тике еще недостаточно изучается и распространяется.

Вместо изучения индивидуальных недочетов каждого учащегося и выработки конкретных мероприятий для их устранения, в практике некоторых школ проводятся дополнительные занятия с группами учащихся, имеющих самые различные пробелы в знаниях, что приводит к малоэффективным результатам в борьбе с неуспеваемостью по математике.

В нашей стране развернута громадная по своему размаху работа по поднятию квалификации учителя, по оказанию ему повседневной помощи в разрешении встречающихся трудностей. Достаточно напомнить хотя бы о широкой сети заочного обучения, об организации постоянных курсов по повышению квалификации учителей, о специальных институтах усовершенствования учителей, о педагогических кабинетах и т. д.

Однако все же следует отметить, что в деле поднятия уровня преподавания математики еще не использованы все возможности.

Так, например, еще до сих пор учитель не имеет таких необходимых для него пособий, как «Энциклопедия элементарной математики», пособий по истории математики, в особенности по истории русской и советской математики.

В области методической литературы недостает практических руководств по методике преподавания отдельных математических дисциплин, методических разработок по наиболее трудным темам программы, сборников задач, параллельных к стабильным задачникам, книг по внеклассной работе и т. д.

До сих пор не устранены такие недостатки, как устарелость школьных учебников по математике. «Учительская газета» совершенно справедливо осуждает недостаточную работу по усовершенствованию учебников по математике: «Какой уж год равнодушно печатаются с матриц одни и те же, давно уже устаревшие дореволюционные учебники. Мы отдаем дань уважения и справедливости таким трудам, как арифметика, алгебра и геометрия Киселева, сборник алебраических задач Шапошникова и Вальцова. Но ведь время идет, математическая наука движется вперед, жизнь предъявляет школе новые требования, сами люди меняются» («Учительская газета», 1949 г., № 57).

Мы рассматривали состояние преподавания математики и уровень знаний учащихся в рамках требований действующей программы.

Объем статьи не позволяет автору остановиться на такой огромной важности проблеме в деле поднятия идейно-теоретического уровня преподавания математики, как проблема дальнейшего усовершенствования программы, направленного на устранение разрыва между школьным курсом математики и современным уровнем математической науки.

В работе по вопросам поднятия уровня преподавания математики участвуют наши передовые ученые и наши лучшие учителя, и нет сомнения, что в ближайшее время наша школа достигнет решительных успехов в дальнейшем подъеме математической культуры учащихся.

К ВОПРОСУ О ВВЕДЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ В КУРС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ *

С. И. НОВОСЕЛОВ (Москва)

Вопрос о введении элементов дифференциального и интегрального исчислений в курс средней школы не является новым, он обсуждался еще на дореволюционных всероссийских съездах преподавателей математики. Сторонники реформы школьной программы указывают также на наличие элементов дифференциального и интегрального исчислений в программах дореволюционных реальных училищ. Однако мы полагаем, что вопрос о структуре школьного курса не может в настоящее время ставиться и решаться так же, как это было полвека тому назад. Невозможно поверить, чтобы при стремительном развитии науки проблемы методики оставались неизменными на протяжении пятидесяти лет!

Как сторонниками, так и противниками реформы в свое время приводилось большое количество различных доводов, все эти доводы достаточно хорошо известны. Однако за истекший немалый период времени развитие науки, учебной литературы, методики и накопление педагогического опыта заставляют вновь вернуться к пересмотру старых аргументов с новых точек зрения.

Из простого сопоставления прежних и совре-

* Статья печатается в порядке обсуждения.

менных курсов анализа (мы подразумеваем обычные курсы, изучаемые в высшей школе) видно, что структура этих курсов претерпела заметные изменения. В прежних курсах обычно после довольно краткого «введения в анализ» делался переход к дифференциальному исчислению. Таким образом, в сознании учащихся операции дифференцирования и интегрирования приобретали значение самоцели.

Заметим, что структура програм дореволюционных реальных училищ для своего времени была прогрессивным явлением, так как она вполне соответствовала общепринятой в то время структуре курса анализа.

В современных курсах «введению в анализ» обычно придается самостоятельное значение, оно перестает носить характер «введения», а вырастает в большой раздел, который естественно называть «учением о функциях». Такая структура курса, обусловленная развитием теории функций, представляется вполне естественной. В самом деле, дифференциальное и интегральное исчисления дают мощные средства исследования функций, тогда как ряд понятий, связанных с этим исследованием, не находится в зависимости собственно от дифференциального и интегрального исчислений.

Так, например, дифференциальное исчисление дает весьма совершенные средства исследования функций на монотонность, на нахождение наибольших и наименьших значений и т. п., однако сами понятия возрастания и убывания, наибольшего и наименьшего значений не связаны с дифференциальным исчислением. Вполне естественно, что *учащийся должен познакомиться сперва с предметом исследования, а затем уже со средствами его выполнения*. Иными словами, прежде чем перейти к дифференциальному исчислению, учащийся должен получить понятие о комплексе вопросов, составляющих предмет исследования функций. Учащийся должен уметь производить несложные исследования элементарными средствами, прежде чем он получит в руки мощные средства выполнения этого исследования.

Так, например, ясно непосредственно, что наименьшим значением функции $y=1+x^2$ является $y=1$ при $x=0$, и печально, если учащийся, не заметив этого простого факта, станет находить минимум по всем правилам дифференциального исчисления. Более того, успешное практическое применение методов дифференциального исчисления немыслимо без умения производить исследование непосредственно, элементарными средствами (например, определить в конкретном примере те промежутки, в которых производная положительна, или вычертить график).

Характерное для прежних учебников увлечение аппаратом может создать благоприятные условия для формализма в худшем смысле этого слова. Так, например, учащийся, в совершенстве овладевший техникой дифференцирования, может без труда написать

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

и вместе с тем не понимать смысла выражения $\sin x^2$, не говоря уже о построении графика данной функции.

Здесь мы встречаемся с реальной опасностью, недооценивать которую невозможно.

Изложенные соображения приводят к выводу, что *первоочередной задачей средней школы является не знакомство с элементами дифференциального и интегрального исчислений, а привитие надлежащих навыков в непосредственном исследовании функций*, с которыми учащиеся встречаются в элементарной математике, и выяснению сущности тех свойств функций, которые обычно служат предметом исследования. Было бы естественно выделить специальное время (в X классе) на систематический обзор основных свойств элементарных функций (область определения, ограниченность, неограниченность, монотонность, периодичность, понятие обратной функции). При этом надо соблюдать разумную меру, не вдаваться «в кустарщину» и в изобретение различных частных искусственных приемов там, где непосредственное исследование элементарными средствами является затруднительным.

Так, например, от учащегося, оперирующего с тригонометрическими таблицами, естественно требовать ясного понимания, что функция $\lg \sin x$ не может иметь положительных значений, что она возрастает в промежутке $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и убывает в промежутке $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$, что ее наибольшее значение равно нулю. Знание этих свойств и использование математических таблиц позволят без труда построить график.

Не надо никаких сведений из «высшей математики», чтобы установить следующие свойства функции 2^{-x^2}:

1) эта функция четная;

2) в промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ возрастает от 0 до 1;

3) в промежутке $0 \leqslant x < \infty$ убывает от 1 до 0;

4) наибольшее ее значение равно 1.

Эти данные позволят без труда представить себе форму графика.

Вот еще один пример: вовсе не так трудно выяснить, что функция $\arcsin \frac{1}{x}$ имеет смысл при $|x| \geqslant 1$ (т. е. при $x \leqslant -1$ или при $x \geqslant 1$), что она в промежутке $1 \leqslant x < \infty$ убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, и т. п.

Подобного рода примеров можно привести сколько угодно.

Нам представляется совершенно неправильным то положение вещей, что учащиеся школы знакомятся лишь с небольшим числом графиков самых простых функций. Систематическое проведение упражнений на непосредственное исследование элементарных функций будет способствовать привитию навыков в самостоятельном исследовании и повышению уровня математического развития учащихся, будет служить надежным средством борьбы с формализмом и, наконец (что весьма важно), явится прекрасным средством прочного владения важнейшим понятием — понятием функции. Для тех учащихся, которым придется в дальнейшем продолжать изучение математики (а таких учащихся немало), это окажет неоценимую помощь при прохождении математических дисциплин высшей школы.

Итак, мы формулируем нашу точку зрения следующим образом. При изучении математики учащийся постепенно знакомится с различными функциями, в процессе обучения учащийся должен получить ясные представления о свойствах этих функций. При этом следует расширить число примеров, не ограничиваясь лишь простейшими функциями (и их графиками), а вводить в рассмотрение различные несложные их комбинации, воспитывая тем самым навыки сознательного самостоятельного исследования. Эти примеры должны служить выяснению основных понятий, входящих в комплекс вопросов, связанных с «исследованием функций». В X классе следует дать в стройной системе обзор основных элементарных функций, рассмотреть различные примеры функций, обладающих теми или иными свойствами, привести примеры разрывных функций, функций, задаваемых различными формулами в разных промежутках, и, наконец, функций, задаваемых непосредственным описанием закона соответствия.

Многие считают, что понятие интеграла явится плодотворным в курсе средней школы благодаря многочисленным геометрическим приложениям интегрального исчисления. Вопрос об измерении площади «произвольной» фигуры и объема «произвольного» тела неизменно вызывает живой интерес среди учащихся. Однако, чтобы дать понятие о площади фигуры (квадрируемой) как об общем пределе входящего и выходящего ступенчатых многоугольников, вовсе не нужно ни «дифференциалов», ни «интегралов». Путем непосредственного подсчета и предельного перехода нетрудно найти, например, площадь ряда фигур, ограниченных параболическими дугами. Наконец, формула трапеций, служащая для приближенного вычисления площади, вполне доступна пониманию ученика средней школы. Этот материал желательно видеть в курсе средней школы. Но причем же здесь аппарат интегрального исчисления? Чтобы на самом деле показать эффективность (для вычисления, например, площадей) формулы Лейбница — Ньютона:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a),$$

надо достаточно далеко продвинуть технику интегрирования, что, даже по мнению наиболее убежденных сторонников реформы, не входит в задачи средней школы. Показ же мощного метода на скудном числе элементарных примеров (где в большинстве случаев можно обойтись и без этого метода) создаст в глазах учащихся впечатление «игры, не стоящей свеч», не сможет показать действительной силы нового метода и, пожалуй, послужит цели дискредитации «высшей математики».

Существует точка зрения, согласно которой элементы дифференциального и интегрального исчислений в средней школе должны носить пропедевтический характер. Именно, учащийся должен в «нестрогом» изложении познакомиться с дифференцированием и интегрированием, что якобы окажет ему помощь в дальнейшем изучении анализа. Нам представляется эта точка зрения порочной и **абсолютно неприемлемой**. Ведь кончающие школу — не дети, и всякого рода «пропедевтикальные» изощрения, основанные на «нестрогом» (т. е., попросту говоря, на ненаучном) изложении предмета, скорее привьют неправильные представления и тем самым принесут ущерб делу, а не пользу. Нам неизвестны примеры, когда подобная пропедевтика анализа приносила бы положительные результаты. Примеры же, говорящие не в пользу пропедевтики анализа, привести нетрудно. Приведем два таких примера.

Изданный в 1931 г. учебник «Основания исчисления бесконечно малых» для втузов проф. М. Я. Выгодского распространения не получил, сама практика решила вопрос не в пользу точек зрения автора, явившихся лишь предметом кратковременного увлечения.

Во втором издании курса анализа проф. А. Ф. Берманта для втузов автор исключил «пропедевтические главы», бывшие в первом издании, отчего учебник только выиграл.

В качестве одного из доводов в пользу введения элементов дифференциального и интегрального исчислений в курс средней школы выставляются следующие соображения: методы математического анализа играют огромную роль в современной технике; разработка методов дифференциального и интегрального исчислений послужила поворотным пунктом в развитии науки и техники.

Отсюда делается вывод о необходимости соответствующей реформы школьной программы. Однако не следует забывать, что интересы лиц, специализирующихся в области техники, предусматриваются системой нашего образования. Лица, обучающиеся в средних технических учебных заведениях, получают необходимые сведения в специальном курсе высшей математики, преподающемся в техникумах. Лица же, получающие высшее техническое образование, проходят солидный курс математики во втузах. Те весьма краткие сведения из дифференциального и интегрального исчислений, которые возможно дать в рамках курса математики средней школы, неизбежно будут носить поверхностный характер и ни в коей мере не смогут настолько вооружить учащихся, чтобы после окончания школы они смогли эффективно применять полученные знания в своей практической деятельности.

Более существенным представляется нам следующий довод: ряд сведений по математическому анализу нужен для успешного прохождения курса физики. Необходимо, чтобы физики конкретно указали, какой именно материал и в каком объеме им желателен. Здесь необходимо всестороннее обсуждение вопроса. Так, например, для физики важно дать понятие о скорости движения как о пределе:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Это возможно сделать и в рамках ныне действующей программы, так как учащиеся средней школы знакомятся с понятием предела. Другой вопрос, является ли столь необходимым самый аппарат дифференциального исчисления в курсе физики средней школы.

Много говорится об общеобразовательном значении основных понятий дифференциального и интегрального исчислений. Никто и не собирается отрицать этого значения, однако здесь надо иметь в виду следующие обстоятельства.

Во-первых. При современном состоянии науки общеобразовательное значение сведений из дифференциального и интегрального исчислений обесценится, если эти сведения будут преподаны на недостаточно высоком теоретическом и логическом уровне. Вряд ли можно считать нормальным, если школа станет тянуть учащихся в сторону отживших свой век наивных инфинитезимальных концепций. Развитие же хотя бы элементарного курса анализа с подобающей строгостью в пределах средней школы вряд ли возможно.

Продолжать изучение математики будут весьма многие из оканчивающих школу; математика преподается не только на физико-математических факультетах, ее станут изучать будущие техники, химики, экономисты, архитекторы, естественники. Не лучше ли средней школе создать базу для успешного прохождения математики в будущем (чем заниматься, в лучшем случае, бесполезной пропедевтикой). Об одном из важнейших мероприятий в этом направлении и была речь выше (мы подразумеваем элементы исследования функций).

Во-вторых. Если говорить об общеобразовательном значении тех или иных понятий математики, то здесь дифференциальное и интегральное исчисления вряд ли займут какое-либо особое положение. Можно указать ряд вещей в математике, огромное общеобразовательное значение которых невозможно отрицать, например: понятие множества, понятие об аксиоматическом методе, развитие понятия числа, понятие о преобразовании, понятия кольца и поля и т. д. Эти понятия могут и должны находить отражение в курсе средней школы. Примером может служить новый учебник геометрии выдающегося ученого и педагога проф. Н. А. Глаголева, в котором в доступной для учащихся форме нашел отражение ряд важнейших понятий современной науки.

Вполне своевременно ставится вопрос о необходимости знакомить учащихся с замечательными достижениями наших отечественных ученых, с выдающимися представителями нашей отечественной науки.

Нельзя оставить без внимания вопрос о привитии твердых навыков, необходимых лицам любой специальности. Примером могут служить вычислительные навыки, надлежащая вычислительная культура необходима всем кончающим школу.

Нам кажется вполне своевременной постановка вопроса о необходимости более основательного знакомства с координатным методом. Вопрос о введении «элементов аналитической геометрии» в курс средней школы подлежит специальному обсуждению. Мы не думаем, что «аналитическая геометрия» в школе должна копировать (в миниатюре) вузовский курс (как, например, это было в реальных училищах).

Из сказанного видно, как много первоочередных проблем возникает перед школой на пути повышения идейного и научного уровня преподавания и как многообразны средства решения этих больших задач. Отказ от введения элементов дифференциального и интегрального исчислений вовсе не исходит (как пытаются представить дело некоторые из наших оппонентов) из стремления оставить преподавание на том уровне, на котором оно находилось в прошлом столетии.

Мы должны упомянуть еще один довод, который приводится нашими оппонентами. Говорят, что элементы дифференциального и интегрального исчислений входят в программы средней школы в ряде иностранных государств. Мы не считаем нужным входить в обсуждение этого довода. Достаточно указать, что наша отечественная наука и методика умели в прошлом и умеют в настоящем самостоятельно ставить и разрешать важнейшие научные и педагогические проблемы. Как известно, в ряде зарубежных стран реформа преподавания математики преследует узко утилитарные цели и вовсе не исходит из стремления дать учащимся всестороннее развитие; такая точка зрения для нашей школы неприемлема.

Некоторые лица, «краснеющие» за «отсталость» наших программ, не замечают или не хотят замечать того обстоятельства, что в крупных капиталистических странах, в ряде привилегированных учебных заведений установлен 12-ти и 13-летний срок обучения. Наши учащиеся в конце 12-го года обучения переходят на III курс высших учебных заведений и не только знакомятся с элементами, а заканчивают изучение общего курса анализа (в тех вузах, в которых, разумеется, проходится математика). Уже отсюда видна вся несостоятельность рассматриваемого довода.

НОВЫЙ МЕТОД УПРОЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ И ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ*

И. А. КИРНАРСКИЙ (Москва)

Г. Третий вариант

12. Изложенные выше варианты I и II предполагают, что сомножители близки к одной и той же базе вида 10^n либо $m \cdot 10^n$ (m — число однозначное, иногда двузначное, оканчивающееся на 5, например 15, 25).

Но такая близость обоих сомножителей к одной базе встречается сравнительно редко. Как быть, если у сомножителей базы разные? Оказывается, что и в этом случае применимы приемы умножения, приведенные выше для вариантов I и II, но с небольшим добавлением. При этом возможны два случая: одна база кратна другой (вариант III) и базы некратны (вариант IV).

Пусть

$$x = A + a \text{ и } y = B + b,$$

где A и B — базы, а a и b — отклонения.

Имеем:

$$xy = xB + xb = xB + (A + a)\,b = xB + Ab + ab =$$
$$= xB + b\,\frac{A}{B} \cdot B + ab = \left(x + b\,\frac{A}{B}\right) B + ab$$

Итак:

$$xy = \left(x + b\,\frac{A}{B}\right) B + ab \qquad \text{(VII)}$$

Положим теперь, что база A кратна базе B, т. е.

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = c.$$

где c — натуральное число. Тогда будем иметь:

$$xy = (x + bc)\,B + ab \qquad \text{(VIII)}$$

Формулы (VII) и (VIII) показывают, что и в этом случае умножение выполняется, как и в предыдущих вариантах I и II (по варианту I, если B — число вида 10^n и варианту II, если B — число вида $Z \cdot 10^n$), с тем лишь отличием, что перекрестная сумма получается не в результате сложения множимого x непосредственно с отклонением множителя b, а в результате сложения x и отклонения b, предварительно умноженного на отношение баз $c = \frac{A}{B}$.

По сравнению с вариантами I и II процесс вычисления усложняется незначительно: добавляется лишь операция умножения отклонения b на $\frac{A}{B}$, являющееся обычно небольшим однозначным числом. В то же время вариант III во много раз расширяет сферу применения упрощенного метода, делая его пригодным для устного умножения почти всех двух- или трехзначных чисел, а зачастую — и чисел большей значности.

Приведем несколько примеров.

23) Требуется умножить два двузначных числа, близких к разным базам (т. е. с разными цифрами десятков), например, 62 на 14:

$$+2 + 4\,(6)$$
$$62 \times 14 = (62 + 4 \cdot 6) \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 868.$$

Базы 60 и 10; их отношение 6 (помещено в скобки рядом с отклонением +4); отклонения 2 и 4; их произведение 8.

Перекрестная сумма получается в результате сложения множимого 62 с отклонением b, предварительно умноженным на отношение $\frac{A}{B} = 6$. Умножение перекрестной суммы на меньшую базу 10 и сложение с произведением отклонений 8 выполняется, как обычно, припиской числа 8.

24) Требуется умножить два трехзначных числа с различными цифрами сотен, например, 531 на 112. Будем иметь:

$$+31 \cdot \quad +12 \cdot (5)$$
$$531 \times 112 = (531 + 12 \cdot 5) \cdot 100 + 31 \cdot 12 =$$
$$= 591 \cdot 100 + 372 = 59472$$

25) Требуется умножить два числа, из которых одно близко к 1000, а другое к 100, например, 987 на 96.

* *Продолжение*, см. «Математика в школе», 1950, № 1.