МЕТОДИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ

К ВОПРОСУ О РЕФОРМЕ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ*

А. И. МАРКУШЕВИЧ (Москва)

1. В наши дни, когда учителя и ученые различных стран озабочены реформой школьного курса математики, уместно вспомнить о движении за реформу, которое было возглавлено в начале XX в. Ф. Клейном. Некоторые положения клейновского движения, как-то: желание устранить перегородки между отдельными математическими дисциплинами и построить единый курс математики, влить в него новое содержание, избрав в качестве важнейшей идеи функцию и преобразование, включить элементы аналитической геометрии и математического анализа как замечательнейшие исследовательские инструменты, созданные еще в XVII в. и все же оставшиеся в течение двух с половиной столетий за пределами школы, показать применения математики к физике,— сохраняют свое значение и доныне. Это движение не осталось бесплодным: оно привело к фактическому пересмотру учебных планов, программ, учебников и методов преподавания во многих странах мира, хотя в целом поставленные цели и не были достигнуты.

2. Исторические сдвиги в жизни человеческого общества и научно-технический прогресс за те шестьдесят лет, которые отделяют нас от начала клейновского движения, оказались столь значительными, что теперь проблема математического образования решается в существенно новых условиях. Не пытаясь перечислить их все, мы все же хотим прежде всего указать на колоссально возросшую роль математических методов во многих областях человеческой деятельности, которые еще до недавнего времени казались весьма далекими от математики, и на ставшее бесспорным в общественном мнении высокое прикладное значение математики. Далее следует отметить, что если во времена Клейна никому не приходило в голову требовать от школы, чтобы она давала учащимся представление об идеях математики того времени (конца XIX — начала XX века) — напомним, что тогда шла борьба за внесение в школьный курс некоторых завоеваний XVII столетия,— то теперь в результате развития обобщающих и объединяющих идей, имеющих достаточно прозрачный и элементарный характер (основные структуры), прямо ставится вопрос о перестройке школьного курса в направлении сближения его с духом и буквой современной математики, т. е. математики середины XX века. То обстоятельство, что большое прикладное значение неожиданно получила математическая логика и многие отделы так называемой финитной математики (из которых некоторые вновь сформировались за последние 2 десятилетия), заставило математиков пересмотреть сложившуюся оценку математического анализа как важнейшего для практики математического инструмента. В результате возник вопрос о том, что математика непрерывного и бесконечного должна несколько потесниться в пользу математики дискретного и конечного.

Наконец, анализ немногих основных для всей математики структур (алгебраическая структура и прежде всего группа, структура упорядоченного или частично упорядоченного множества, структура топологического пространства), произведенный психологами и математиками (Ж. Пьяже, К. Гаттеньо и др.), привели к идее о том, что существует близость между механизмами мышления ребенка и взрослого математика, благодаря чему возникли новые представления о возможностях усвоения детьми математических понятий.

Реформистские движения, которые мы теперь наблюдаем, уже не возглавляются какой-либо одной «сильной» математической личностью, и они не представляют чего-либо однородного. Можно, пожалуй, усмотреть в них, при всем их разнообразии, две основные тенденции, перекрывающиеся лишь отчасти. Одна — диктуется преимущественно прикладными нуждами (техника, экономика, оборона), другая — образовательными и связана с изменением представлений об удельном весе различных культурных ценностей, которыми должен владеть образованный человек.

3. Немалое влияние на нынешние попытки реформировать преподавание математики в школе оказывает известный трактат Бурбаки «Элементы математики», в котором современная математическая наука последовательно рассматривается как учение о различных структурах. Самая возможность выделить лишь немногие классы структур, лежащие в основе всей математики, создать их иерархию, кратко и выразительно охарактеризовать и представить простыми и доступными для восприятия моделями (образцами) произвела большое впечатление не столько на математиков-специалистов, для которых в этом не было ничего неожиданного, сколько на некоторых психологов и педагогов, усмотревших в структурах подлинный, «детский путь» в математику (вспомните отрицание «царского пути» в математике, которое легенда приписывает Евклиду).

В настоящее время имеется немало проектов школьных программ, книг и учебников, в которых делается попытка перестроить школьное математическое образование, выдвинув на первый план обобщающие, структурные аспекты. В отношении начальных классов школы стоит упомянуть здесь программы и учебные пособия, разработанные рядом американских школ и университетов [1]. Для преподавания в старших классах имеют значение книги Л. Феликс (Франция), Ж. Папи (Бельгия) и т. д. При всем интересе подобных опытов следует заметить, что они не дают еще убедительного решения проблемы ни в смысле отбора материала для школы, ни в смысле слияния «классических» и «современных» тем в едином, целостном курсе. Чаще всего обобщающие идеи и понятия сосуществуют рядом с традиционными темами, не работая на них по существу. Примером такой книги может служить американский учебник «Modern Mathematics. Algebra two and trigonometry» Myron F. Rosskopf, Stephen S. Willoughby и Bruce R. Vogeli, Silver Burdett company, 1964, где, хотя и даются сведения о группах, полях и отношениях (relations), само изложение комплексных чисел, элементарных трансцендентных функций (включая тригонометрические) и векторов ведется на довольно традиционном уровне, без использования тех преимуществ, которые могли бы представить изложенные в других главах общие концепции.

Удачнее выглядит попытка решения проблемы объединения «старого» и «нового» материала в книге Ж. Папи: La Mathématique moderne, Premier volume, 1963.

Но эта книга охватывает только программу класса, непосредственно следующего за начальными (VI класс), и остается неясным, удастся ли автору преодолеть серьезные трудности, заключающиеся в построении всего школьного курса целиком.

4. Проблема преломления идей Бурбаки в школьном курсе математики заслуживает того, чтобы на ней остановиться. Мы попытаемся расчленить ее на части, отделив в ней то, что, с нашей точки зрения, не возбуждает сомнений от того, что составляет ее основную трудность.

Не вызывает принципиальных затруднений составление курса, рассчитанного на изучение в школе в течение ряда лет, в котором в определенной системе будет охарактеризованы, обильно иллюстрированы и пояснены примерами основные математические понятия: множества, отношения (в частности, понятия функции и геометрического преобразования, отношения эквивалентности и порядка), алгебраической операции (и в связи с этим понятия группы и поля), близости и пространства (в частности, метрического и линейного). Нетрудно допустить, что последовательные ступени этого курса и весь курс в целом окажутся вполне посильными учащимся и будут поддерживать в них интерес к предмету, а многие темы будут восприниматься детьми как занимательные игры. Наконец, можно согласиться и с тем, что такой курс, включивший в себя достаточное количество вопросов, упражнений и задач, даст богатый материал для воспитания и развития качеств и навыков умственной деятельности, которых мы вправе ожидать в наши дни от человека со средним образованием. Итак, и представление об общих идеях, и общее развитие — все это, по-видимому, может быть достигнуто на этом пути.

Кардинальный вопрос для нас заключается в следующем: если общие идеи и понятия

[1] См. Elementory School Mathematics. New directions by Edwina Deans... US. Departament of Health Édication aud Welfare, Washington, 1963.

займут центральное место в школьном курсе математики, а традиционный материал, отличающийся более частными и конкретными чертами, будет рассматриваться в качестве примеров и иллюстраций, поясняющих общие понятия, то не разрушим ли мы условия, в которых до сих пор учащийся приобретал знания и навыки, необходимые для многих видов человеческой деятельности, для изучения естественных и технических наук, наконец, для дальнейшего изучения самой математики?

Чтобы ясно видеть, о чем идет речь, перечислим вкратце «традиционные» темы, почти неизменно встречающиеся в школьных программах всех стран: числовые системы, начиная с натуральных чисел и кончая комплексными числами, координаты и графики, линейные и квадратные уравнения, элементарные функции, простейшие геометрические фигуры и метрические соотношения в треугольнике и круге, движения, симметрия и гомотетия, длины, площади, объемы и площади поверхностей (по традиции, кроме многоугольников и простейших многогранников, рассматриваются еще круг, круговой цилиндр и конус, шар). Легко согласиться с тем, что при всех изменениях школьной программы это содержание должно сохраниться в том или ином виде. Вопрос, следовательно, заключается не в том, быть или не быть перечисленному материалу в школьном курсе, а в том, повторяем, рассматривается ли этот материал как основной, подлежащий изучению или же как набор примеров и иллюстраций к основному содержанию курса, ставящему целью ознакомление с фундаментальными структурами.

5. Наряду с откровенными намерениями «бурбакизировать» весь школьный курс математики имеются и значительно более умеренные течения, пытающиеся установить разумное соотношение «классического» и «современного».

В этом смысле не лишена интереса и значения известная американская программа «9 пунктов» (a nine — point programm) [2], хотя мы не можем согласиться с содержащимся в ней отказом от начал математического анализа, отказом, представляющим, с нашей точки зрения, шаг назад по сравнению с позицией Клейна. Слабой стороной программы является также и то, что она ограничивается только вопросами преподавания математики в старших классах школы. Вот эти 9 пунктов:

1. Хорошая подготовка как в отношении концепций, так и навыков к курсу математики в колледже на уровне дифференциального и интегрального исчислений и аналитической геометрии.

2. Понимание природы и роли дедуктивного рассуждения в алгебре в той же мере, как и в геометрии.

3. Умение различать (appreciation) математическую структуру («patterns»), например свойства натуральных, рациональных, действительных и комплексных чисел.

4. Разумное использование объединяющих идей — множества, переменные, функции и отношения.

5. Употребление неравенств наряду с уравнениями.

6. Включение в планиметрию некоторых элементов аналитической геометрии (coordinate geometry) и наиболее существенного из стереометрии и пространственных представлений.

7. Введение в XI классе основного курса тригонометрии с упором на координаты, векторы и комплексные числа.

8. Особое внимание к элементарным функциям в XII классе (полиномы, показательные, круговые).

9. Рекомендация дополнительного курса по выбору в XII классе: либо элементы теории вероятностей со статистическими приложениями, либо введение в современную алгебру.

6. Состоявшийся в Будапеште 27 августа — 8 сентября 1962 г. по инициативе Венгерского правительства и при содействии ЮНЕСКО Международный симпозиум по преподаванию математики в школе опубликовал свои выводы и рекомендации, заслуживающие серьезного внимания [3]. Здесь констатируется, в частности, что многочисленные эксперименты показали возможность использования простейших операций над множествами, понятия отношения и функции в школьном курсе, предназначенном для детей начиная с 12-летнего возраста (и даже раньше). Это облегчает последующее изучение элементов топологии и анализа.

Устанавливается с опорой на эксперимент возможность и желательность начиная с 12-летнего возраста введения понятий эквивалентности, преобразования сдвига, понятия группы, необходимых или полезных

[2] Report of the Comission on Mathematics Program for college preparatory mathematics, College Entrance Examination Board, New Jork, 1959.

[3] См.: «Математика в школе», 1963, № 3.

для объяснения структуры векторного пространства, с тем чтобы начиная с 15 лет можно было перейти к изучению и употреблению векторных пространств. Далее высказывается пожелание наряду с углублением исследований в области преподавания множеств, векторных пространств и связанных с ними понятий продолжать опыты над следующими темами, представленными в свете современной математики: элементы топологии, элементы геометрии, понятия статистики и теории вероятностей, дифференциальное и интегральное исчисления, математическая логика. Указывается, что каждый из этих разделов должен являться предметом исследований в различных возрастных группах и школах различных типов, с тем чтобы определить, когда и как они могут быть введены. Подчеркивается важность выяснения того, в какой мере может быть введен аксиоматический метод. Рекомендуется полностью выяснить возможность различных интерпретаций математических положений (поливалентность математики) с помощью многообразных конкретных применений.

Известный американский математик Маршалл Стонн, выделенный Бюро симпозиума в качестве автора сводки о проведенной работе, в следующих словах резюмировал ответ симпозиума на вопрос о том, какую математику следует преподавать в школе. Ответ этот гласит: «Программу обучения необходимо привести в соответствие с развитием математики и точных наук путем включения в нее новых разделов и уделения большего внимания обобщающим структурным аспектам математики...»

Такой ответ является, конечно, чрезвычайно общим, и из него нельзя вывести никакой определенной программы. Вот почему заключения и рекомендации симпозиума так настаивают на проведении многообразных экспериментов, осуществляемых в различных вариантах. И с этим нельзя не согласиться: по-видимому, для получения серьезно обоснованных и достаточно конкретных рекомендаций необходима широкая экспериментальная работа, рассчитанная на ряд лет.

7. В СССР, помимо экспериментальной работы, в настоящее время ведется работа по составлению проектов новых программ преподавания математики в массовой школе на ближайшие годы. В частности, такой проект разрабатывается в Академии педагогических наук РСФСР. Проект этот еще не закончен. Однако некоторые исходные положения все же могут быть здесь высказаны.

Прежде всего следует подчеркнуть философский аспект. Математика для нас не простой набор равноправных игр с более или менее сложными, но в общем произвольными системами условий, а наука о тех наиболее общих отношениях реального мира, которые характеризуются безразличием к конкретной природе объектов («количественные» отношения в философском смысле этого термина). Поскольку она имеет независимый от нашей воли предмет, выбор материала для преподавания в школе не может быть произвольным, как он не может быть произвольным, скажем, в физике и химии.

В курсе должны раскрываться в определенной системе и последовательности наиболее простые и вместе с тем существенные для познания и изменения мира математические понятия и закономерности. Вот почему изучение фундаментальных числовых систем (и прежде всего систем целых, рациональных и действительных чисел), линейных и квадратных уравнений, координат и графиков, векторов, симметрии, движений и гомотетии, элементарных функций и основ дифференциального и интегрального исчислений с их важнейшими приложениями к задачам геометрии и физики — все это должно составлять основное содержание полного школьного курса.

Обобщающие и объединяющие понятия, такие, как отношение, группа, поле, линейное пространство, могут появляться в нем не как исходные пункты, а как итоги изучения, подводимые по мере накопления фактов и закономерностей, дающих повод к соответствующим обобщениям. Исключение может быть сделано, по-видимому, для понятия множества, так как ребенок, приходящий в школу, имеет уже достаточный опыт, позволяющий ставить и решать простейшие вопросы о принадлежности или включении и операциях над множествами.

Предполагается свести начальный период обучения математике к минимальному сроку, ограничив его тремя годами (с 7 до 10 лет). Далее в течение 5 лет должен осуществляться основной курс математики, общий для всех школьников и включающий завершение арифметики, с использованием буквенных обозначений и простейших линейных уравнений, начальный курс алгебры (рациональные операции, извлечение квадратного и кубического корня с помощью таблиц, координаты и графики, уравнения первой и второй степени, понятие о логарифмах, употребление логарифмической линейки для вычислений) и геометрии с началами тригонометрии (треугольники, многоугольники и векторы, гомотетия и подобие, тригонометрические функции и метрические соотношения в треугольнике, относительное положение прямых и плоскостей, важнейшие факты, относящиеся к площадям и объемам фигур).

Наконец, в старших классах различных типов школ, работающих на базе восьмилетки, в течение 2—3 лет должен осуществляться курс, допускающий известные вариации по содержанию и характеру, но в основном посвященный изучению элементарных функций (включая круговые), векторов и движений, производной и интеграла с их важнейшими применениями и, быть может, комплексных чисел (если позволяет время). Именно на этом этапе обучения может быть быстрее выявлена и структура математической теории. В специализированных физико-математических школах с двухлетним сроком обучения, организуемых при университетах и научно-исследовательских институтах, где на математику и физику выделяется значительное дополнительное время и куда прием учащихся проводится путем конкурсных экзаменов, будет ставиться расширенный и углубленный курс математики. Во всей этой работе большое значение будет иметь замечательный опыт школ, готовящих уже в течение ряда лет программистов-вычислителей.

Из сказанного следует, что перестройке математического образования должна предшествовать достаточно широкая и систематическая экспериментальная работа в школах различных типов и на различных этапах обучения, результаты которой следует обсудить и взвесить. Эта работа должна привести не только к обоснованным рекомендациям относительно содержания программы, но и новым учебникам и детальным методическим указаниям относительно того, как должны преподаваться различные темы курса. Такая работа требует ряда лет.

* Статья написана для сборника «Вопросы преподавания математики», издаваемого в ГДР.

О ВОСПИТАНИИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Б. В. ГНЕДЕНКО (Москва)

1. О некоторых особенностях нашего времени. Идеалы математического образования не оставались неизменными и менялись как от одного исторического периода к другому, так и от целей, которые выдвигались перед образованием. Я не ставлю сейчас перед собой задачи выяснения той исторической картины, которая характеризует смену идеалов и изменение учебных программ, связанное с этим процессом. В настоящей статье меня интересует современность и та неизмеримо возросшая роль, которую должен играть учитель математики в воспитании и формировании интересов подрастающего поколения.

Современный нам период истории характерен стремительным прогрессом научных знаний, быстрой сменой технических идей, математизацией не только науки, но и подавляющего большинства практических видов деятельности. Темпы развития науки и техники непрерывно увеличиваются. Усложнение технических средств, несомненно, упрощает труд физический, но неизбежно приводит к возрастанию роли труда интеллектуального. На научную работу, на перспективные исследования и стимулирование изобретательской деятельности общество отпускает все более серьезную долю находящихся в его распоряжении материальных средств. При этом неизбежно увеличивается и процент населения, вовлеченного в научные исследования. Углубленное образование, умение ставить новые проблемы и решать их, привычка к точному и скрупулезному логическому анализу становятся необходимыми не одиночкам, а огромным массам людей. Этот вывод мы только усилим, если заметим, что управление автоматизированным заводом, поиск неисправностей в сложном техническом устройстве также требуют повышенной логической культуры и развитой способности аналитического мышления.

Отошло в прошлое то время, когда было можно, получив в юности специальность и