метрии); Это также может служить источником дополнительного резерва времени. Желательно, чтобы идея возможности геометрии и алгебры как дедуктивной теории, опирающейся только на аксиомы, была достаточно выпукло изложена в рассказе учителя в VIII классе. Но начинать следует с доказательств таких теорем, как теорема о сумме углов треугольника или теорема Пифагора, где необходимость доказательства понятна, а результат интересен.

4. Нет необходимости увеличивать (за указанные выше пределы) количество подлежащих запоминанию теорем элементарной геометрии. Свойства вписанных и описанных четырехугольников, теорема о схождении высот треугольника в одной точке, метрические соотношения в круге и т. д. могут служить хорошим материалом для «задач на доказательство».

5. Специальные виды движений (симметрия относительно прямой и относительно точки, повороты) рассматриваются как преобразования геометрических *фигур*. Идея геометрического преобразования как взаимно однозначного отображения всей плоскости «на самою себя» в явном виде появится в программе девятого класса.

А. Н. КОЛМОГОРОВ (Москва)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

В 1963/64 учебном году в обязательные программы девятых классов школ РСФСР был введен раздел «Геометрические преобразования на плоскости», рассчитанный на 30 часов занятий. Лишь с запозданием раздел был обеспечен первой частью пособия В. Г. Болтянского и И. М. Яглома [1]. Спешность подготовки этого пособия легко обнаружить, сравнивая издание 1963 года со вторым изданием 1964 года[1]. С переходом на десятилетнее обучение интересующий нас раздел выпал из временных переходных рекомендаций министерства на 1964/65 учебный год.

Пособие В. Г. Болтянского и И. М. Яглома охватывало только геометрические преобразования на плоскости. Стереометрию, программы, изданные в 1963 году, рекомендовали изучать в традиционном духе. Симметрии, переносы и вращения в стереометрической части этой программы совсем не упоминаются. Это лишний раз подчеркивает легкомыслие всего замысла реформы. В соответствии с программой 1963 года было, однако, написано несколько учебников, поданных на проводившийся в 1964 году конкурс. Лучшие из этих учебников в главах, посвященных геометрическим преобразованиям на плоскости, довольно близки к пособию В. Г. Болтянского и И. М. Яглома, но при переходе к стереометрии, подчиняясь программе, о преобразованиях забывают. Интересную попытку изложения стереометрии, построенного на рассмотрении геометрических преобразований, предпринял А. И. Фетисов [2]. Книга эта не доведена до состояния учебника, но принятая в ней система изложения стереометрии заслуживает внимания.

В такой обстановке разумно со всей серьезностью заново обсудить место изучения геометрических преобразований в школьной геометрии. Вопрос о роли геометрических преобразований в школьном курсе геометрии можно ставить по-разному. Выделим условно четыре подхода к делу:

[1] В § 18 первого издания авторы «доказывают» ошибочную теорему 4, которую им пришлось во втором издании заменить новой. В первом издании вызывали недоумение «доказательства» теорем, помеченных № 1, в § 5, 13, 18 и 23. Во втором издании сами эти «доказательства» оставлены без изменений, но в § 34 сказано (стр. 50), что это совсем не доказательства, а «пояснения с помощью листа бумаги или кальки».

В § 34 авторы сообщают, что все обычное школьное изложение вопросов о равенстве фигур и движениях основано на «порочном круге», и делают невразумительную ссылку на различие между «физическим» и «геометрическим» движением. Во втором издании авторы пытаются исправить впечатление от этого сообщения, намечая целых два выхода из затруднения. Мы увидим далее, что второй из намеченных выходов (с аксиомой, проиллюстрированной рисунком 95) совпадает с системой изложения, принятой в старых изданиях учебника А. Киселева. Конечно, у А. Киселева никакой «полной системы аксиом» нет, но как раз основное допущение, о котором сейчас идет речь, сформулировано явно в качестве утверждения, принимаемого как «очевидное» без доказательства. Положение с движениями в этом традиционном изложении геометрии ничем не хуже положения с прямыми, отрезками и т. п. См., впрочем, об этом далее.

1) Желательно приучить учащихся возможно шире пользоваться геометрическими преобразованиями при доказательстве теорем и решении задач.

2) Основные типы геометрических преобразований сами по себе должны сделаться самостоятельным объектом систематического изучения.

3) Наиболее доступные в школьной обстановке варианты построения систематического курса геометрии широко пользуются «наложением» фигур. Поэтому:

3а) в школьном курсе следует явно формулировать в виде аксиом основные свойства движений.

4) Следует подчинить все построение школьного систематического курса геометрии теоретико-групповой концепции, исходя из группы движений, или группы подобных преобразований, или начиная с аффинной геометрии с последующим переходом к «метрической».

Получившим широкую известность образцом школьного учебника, в котором последовательно проводятся тенденции 1), 2), 3) и менее последовательно 4), можно считать учебник, написанный знаменитым французским математиком Эмилем Борелем в 1905 году [3]. В первом параграфе систематического курса геометрии (ему предшествует чисто описательное «введение») у Бореля появляется в качестве аксиомы основное свойство плоскости, которое в более отчетливой, хотя, может быть, и несколько тяжеловесной, формулировке помещалось и в старых изданиях «Геометрии» А. Киселева (см. п. 23 в [4]):

Мы примем за очевидное, что наложение одной плоской фигуры на другую всегда можно выполнить в такой последовательности:

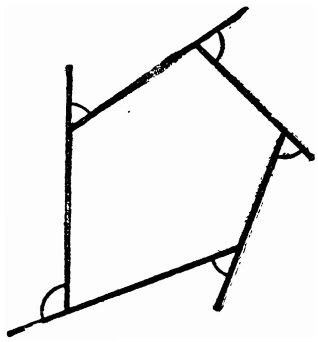
1°. Мы можем любую точку одной фигуры совместить с любой точкой другой фигуры.

2°. По совмещении двух точек мы можем, вращая накладываемую фигуру вокруг совпавшей точки, совместить в обеих фигурах любые две полупрямые, исходящие из совпавших точек.

3°. По совмещении двух точек и двух прямых мы можем, вращая накладываемую фигуру вокруг совпавшей прямой, как около оси, расположить эту фигуру или по ту, или по другую сторону от совпавшей прямой.

После этого наш произвол заканчивается; совпадут ли другие части фигур, зависит от свойств самих фигур.

В планиметрии перенос («трансляцию») Борель определяет как скольжение подвижной плоскости по неподвижной, при котором некоторая прямая на подвижной плоскости все время остается совмещенной с некоторой прямой на неподвижной плоскости. Параллельные прямые определяются как прямые, которые можно получить одну из другой при помощи трансляции. Лишь следом за этим определением устанавливается, что параллельные прямые не пересекаются. Можно спорить о том, насколько такое изложение желательно в самом начале систематического курса геометрии. Но по моему личному опыту (1922—1925) оно вполне доступно учащимся VI—VII классов (следует, впрочем, заметить, что по возрасту учащихся эти классы соответствовали современным VII—VIII).



Черт. 1

Очень рано Борель вводит понятия «направления» и «угла между двумя направлениями». Это позволяет без всякого труда получить теорему: сумма внешних углов многоугольника равна четырем прямым (черт. 1), а теорему о сумме внутренних углов треугольника считать следствием подсчета $6d - 4d = 2d$. Сохраняемый по традиции концентр курса геометрии, не опирающийся на аксиому о параллельных, у Бореля отсутствует. И я не думаю, чтобы об этом стоило жалеть по той причине, что таким образом затрудняется в далеком будущем изложение идей геометрии Лобачевского.

Поворот Борель определяет как скольжение подвижной плоскости по неподвижной, при котором одна точка подвижной плоскости остается совмещенной с некоторой точкой неподвижной плоскости. Хотя, вообще говоря, Борель значительно шире позволяет себе заменять точные доказательства обращением к интуиции, чем это принято в нашей школе, он отмечает специально равенство

$$\angle AOA' = \angle BOB' \qquad (1)$$

как следствие равенства

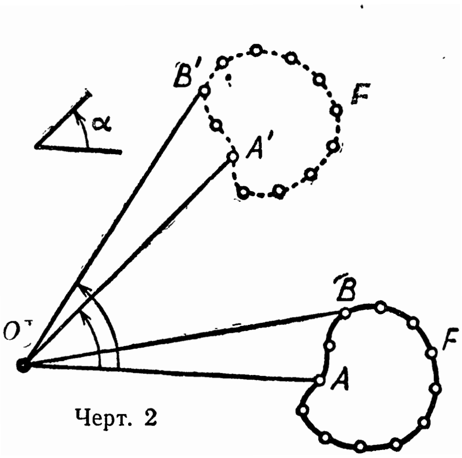
$$\angle AOB = \angle A'OB' \qquad (2)$$

(черт. 2) и лишь после этого говорит об угле

$$\alpha = \angle AOA' = \angle BOB'$$

как характеристике самого поворота.

В стереометрии Борель определяет параллельные плоскости как получающиеся одна из другой переносом и лишь в виде



Черт. 2

второго эквивалентного определения говорит, что две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. В виде аксиомы формулируется основное свойство вращения вокруг оси: каждая перпендикулярная к оси прямая при вращении остается перпендикулярной к оси и лежащей в одной определенной плоскости, которая по определению считается перпендикулярной к оси.

Впрочем, о логической строгости и последовательности изложения Борель не очень заботится. Так, указывая в примечании на возможность наложить угол сам на себя так, что стороны поменяются местами, он тут же (в учебнике, предназначенном для фактического употребления в школе) говорит, что замечание это «не имеет интереса для учащихся». Известные по литературе варианты полного аксиоматического изложения геометрии, следующие пожеланию 4), кажутся мне мало подходящими для массовой средней школы, так же, впрочем, как и построенные иначе.

В советское время преподавание в наших педагогических институтах было полностью подчинено системе изложения, принятой в основном тексте знаменитой книги Гильберта. Укоренилось представление о том, что понятие «конгруэнтности» в качестве основного неопределимого понятия должно относиться только к отрезкам и углам, а конгруэнтность более сложных фигур должна *определяться* через конгруэнтность отрезков и углов. Видимо, исходя из этой идеи, редакторы послереволюционных изданий учебника А. Киселева исключили процитированное выше корректное и точное описание «подвижности» плоскости, сохранив, однако, лишенную отчетливого содержания формулировку:

Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место этой же или другой плоскости, причем накладываемую часть можно предварительно повернуть другой стороной.

Но «равенство» произвольных фигур осталось при этом основным неопределяемым понятием, и сохранились «доказательства» теорем о равенстве треугольников при помощи «наложения», хотя основной принцип, на котором они основаны, был выброшен. Таким образом, о сколько-либо удачном осуществлении пожеланий 3) и 4) в применении к этим переизданиям учебника А. Киселева говорить не приходится. В направлениях 1) и 2) новые издания начиная с подготовленного Н. А. Глаголевым в 1938 году идут несколько дальше дореволюционных (добавлен ряд параграфов об осевой и центральной симметрии, о подобном преобразовании фигур гомотетии и подобии)[2].

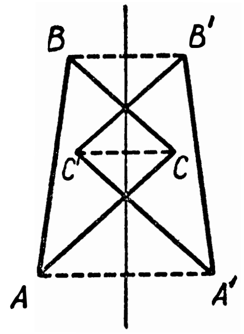
В применении к современной советской средней школе уместно раздельно рассмотреть вопрос о месте геометрических преобразований в курсе восьмилетней школы и в курсе IX—X классов. Первое наше пожелание кажется разумным в полной мере отнести к восьмилетней школе, отнеся его к работе начиная с VI класса, как это сделано в проекте программ, подготовленных Академией педагогических наук. Требование 3а) разумно выполнить там, где впервые пойдет речь об аксиомах, лежащих в основе геометрии, т. е. в конце VI класса или в начале VII. Формулировка по содержанию, равноценная процитированному § 23 старого учебника А. Киселева, кажется мне доступной на этом этапе изучения геометрии.

Однако доступность этой формулировки связана с тем, что дело идет *о наложении фигур,* а не о взаимно-однозначном отображении плоскости на плоскость и тем более «на самою себя». Любопытно, что и в пособии В. Г. Болтянского и И. М. Яглома вопрос «Что такое геометрическое преобразование?» ставится лишь в третьем с конца параграфе (§ 32). До этого отображаются лишь фигуры на фигуры. Изложе-

---

[2] Отмечу одно специальное обстоятельство. В старых изданиях учебника А. Киселева (см. [4], § 205—218) в основном тексте говорилось только о подобии многоугольников, а в мелком шрифте — о гомотетии произвольных фигур. В переработке Н. А. Глаголева появилась идея, которую трудно признать удачной, говорить, что именно существование преобразования гомотетии «дает возможность обобщить самое понятие подобия на случай, когда фигура образована кривыми линиями». Без критики эта идея перешла и в пособие В. Г. Болтянского и И. М. Яглома.

ние осевой симметрии ведется при помощи «перегибания листа бумаги» так, что среди многочисленных примеров (с рыбами, кляксами, листьями) нет ни одного, в котором каждая из симметричных друг другу (но не самой себе) фигур лежала бы по обе стороны оси симметрии (ср. наш чертеж 3).



Черт. 3

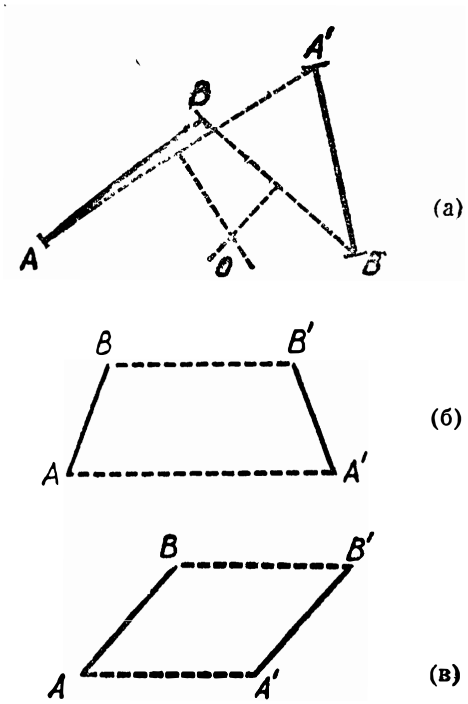
Вероятно, надо тщательно обдумать первый концентр сведений об осевой и центральной симметрии, переносах и поворотах *фигур на плоскости* для пятых, шестых и седьмых классов. Сам И. М. Яглом говорил мне, что значительная часть написанного им с В. Г. Болтянским пособия более пригодна именно в качестве эскиза этого первого концентра. Я готов с ним согласиться, несмотря на то что пособие многим учителям показалось «трудным». Мне кажется, что мнимое впечатление трудности получилось у учителей, которые в первых же параграфах пособия старались найти основу для курса в духе, привычном для IX класса. Если же конкретный материал § 1—7, 9—15 пособия воспринять с более наивных позиций, просто как запас геометрических фактов, подлежащих наглядному усвоению, то обнаружится, что он совсем не труден.

Несколько более деликатен вопрос об изучении поворотов. Он неизбежно переплетается с введением ориентированных углов. При этом естественно допустить сразу значения углов от $-\infty$ до $+\infty$ и показать, что углы, отличающиеся на полный угол, определяют один и тот же поворот[3]. Возможно, что все это естественно связать с переходом к радианному измерению углов и началом второго концентра тригонометрии, которые пока планируются лишь в IX классе.

Зато к VIII классу по существующей программе относится изучение подобия. Рассмотрение планов и карт создает подходящую атмосферу для перехода к пониманию преобразования подобия как изображения всех точек одной плоскости точками другой плоскости. Здесь эта идея предметно содержательнее и психологически доступнее, чем в случае движений.

Гомотетия в VIII классе тоже вполне уместна, но более как способ вычерчивания подобных фигур, чем как самостоятельный предмет изучения. Хотелось бы, чтобы сведения о возможностях мензульной съемки были несколько *интереснее,* чем в учебнике Н. Н. Никитина, который совершенно напрасно отсылает к «специальным руководствам по мензульной съемке», вместо того чтобы при помощи чертежа объяснить, что для получения при помощи мензулы плана в заданном масштабе требуется измерить лишь один отрезок — базис.

Если намеченные сейчас возможности изучения геометрических преобразований в восьмилетней школе будет реализованы, то на долю старших классов останется прежде всего полное осуществление пожелания 2). Здесь можно будет начинать с выяснения самого понятия геометрического преобразования как взаимно-однозначного отображения множества точек плоскости (позднее — пространства) самого на себя. Недавно я имел случай убедиться в том, что понятие это усваивается с некоторым трудом. В X классе математической школы я считал уже раздел «Движение плоскости» законченным. Была доказана теорема Шаля (каждое движение первого рода есть



Черт. 4

[3] В пособии В. Г. Болтянского и И. М. Яглома неявно предполагается, что углы берутся лишь в пределах $-180° \leqslant \alpha \leqslant +180°$. Такой подход к делу вряд ли целесообразен, так как при этой концепции нельзя утверждать, что при последовательном выполнении двух поворотов углы поворота складываются.

перенос или поворот) обычным способом, отправляющимся от построения центра поворота, переводящего отрезок AB в отрезок $A'B'$ (черт. 4а). Известно, что безупречное проведение этого доказательства требует особого рассмотрения двух случаев параллелизма прямых AA' и BB' (черт. 4б и 4в), а в основном случае (4а) доказательства равенства *ориентированных* углов $\angle AOA'$ и $\angle BOB'$ и т. д. Несомненно, что логическая структура доказательства, приведенного в книжке [5], где рассматриваются последовательные образы

$$F(A) = B, F(B) = C,$$

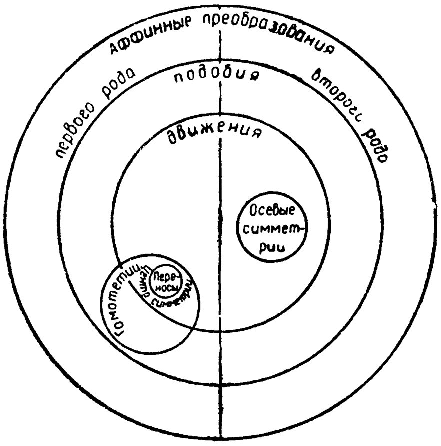
проще. Это доказательство и было предложено в качестве альтернативного. Но большинство учеников класса заявили, что *нельзя* говорить об образе

$$F(B) = C,$$

так как до выполнения преобразования точки B *«не было»*.

Трудность была быстро преодолена ссылкой на перемещающиеся одна относительно другой «системы отсчета», только что рассматривавшиеся на лекциях по физике: вместе с осями координат перемещаются и все точки плоскости. Точка A переходит в точку B, которая в новых координатах имеет те же координаты, что A в старых, но имеет и какие-то координаты в старой системе и т. д. Без этой подпорки вся концепция многим казалась трудно уловимой. Возможно, что был виноват я, но во всяком случае считаю полезным рассказать об этом опыте.

В математической школе мы доказали и теоремы Шаля в пространстве, и теоремы об общем виде преобразований подобия на плоскости[4], провели классификацию аффинных преобразований плоскости с неподвижной точкой (с указанием на то, что «гиперболический поворот» является двумерным аналогом преобразования Лоренца). Были разъяснены все соотношения, изображенные на схеме-чертеже 5. Надо определить, что из этого материала может войти в программу старших классов массовой средней школы. Я думаю, что законченное изучение (с подчеркиванием в заключении теоретико-групповой точки зрения) движений и гомотетий на плоскости заведомо посильно. В стереометрии, вероятно, лучше ограничиться переносами, поворотами и симметрией относительно плоскости. Общие теоретико-групповые идеи можно проиллюстрировать на таких простых фактах, как совпадение элементов симметрии куба и октаэдра, икосаэдра и додекаэдра.



Черт. 5

Что касается пожелания 4), то сама его обоснованность кажется мне по меньшей мере сомнительной. Я думаю, что целесообразно найти в IX—X классах место для компактного изложения системы строгого обоснования геометрии, быть может — лишь планиметрии, но самым экономным способом выполнения этого пожелания кажется мне следование аксиоматике, предложенной в научной литературе Германом Вейлем, где основными понятиями геометрии являются точки и векторы. В случае планиметрии достаточно добавить еще аксиому существования двух линейных преобразований векторов $y=ix$, $y=-ix$, обладающих свойствами $i^2=(-i)^2=-1$.

Все это, конечно, требует еще широкого обсуждения. Для дополнительной внеклассной работы существуют прекрасные книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского [6, 7], П. С. Моденова и А. С. Пархоменко [5], но над соответствующими главами будущих *учебников*, видимо, еще придется много поработать.

[4] Для преобразований, не меняющих ориентацию, самый легкий способ аналитический, через рассмотрение линейных преобразований в комплексной плоскости $z' = az + b$.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Геометрия. Учебное пособие для IX класса средней школы, изд. 1, 1963; изд. 2, 1964.

[2] А. И. Фетисов, Геометрия, изд. АПН РСФСР, 1964.

[3] E. Borel, Geométrie, Armand Colin, 1905.

[4] А. Киселев, Геометрия, изд. 25, 1916.
[5] П. С. Моденов, А. С. Пархоменко, Геометрические преобразования, изд. Московского университета, 1961.
[6] И. М. Яглом, Геометрические преобразования, т. I, II, Гостехиздат, 1955—56. (Библ. математич. кружка).
[7] В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Преобразования. Векторы. Пособие для учителей средней школы, изд. «Просвещение», 1964.

Е. С. КОЧЕТКОВ, Е. С. КОЧЕТКОВА (Москва)

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА[1]

§ 1. УРАВНЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА

Два числа или алгебраических выражения, соединенные знаком равенства ($=$), *образуют равенство.* Число или выражение, стоящее слева от знака равенства, называется левой частью, а число или выражение, стоящее справа от знака равенства, — правой частью равенства. Например, в равенстве $a+3=b$ левая часть есть $a+3$, а правая b. Равенство, содержащее одни лишь числа, может быть только верным или неверным. Так, равенство $1{,}5\cdot 2=3$ верно, а равенство $3=-2$ неверно. Если равенство содержит не только числа, но и буквы, то при одних значениях этих букв оно может оказаться верным, а при других — неверным. Например, равенство $a^2=16$ при $a=4$ и $a=-4$ верно, а при других значениях a неверно. Рассмотрим два равенства

$$a^2-1=(a+1)(a-1)$$

и

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{(a+1)(a-1)}.$$

Левая и правая части первого равенства имеют вполне определенный смысл при любых значениях a, левая и правая часть второго равенства — лишь при a, не равном 1 и -1.

Значения букв, входящих в равенство, при которых и левая и правая части равенства имеют смысл, называются допустимыми значениями этих букв. Так, допустимыми значениями a в первом равенстве будут все числа, а во втором — все числа, кроме 1 и -1.

Всякое равенство, содержащее неизвестную величину a, называется уравнением относительно этой величины a.

Уравнениями будут, например, равенства

$$a+4=5, \tag{1}$$

$$a^2+1=-3, \tag{2}$$

$$a^2-1=(a-1)(a+1), \tag{3}$$

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{(a-1)(a+1)}. \tag{4}$$

Корнем уравнения называется такое значение неизвестной величины, при котором левая и правая части уравнения принимают одинаковые числовые значения. Например, корнем уравнения (1) является $a=1$. При таком a обе части уравнения принимают значения, равные 5. Уравнение может и не иметь корней. При любых значениях a выражение a^2+1 положительно. Поэтому второе из приведенных выше уравнений $a^2+1=-3$ не имеет корней.

Большую роль в математике играют такие уравнения, для которых каждое допустимое значение неизвестной величины является корнем. К таким относятся, например, уравнения

$$a^2-1=(a+1)(a-1)$$

и

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{(a+1)(a-1)}.$$

Корнем первого уравнения является любое число. Про второе уравнение этого сказать нельзя. При $a=1$ и $a=-1$ его

[1] Статья Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой является первой главой рукописи их учебника «Алгебра и элементарные функции», получившей в 1964 г. первую премию на конкурсе учебников по математике для средней школы, объявленном Министерством просвещения РСФСР.