являющихся пропедевтическими для математического анализа.

С функциональным подходом к арифметике тесно связан алгоритмический подход. Под алгоритмом мы понимаем выполнение последовательности действий по некоторым заранее определенным однотипным правилам. Поэтому вычисление значений функции уже является примером алгоритма. Алгоритмом является и построение таблицы разностей, равно как и вычисление функции с помощью разностей. Далее, алгоритмом является построение арифметической прогрессии. Здесь можно задавать алгоритм так: *«Напишите восемь чисел, первое из которых равно 2, а каждое следующее на 3 больше предыдущего».*

Наряду с арифметической прогрессией целесообразно задавать алгоритмически и последовательности более сложной природы, в частности геометрическую прогрессию, решая задачи следующего содержания: 1) *Написать пять чисел, первое из которых равно* 1, *а каждое следующее в два раза больше предыдущего, и найти сумму этих чисел;* 2) *Найти сумму четырех чисел, первое из которых равно* 1, *а каждое следующее в два раза больше предыдущего.*

При этом можно рассказать о легенде, связанной с изобретением шахмат, и некоторых других случаях, где встречается геометрическая прогрессия. Можно решать и такие задачи: *В каждом углу сидит кошка. Перед каждой кошкой четыре котенка, а у каждого котенка четыре мышонка. Сколько всего кошек, котят и мышат?*

Решение задач, связанных с геометрической прогрессией, приводит к понятию степени с натуральным показателем. Это направление полезно переплетать с функциональным, составляя таблицы степеней для чисел 2 и 3 и рисуя соответствующие графики.

Можно рассматривать и более сложные последовательности. Например, решить задачу о размножении кроликов и построить ряд Фибоначчи. Эта задача формулируется следующим образом: *Пара кроликов раз в год приносит приплод, состоящий из пары крольчат. Сколько кроликов появится через пять лет, если через два года после появления крольчата сами приносят приплод?*

По условию задачи через год у нас будет пара взрослых кроликов и пара крольчат, а всего две пары кроликов. Еще через год взрослые кролики принесут приплод и будем иметь три пары кроликов. Еще через год приплод принесут взрослые кролики и первая пара крольчат. Вместе с имевшимися тремя парами кроликов получим пять пар кроликов. Продолжая этот процесс, получим последовательность чисел 1; 2; 3; 5; 8; 13, каждое из которых начиная с третьего равно сумме двух предыдущих. Эта последовательность и называется *рядом Фибоначчи*. Из нее видно, что через пять лет у нас будет 13 пар кроликов.

Можно придумать целый ряд других задач, приводящих к аналогичным последовательностям, например: *Написать десять чисел, если первое из них равно нулю, второе — единице, третье — двум, а каждое следующее равно сумме трех предыдущих.* Решением этой задачи будет 0; 1; 2; 3; 6; 11; 20; 37; 68; 125.

Можно усложнить задачу Фибоначчи, считая, что приплод состоит из двух пар крольчат и т. д. В таких задачах для контроля достаточно давать последнее число.

Задачи рассмотренного типа носят в математике название задач на *рекуррентные последовательности*. Они являются дискретным аналогом задач на дифференциальные уравнения, а составление последовательности, заданной рекуррентным соотношением, встречается при численном решении таких уравнений.

Более сложными являются задачи, в которых надо составить по заданному алгоритму не последовательность, а таблицу чисел. Простейшим примером такой таблицы является известный треугольник Паскаля. Он задается следующим правилом: первая строка состоит из чисел 1; 0; 0; 0; ..., первый столбец — из чисел 1; 1; 1; 1; ..., а каждое другое число таблицы является суммой числа, стоящего над ним, и числа, стоящего на одну строку выше и на один столбец левее. Математически это условие записывается так:

$$a_{m,\,n} = a_{m-1,\,n-1} + a_{m-1,\,n}.$$

При заполнении получим таблицу 8.

Таблица 8

1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0
1	5	10	10	5	1	0

Заметим, что в строках этой таблицы появляются биномиальные коэффициенты, а потому с ее помощью можно решать самые разнообразные задачи, связанные с этими коэффициентами (найти сумму элементов одной строки и выяснить закон образования этих сумм, найти в каждой строке наибольшие элементы, попробовать выяснить закон образования каждого следующего элемента в строке из предыдущего и т. д.).

К треугольнику Паскаля в иной записи придем, задавая таблицу другим рекуррентным соотношением: каждое число равно сумме чисел, одно из которых стоит выше него, а второе слева от него. При этом треугольник Паскаля примет несколько иной вид.

Таблица 9

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210

Биномиальные коэффициенты стоят в этом случае по диагоналям. Здесь также можно придумать много арифметических задач. Ниже мы увидим, что треугольник Паскаля связан с некоторыми комбинаторными задачами.

Перейдем теперь к арифметическим задачам, имеющим «алгебраическую» направленность. В первую очередь здесь пойдет речь о задачах, разъясняющих алгебраические свойства арифметических операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Эти свойства должны разъясняться на конкретных задачах, причем особое внимание следует уделить их применениям. Например, после разъяснения свойства ассоциативности сложения хорошо показать известную задачу, которую Гаусс решил в восьмилетнем возрасте: *найти сумму натуральных чисел от 1 до 100*. Для этого, воспользовавшись ассоциативностью сложения, объединим числа в пары: 100 и 1, 99 и 2, 98 и 3, ... 51 и 50.

Сумма чисел каждой пары равна 101, а число пар — 50. Поэтому искомая сумма равна 5050. После этого можно составить аналогичные задачи: *Найти сумму четных чисел от* 2 *до* 100; *Найти сумму нечетных чисел от* 1 *до* 99 и т. д. По сути дела, здесь идет речь о вычислении суммы арифметической прогрессии. Однако при вычислении этой суммы мы пользуемся не формулой, а свойствами сложения.

Используя свойства арифметических операций, можно искать и сумму геометрической прогрессии. Например, чтобы найти сумму

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64, \quad (1)$$

умножим обе части равенства на 2. Мы получим, что

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \quad (2)$$

(использована дистрибутивность). Вычитая из равенства (2) равенство (1) и используя ассоциативность и коммутативность сложения, находим, что $S = 128 - 1 = 127$.

Для иллюстрации ассоциативности умножения можно предложить школьникам найти произведение вида

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot {}^1/_4 \cdot {}^1/_6 \cdot {}^1/_8 \cdot {}^1/_{10} \cdot {}^1/_{12}.$$

Группируя сомножители, быстро получим в ответе 1/32. Если же не группировать сомножители, вычисление становится очень громоздким. Такие же примеры можно придумать на остальные свойства арифметических действий.

Другой, и пожалуй наиболее важной для школы, стороной алгебры является составление и решение уравнений. Сейчас в школе очень много времени тратят на решение так называемых типовых арифметических задач. Однако, как всем хорошо известно, навыки арифметического решения задач очень быстро забываются, поскольку эти задачи гораздо проще и естественнее решать алгебраически. Говорят, что решение задач арифметическим путем способствует развитию мыслительных способностей учащихся. Это столь же верно, как и утверждение, что изготовление стола с помощью каменного топора способствует развитию мастерства столяра. Однако никому не приходит в голову сначала обучать будущих столяров технике работы каменным топором и лишь потом показывать, как пользоваться фуганком и шерхебелем. А в школьной математике считается возможным и целесообразным сначала учить решать задачи арифметическим способом и только потом показать более простой алгебраический способ [1].

Если своевременно ввести в школьную практику уравнения (сделав это в конце I — начале II класса), то большинство задач, вызывающих сейчас трудности у школьников, будут решаться быстро и просто. Некоторые, весьма робкие шаги в этом направлении делаются: в школьных задачниках по арифметике есть примеры «с иксом», но потом умение решать эти примеры не развивается, задачи не сводятся к уравнениям. Одной из причин этого следует считать укоренившуюся мысль, что строгую теорию уравнений надо, якобы, строить на базе равносильности уравнений, а теория равносильности слишком сложна для школьников младших классов. Этот довод несостоятелен, поскольку образование выводных уравнений опирается лишь на свойства равенств, которые совершенно очевидны. После же решения надо проверять полученный ответ. Лишь в старших классах нужно уточнить понятие решения и дать элементы теории равносильности уравнений.

Таким образом, надо начиная с I класса решать сначала примеры вида $x + 2 = 6$; $x - 2 = 4$; $2x = 12$, потом примеры вида $2x + 3 = 15$; $4x - 6 = 18$, после этого можно усложнить ситуацию и решать примеры вида $3x = x + 10$.

Наконец, примерно в III классе, рассмотреть примеры вида $6 + 2x = 3 + 5x$, где неизвестное находится в обеих частях уравнения. При этом достаточно ограничиться примерами, где решением является натуральное число.

Примерно с IV класса можно начать решать системы уравнений с двумя неизвестными. Начинать надо с простейших систем, у которых коэффициенты при одном неизвестном одинаковы в обоих уравнениях, т. е. систем вида:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + y = 11. \end{cases}$$

Решать их следует из таких соображений: во втором уравнении на $2x$ больше в левой части и на 4 больше в правой. Значит, $2x = 4$, а потому $x = 2$, а, следовательно, $y = 3$. После того как будет решена серия таких примеров, можно указать другой

[1] В статье замечательного советского математика и методиста А. Я. Хинчина «О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики» (Матем. просвещение, т. 6, 1961, стр. 29—38) убедительно показана вся нелепость существующего положения с арифметическими задачами.

прием вычитания одного уравнения из другого.

В конце IV класса можно уже решать системы двух уравнений с двумя неизвестными общего вида, показав способ уравнивания коэффициентов (разумеется, эти примеры должны быть не слишком сложными).

Параллельно с решением уравнений идет решение задач на составление уравнений. Эти задачи должны вытеснить из школы так называемые типовые задачи. Ведь в дальнейшем на практике никто не пользуется этими типовыми задачами, а пользуются общим алгебраическим методом составления и решения уравнений.

Разумеется, при составлении уравнений придется иногда делать простейшие алгебраические преобразования (раскрытие скобок, перед которыми стоит числовой множитель, приведение подобных членов и т. д.). Однако все эти преобразования не выходят за рамки действий с линейными выражениями и не требуют, например, правила умножения одночленов и многочленов, умения работать со степенями и т. д.

Отметим полезный методический прием, с помощью которого легко обучить составлению уравнений и простейшим алгебраическим действиям. Это — решение задач на отгадывание задуманного числа. Типичной задачей является: *Я задумал число, умножил его на* 2, *прибавил* 10, *разделил на* 2 *и получил* 14. *Какое число я задумал?*

В школе приходится решать такие задачи, идя от конца к началу. В то же время использование уравнений сразу приводит к уравнению $x + 5 = 14$, откуда $x = 9$.

Большое впечатление на учащихся производят и задачи, когда учитель отгадывает полученный результат (т. е. задачи, приводящие не к уравнениям, а к тождествам). Для этого достаточно в приведенной выше задаче заставить задумать число ученика, а в конце сказать (вместо «получил 14»): «Отними задуманное число. В ответе получится 5».

Когда школьники овладеют отрицательными числами, можно давать задачи с отрицательными ответами и выяснять смысл этого ответа (долг вместо имущества, движение назад вместо движения вперед и т. д.).

В конце V класса можно уже перейти к решению квадратных уравнений. При этом, однако, надо пользоваться не обычной школьной методикой, а начать с решения уравнений вида

$$(x - 3)(x - 2) = 0. \qquad (*)$$

Здесь легко объяснить школьнику, что решениями уравнения могут быть лишь числа $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$, при других значениях x оба множителя отличны от нуля. После освоения уравнений вида (*) надо раскрыть скобки и показать, что получается уравнение

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

свободный член которого равен произведению корней, а коэффициент при x — сумме корней с обратным знаком. Это позволит решать многие уравнения, подбирая корни по теореме Виета (таким образом, вопреки укоренившейся методике, использование теоремы Виета должно предшествовать изучению формулы для корней квадратного уравнения). Не следует бояться решения уравнений путем подбора — в приложениях математики методы подбора играют весьма важную роль. Лишь потом, примерно в VI классе, можно вывести обычную формулу для корней квадратного уравнения.

Третьим алгебраическим аспектом является линейная алгебра. Мы понимаем здесь под линейной алгеброй алгебраические операции, выполняемые не над отдельными числами, а над совокупностями чисел, записанными в виде строк или таблиц (матриц). Разумеется, было бы нелепо вводить в начальную школу понятие n-мерного вектора. Но есть цикл чисто арифметических задач, в которых приходится иметь дело не с одним числом, а с совокупностями чисел, расположенными в виде строки или таблицы. Приведем примеры таких задач.

Две мебельные фабрики выпускают столы, стулья, кровати и диваны. Их производительность в день показана в таблице 10.

Таблица 10

Название продукции	Столы	Стулья	Диваны	Кровати
1 фабрика	24	85	12	18
2 фабрика	31	112	22	27

Составить таблицу, показывающую выпуск продукции обеими фабриками вместе (табл. 11).

Таблица 11

Название продукции	Столы	Стулья	Диваны	Кровати
1 и 2 фабрики	55	197	34	45

С точки зрения арифметики перед нами простая задача на сложение чисел. Но ведь здесь идет речь не о сложении отдельных чисел, а о покоординатном сложении двух строк: (24, 85, 12, 18) и (31, 112, 22, 27), т. е. о сложении четырехмерных векторов.

Далее можно поставить вопрос о том, сколько продукции выпускает первая фабрика за 2 дня. Ответ дается таблицей 12.

Таблица 12

Столы	Стулья	Диваны	Кровати
48	170	24	36

Здесь речь идет об умножении вектора (24, 85, 12, 18) на число 2. Ставя вопрос, *сколько продукции выработали обе фабрики за два дня*, приходим к операции составления линейной комбинации векторов. А задача: *На сколько больше продукции выпускает вторая фабрика, чем первая?* — ведет к вычитанию векторов.

Аналогично можно составлять задачи на сложение таблиц (матриц). Для этого надо считать, что производительность фабрик меняется от декады к декаде. Например, пусть в таблице 13 дана производи-

Таблица 13

Название продукции	Столы	Стулья	Диваны	Кровати
1 декада	210	720	94	150
2 декада	230	750	120	175
3 декада	250	780	148	190

тельность по декадам первой фабрики, а в таблице 14 — второй.

Требуется составить таблицу, показывающую производительность обеих фабрик вместе. Ответом будет таблица 15.

Таблица 14

Название продукции	Столы	Стулья	Диваны	Кровати
1 декада	320	850	126	181
2 декада	342	874	145	192
3 декада	371	914	168	205

Таблица 15

Название продукции	Столы	Стулья	Диваны	Кровати
1 декада	530	1570	220	331
2 декада	572	1624	265	367
3 декада	621	1694	316	395

В этой задаче речь идет о сложении двух прямоугольных матриц. Ясно, как составить задачи на вычитание матриц, на умножение матрицы на число и т. д. При этом можно приучать школьников к принятой форме записи матриц.

Даже для столь сложной операции, как скалярное умножение векторов, можно придумать простые арифметические задачи, по сути дела приводящие к этой операции. Приведем пример такой задачи: *Фабрика выпустила в течение дня* 21 *стол*, 60 *стульев*, 15 *диванов и* 20 *кроватей. Цена стола равна* 10 *руб., стула* — 4 *руб., дивана* — 30 *руб. и кровати* — 15 *руб. На какую сумму выпустила фабрика продукции за этот день?*

Решение задачи имеет вид $21 \cdot 10 + 60 \cdot 4 + 15 \cdot 30 + 20 \cdot 15 = 1200$. Здесь мы скалярно перемножили два вектора (21, 60, 15, 20) и (10, 4, 30, 15). Аналогичные задачи можно придумать на вычисление общего числа кормовых единиц, полученных от различных сельскохозяйственных культур. Нетрудно придумать и задачи, сводящиеся по сути дела к умножению матрицы на вектор и даже к умножению двух матриц. Все эти задачи решаются с помощью арифметических операций и гораздо проще задач, решаемых сейчас в IV—V классах школы. В то же время их идейная ценность велика — они приучают школьников к мысли, что арифметические действия — сложение, вычитание, умножение — можно выполнять не только над отдельными числами, но и над сово-

купностями чисел — строками и таблицами.

Перейдем теперь к еще одному направлению — комбинаторному. Комбинаторика является одной из основ теории вероятностей. Кроме того, комбинаторные задачи имеют и самостоятельную ценность. В начальной школе целесообразнее всего рассматривать «экспериментальную» комбинаторику, не ставя целью вывод общих формул. Одной из простейших задач такого вида является задача размена денег: *Найти все способы размена монеты в* 5 *коп. на монеты достоинством в* 1 *коп.*, 2 *коп. и* 3 *коп.*

После этого можно рассматривать и более сложную задачу о размене монеты в 10 *коп.* и т. д. Эти задачи доступны учащимся сразу после изучения сложения чисел до 10.

В таких задачах существенно, что ответ не является однозначным, а состоит из указания различных способов решения. Можно наметить и задачи, в которых из различных способов требуется выбрать наилучший по некоторому признаку,— задачи на оптимальное решение.

При переходе к двузначным числам возникают задачи такого вида: *Написать все двузначные числа, состоящие из цифр* 1 *и* 2. Эта задача имеет четыре решения 11, 12, 21 и 22.

Дальше требуем написать двузначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3. Получаем девять решений. Вообще имеем k^2 двузначных чисел, состоящих из k цифр ($k \leqslant 9$).

Такие же задачи можно решать и для трехзначных чисел. Мы получаем 8 чисел, состоящих из заданных двух цифр (например, цифр 1 и 2), 27 чисел, состоящих из трех цифр, и т. д. Общий закон выражается формулой k^3, где k — число заданных цифр.

Однако переход от двузначных чисел к трехзначным не слишком прост. После того как ученики сами найдут все трехзначные числа, состоящие из 1 и 2, надо поставить вопрос: «*Как получить эти восемь комбинаций из четырех двузначных чисел* 11, 12, 21 и 22?». Ответ заключается в том, что надо взять каждую двузначную комбинацию и приписать к ней либо 1, либо 2. Тогда и получаются искомые восемь комбинаций 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222. Точно так же из девяти двузначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2 и 3, получаются 27 трехзначных чисел, имеющих те же цифры.

Решение этих задач легко связать с понятием степени.

Можно писать и числа, состоящие из цифр 0, 1, 2, причем указать на допустимость записи вида 0 1 и т. д.

Задачи указанного типа тесно связаны с теорией вероятностей. Именно, когда выписаны все числа требуемого вида, можно поставить вопросы: *Сколько среди них чисел, сумма цифр которых равна* 0? *А сколько чисел с суммой цифр* 1? *С суммой цифр* 2? и т. д. Для трехзначных чисел, состоящих из цифр 0, 1, ответ дается таблицей 16.

Таблица 16

Сумма	0	1	2	3
Количество чисел с данной суммой	1	3	3	1

Как видно, мы получаем биномиальные коэффициенты при $n = 3$. К слову сказать, указанный путь дает простой вывод формулы бинома Ньютона, но на этом мы не будем сейчас останавливаться.

Аналогично для четырехзначных чисел имеем таблицу 17.

Таблица 17

Сумма	0	1	2	3	4
Количество чисел с данной суммой . .	1	4	6	4	1

Здесь также получаются биномиальные коэффициенты или иначе — элементы строк треугольника Паскаля (см. табл. 8). Связь между комбинаторикой и треугольником Паскаля хорошо известна, и мы не будем сейчас на ней останавливаться.

Разумеется, и здесь надо связывать полученные таблицы с графическим изображением. На оси абсцисс откладывают сумму, а на оси ординат — количество чисел с данной суммой. Мы приводим графики для $k=3$, $k=4$ и $k=5$. Из теории вероятностей известно, что с возрастанием k форма этих графиков (после соответствующей нормировки) стремится к кривой Гаусса.

Такие же задачи можно ставить и для чисел, состоящих из большего количества