А. Н. КОЛМОГОРОВ, И. М. ЯГЛОМ (Москва)

О СОДЕРЖАНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

В № 2 журнала «Математика в школе» за этот год был опубликован «Объем знаний по математике для восьмилетней школы», разработанный группой членов Комиссии по математическому образованию математического отделения Академии наук СССР. В настоящее время та же группа членов Комиссии при сотрудничестве Сектора обучения математике Академии педагогических наук РСФСР готовит к публикации «Объем знаний по математике для старших классов средней школы». Нижеследующие замечания преследуют своей целью разъяснение некоторых исходных пунктов, какими мы руководствовались в этой работе.

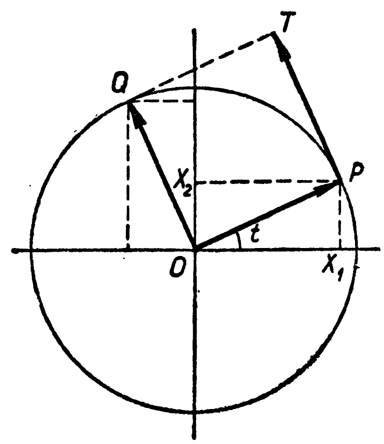
1

Общеизвестно, что разрыв между содержанием школьного преподавания и современным состоянием науки особенно велик в математике. Здесь приходится говорить даже не о «современной науке» в смысле науки двадцатого столетия, а о том, что за пределами школьного курса остаются основные направления математики восемнадцатого и девятнадцатого века, как и математические методы, интересующие в настоящее время инженеров, биологов и экономистов. В отличие от уроков физики или химии школьник на уроках математики не услышит почти ничего, помогающего ему ориентироваться в современной популярной литературе, рассказывающей о научных исследованиях последних лет или актуальных технических задачах.

Даже математические концепции, по существу усваиваемые учащимися с полным успехом в практической жизни и в самой школе за пределами уроков математики, в рамках математического курса иногда признаются слишком «трудными». Нетрудно привести примеры этого. Один пример уже упомянут в пояснениях к опубликованному проекту «объема знаний» для восьмилетней школы: это — общее понятие подобия произвольных фигур. Другой тесно сюда примыкает. При пользовании картами и планами и их вычерчивании каждый школьник хорошо понимает, что каждая точка на местности изображается вполне определенной точкой на карте, а по точке, отмеченной на карте, можно найти соответствующую точку на местности. Но понятие «взаимно однозначного соответствия» в школьном курсе математики все еще звучит как что-то необычное и, по мнению многих, слишком трудное по своей «абстрактности»[1]. По-видимому, мы недостаточно умеем в школьном преподавании привязать формальные определения математических понятий к уже имеющемуся у учащихся реальному опыту.

Остановимся на более сложном примере. Рассмотрим равномерное движение точки по окружности единичного радиуса с единичной скоростью. Закон движения проекций X_1 и X_2 точки P по координатным осям (черт. 1) указывается формулами

$$x_1(t) = \cos t, \; x_2(t) = \sin t;$$



Черт. 1

проекции вектора $\overline{PT}$ скорости на координатные оси доставляют нам скорости движения точек X_1 и X_2. Если отложить

[1] В качестве еще одного примера можно указать на то, что понятие вектора, которым учащиеся свободно оперировали на уроках физики, до самого недавнего времени считалось слишком сложным для изучения в школьном курсе математики.

вектор скорости от начала координат $v = \overline{PT} = \overline{OQ}$, то легко показать вполне элементарно, что

$$v_1(t) = -\sin t, \ v_2(t) = \cos t.$$

На уроке физики у хорошего преподавателя эти рассмотрения будут восприняты, если и не совсем уж сразу, то и без каких-либо особых затруднений. Но это не что иное, как вывод (без обращения к «формулам сложения» и без предельного перехода!) формул дифференцирования

$$(\cos t)' = -\sin t, \ (\sin t)' = \cos t.$$

А введение в школу начал дифференциального исчисления все еще встречает возражения и во всяком случае представляется даже наиболее опытным учителям делом трудным и требующим затраты очень большого времени.

Аргументы противников расширения идейного содержания школьного курса математики разнообразны:

1) предлагаемый для включения в школьные программы новый материал слишком труден;

2) изменение и расширение традиционного курса могут привести к понижению логической культуры учащихся, которая создается сейчас тем, что ограниченный материал преподается на высоком уровне логической «строгости»;

3) расширение программы невозможно, ибо невозможны никакие сокращения ныне действующей программы, содержащей лишь абсолютно необходимый каждому материал;

4) любое расширение программы затруднит приобретение твердых навыков (в преобразовании алгебраических и тригонометрических выражений и т. п.);

5) с точки зрения изучения в высших учебных заведениях курса «высшей математики» предварительное знакомство с начатками дифференциального и интегрального исчисления только «портит» будущих студентов: познакомившись с идеями математического анализа в популярной форме, они уже не отнесутся с должной серьезностью к его строго научному систематическому изложению.

Возражения первого типа естественно рассматривать конкретно по поводу отдельных предлагаемых для включения в школьное преподавание тем. Сейчас сделаем лишь одно общее замечание: часто искреннее убеждение широких кругов учительства в большой трудности элементов анализа простейших понятий теории множеств или начал теории вероятностей основано на том, что сами они знакомились с ними в той форме, в какой их принято излагать в педагогических институтах, что часто обозначает не только большую глубину и широту подхода, но и излишнюю, иногда даже вредную при первом знакомстве с предметом ученость и отвлеченность. Ниже (см. стр. 57) мы еще остановимся на этом подробнее.

Возражения второй группы часто исходят из ошибочного представления о благополучии в деле «строгости» в принятом сейчас традиционном курсе. Между тем эта школьная «строгость» в значительной части совершенно фиктивна. Некоторые примеры приведены в статье А. Н. Колмогорова в № 2 журнала «Математика в школе» за этот год. Другие примеры будут указаны ниже (см. стр. 57—58).

Более серьезное ознакомление учащихся с возможностями строго логического дедуктивного развития математической теории, по-видимому, возможно в средней школе лишь в «выборочном» порядке. Полезнее понять, что такое эта «строгость», зачем она нужна и как достигается, научиться отличать строгое доказательство от заключений, опирающихся на наглядные соображения, на разборе строения отдельных фрагментов полного курса математики [2], чем заучивать в течение лет длинные цепи доказательств, лишь претендующие на безукоризненную строгость (ср. ниже стр. 58).

По поводу возражений третьей группы полезно вспомнить, как бесследно исчезли из сознания образованных людей и даже специалистов-математиков какие-либо «формулы Мольвейде», которые считалось обязательным когда-то знать. Несмотря на ряд сокращений, и современный школьный курс содержит довольно много материала, не имеющего ни прикладного, ни общеобразовательного значения. Многие теоремы курса геометрии могли бы быть сохранены лишь в виде «задач на доказательство», которые можно и не изучать и не нужно запоминать, все специальные приемы решения тригонометрических и иррациональных уравнений можно рассматривать лишь как материал для тренировки учащихся, готовящихся к конкурсным экзаменам (если сами вузы не предпочтут проверять уровень

---

[2] А. Картан предложил для французской школы тщательное, последовательно аксиоматическое изложение «фрагмента» геометрии, видимо, подразумевая при этом, что полный школьный курс геометрии будет включать и другие разделы, изложенные на более интуитивном наглядном уровне.

технической тренировки поступающих на ином, более важном материале).

2

Более обстоятельного обсуждения заслуживает вопрос о приобретении устойчивых навыков. Мы исходим из того положения, что создание системы твердо усвоенных «умений» является одной из центральных задач обучения в школе вообще, а преподавания математики в особенности. В этом плане некоторые предложения (популярные в современной западноевропейской методической литературе) о перестройке всего школьного курса математики в направлении исключительного внимания только к наиболее общим теоретико-множественным и логическим концепциям кажутся нам ошибочными.

Но в возражениях четвертой группы ревнители традиционного школьного курса часто по существу исходят лишь из представлений об уровне тренировки (в алгебраических и тригонометрических преобразованиях и т. п.), в наибольшей степени облегчающего дальнейшее прохождение вузовского курса высшей математики. Если же исходить из интересов общего, неспециализированного среднего образования, то естественно стремиться к тому, чтобы

а) некоторый минимальный объем знаний был подкреплен достаточно прочными навыками, либо имеющими в самом деле широкое применение в практике большинства взрослых людей, либо такими, которые в самом школьном курсе облегчают дальнейшее уверенное движение вперед[3],

б) более широкий круг математических идей, понятий и фактов, необходимых для понимания основ естествознания, современной техники, общих вопросов биологии или экономики, был усвоен с должной отчетливостью и в запоминающейся надолго форме (что значит, в частности, — в достаточно наглядной), хотя бы и без разработки вширь примыкающих технических навыков.

В пределах восьмилетней школы требования к уровню навыков, вытекающие из такого подхода к делу, нам кажутся, не ниже обусловленных современными программами. Опубликованный проект объема знаний для восьмилетней школы не предполагает уменьшения общего объема требований в части приобретения навыков. Ограничение требований в части преобразований алгебраических дробей компенсируется требованием навыков в оценках величин, использовании соображений размерности, началом приобретения определенных навыков в логарифмических вычислениях (закрепляемых в старших классах).

Несколько отлично наше отношение к объему навыков, приобретаемых в старших классах. Здесь интересы учащихся, для которых математика имеет лишь общеобразовательное значение, и учащихся, стремящихся к профессиям, требующим расширенных математических знаний и умений, или к поступлению в технические вузы, несколько расходятся. Контингенту учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, будет посильно и интересно углубление идейного содержания школьного курса и в соединении с большими требованиями к отработке и совершенствованию навыков; для многих же расширение идейных горизонтов возможно и при меньшем обременении их выработкой навыков в сложных преобразованиях и т. п.[4].

Нам кажется, что такое решение вместе

---

[3] Например, было бы нелепо объяснять начала дифференциального исчисления школьникам, для которых вычисление

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h$$

не является легкой вспомогательной операцией, не отвлекающей внимания от следующего за ним предельного перехода.

[4] Если в IX и X классах будет выделено по шесть недельных часов на дополнительные занятия по выбору и одной из возможностей будет посещение хотя бы двух недельных часов дополнительных занятий математикой, то их хватит с избытком для подкрепления расширенной общеобразовательной программы упражнениями, важными для тех, кому в будущем тригонометрические преобразования, решение задач с применением тригонометрии или первые навыки в дифференцировании и интегрировании и т. п. в самом деле понадобятся.

Можно думать, что по крайней мере 20—30% учащихся старших классов уже сейчас изъявили бы вполне определенное желание такую дополнительную подготовку по математике получать. Если школам будет дана рекомендация организации такого рода дополнительных занятий, то в огромном большинстве наших полных средних школ эти занятия можно будет организовать силами учителей или местной технической интеллигенции. По-видимому, именно такая умеренная и гибкая форма специализации обучения в старших классах сейчас наиболее реальна и демократична. Выбор математики в качестве одного из факультативных предметов должен быть соединим как с приобретением практических навыков в области черчения, электротехники, ремонта сельскохозяйственных машин, так и со специализацией по вычислительной математике или дополнительными занятиями физикой и т. п. Эффект такого начинания в смысле распространения математической культуры был бы очень велик. Вероятно, каждый опытный учитель математики сам может оценить, как много можно сделать за два часа в неделю дополнительных занятий с более интересующейся и способной третью учеников обычного среднего школьного класса.

с широкой организацией дополнительных факультативных занятий является наиболее реальным решением проблемы, которая при ее игнорировании все равно не перестанет существовать. Бесплодность настояния на усвоении всеми учащимися расширенных технических навыков, которые им в большинстве случаев никогда далее не понадобятся, с одной стороны, а с другой стороны, тяга большого числа учащихся к усиленной тренировке в области математики являются фактами нашей школьной жизни.

Например, в общем курсе предлагается свести к строго необходимому минимуму преобразования иррациональных и тригонометрических выражений и ограничиться общим понятием об обратных тригонометрических функциях с вниманием к характеру их многозначности (бесконечное число значений для одного значения аргумента), но с полным устранением подлежащего заучиванию материала.

3

Появление показательной функции в проекте объема знания для восьмилетней школы и настояние на существенной роли идей математического анализа в старших классах средней школы отражают общую тенденцию к выдвижению вперед математических методов изучения развивающихся во времени процессов. Включение в программу восьмилетней школы логарифмов и начального знакомства с логарифмическими вычислениями имеет, конечно, и практическую ценность [5].

Известно, что исторически существование показательной и логарифмической функций и их свойства были усмотрены в результате рассмотрения приближенных реализаций этих функций. Рассмотренная еще Бюрги таблица значений

$$x = (1{,}0001)^n,$$

соответствующих целым n, дает возможность получить график зависимости $y = \log_{1,0001} x$ от x, формально определенный только для x, кратных 0,0001 (ибо $(1{,}0001)^k \approx 1 + 0{,}0001 \cdot k$ при не слишком больших k), но практически, при помощи интерполяции, доставляющий с хорошим приближением значения y, соответствующие любому действительному x.

Постулировав существование функции $y = \exp_a(x)$, обладающей свойствами

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2),$$
$$\exp_a(1) = a,$$

можно без труда получить, что

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m},$$

и т. п. Возможны и другие столь же простые пути подхода к показательной и логарифмической функциям.

Обратимся теперь к вопросу о положении в курсе средней школы элементов математического анализа: производной, интеграла, простейших примеров дифференциальных уравнений. Вряд ли надо доказывать, насколько желательно с общеобразовательной точки зрения достигнуть того, чтобы все учащиеся могли вполне конкретно понять хотя бы ньютоновскую концепцию математического естествознания: возможность выражать элементарные законы природы в виде соотношений, связывающих производные (у Ньютона — флюксии), и рассчитывать течение управляемых этими законами процессов при помощи интегрирования (нахождения по флюксиям флюэнт). Мы вполне обдуманно предлагаем заканчивать круг сведений из анализа уравнениями показательного роста

$$y' = ky$$

и гармонических колебаний

$$y'' = -k^2 y.$$

Важно ясно понять, что это совсем не требует включения в программы средней школы тяжеловесного отдельного «курса математического анализа». Конкретным предметом повседневного внимания могут остаться традиционные «элементарные функции». Но их изучение станет более интересным, простым и идейно содержательным при достаточно раннем введении производной.

Опыт наглядного преподавания начал анализа говорит, что эти начала могут быть изложены в форме, в которой они совсем не воспринимаются как что-либо более трудное, чем обычный, чисто алгебраический материал. Одному из нас в 1922 — 1925 гг. довелось в седьмом классе неспециализированной девятилетней школы с очень демократическим составом учащихся непосредственно после решения квадратных уравнений и примеров исследования графиков квадратного трехчлена вводить по-

[5] При желании придать курсу восьмилетки определенную законченность тоже естественно считать необходимым ознакомление учащихся восьмилетней школы наряду, скажем, с элементами стереометрии также и со всеми основными элементарными функциями школьного курса алгебры.

нятие производной (без предварительного изучения теории пределов), заканчивать изучение поведения квадратного трехчлена общего вида уже с использованием производной (результаты становятся прозрачнее и легче запоминаются), отыскивать максимумы и минимумы несколько более сложных функций ($y = x^3 - x$ и т. п.), формулировать задачу отыскания примитивной и достигать полного понимания записей типа

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} g dt,$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v dt.$$

Существенно в этом опыте было, однако, то обстоятельство, что преподавание математики и физики было согласованно. По-видимому, и сейчас многим преподавателям физики возможности популярного введения понятий и методов высшей математики представляются в несколько ином свете, чем преподавателям математики. Нам кажется несомненным, что более тесный контакт между преподаванием математики и физики таит в себе значительные возможности прочного усвоения начал математического анализа и векторного исчисления без лишнего обременения учащихся.

Настояние на наглядности и приведенные примеры не обозначают, что мы предлагаем изгнать из школы понятие предела и формулировку простейших свойств пределов. Необходимо подвести учащихся и к пониманию понятия непрерывности функции, подкрепленному разбором нескольких примеров разрывных функций. Важно лишь, чтобы все эти понятия появлялись в виде итога разбора конкретных задач.

В начале статьи уже указывалось, что иногда вызывает возражения самая идея начального ознакомления с математическим анализом на полуинтуитивном уровне. Но возражения эти кажутся нам несостоятельными. Мнение о возможном вреде от предварительного ознакомления с идеями математического анализа без надлежащей «строгости» следует признать радикально ошибочным. Полезно заметить, что СССР является чуть ли не единственной в мире страной, где поступающие в университеты и педагогические институты обязаны приступать к изучению фундаментального курса математического анализа (в университетах — два года по восемь недельных часов), содержание которого в последние годы все более модернизируется в направлении общего абстрактного подхода к основным понятиям[6], без того чтобы познакомиться предварительно с элементами анализа в меньшем объеме или в наглядном и полуфизическом изложении.

Лучшие студенты университетов и педагогических институтов с возникающими здесь трудностями справляются и впоследствии (хоть иногда и с большим запозданием) за предлагаемыми им формальными определениями начинают видеть очень простую и наглядную реальность. Но, по-видимому, нередко как раз будущие учителя средней школы так и выходят из педагогических институтов с явно преувеличенными представлениями о «трудности» начал математического анализа. Выходом из такого положения нам и представляется знакомство с началами анализа еще в средней школе.

4

Если в течение первых четырех лет обучения будет создан достаточно прочный запас геометрических представлений (см., например, А. М. Пышкало, Геометрия в I—IV кл., изд. «Просвещение», М., 1965), то в V классе можно будет начать систематический курс геометрии, построенный на отчетливой системе определений изучаемых геометрических объектов и постепенно включающий в себя все больше аккуратно проведенных доказательств. Однако представление о возможности последовательного дедуктивного построения геометрии на основе явно формулированной системы аксиом может быть дано в восьмилетней школе лишь в беседах учителя и в самых общих чертах. Отмеченную в сноске на странице 54 возможность строго логического построения на основе аксиом «фрагмента» геометрии легче осуществить в старших классах средней школы.

Сложившийся сейчас характер преподавания геометрии в VI—VIII классах настолько непоследователен в своих методических установках, что его можно объяснить только исторически как результат незаконного компромисса между стремлением к упрощению курса и желанием сохранить видимость «строгости» изложения. В отношении отчетливости **определений** бесспорно желательно некоторое повышение требований. Недопустимо, например, когда

[6] К сожалению, вопросом престижа математических кафедр в наиболее солидных технических вузах часто является подражание этой университетской традиции.

после определения: «Углом называется фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки», — предлагается «вырезать из листа бумаги» начерченный угол (два луча!) и сообщается, что в результате получится не один угол, а два (!?).

С тем, что первое упоминание об аксиомах появляется далеко не в начале курса, разумно согласиться. Но первые же доказательства должны давать повод для осмысленного обсуждения вопросов:

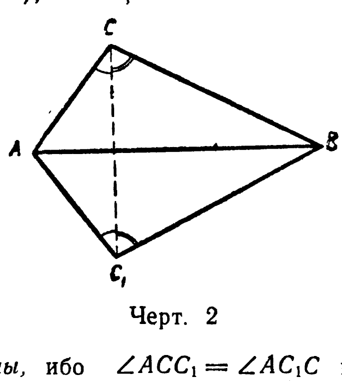
а) что доказывается,

б) какие уже принятые допущения лежат в основе доказательства.

Заучивание доказательств, в которых учащийся не отдает себе отчета в использованных предпосылках, приносит не пользу, а вред. Таково сейчас положение с «доказательствами» признаков равенства треугольников. Разумно формулировку этих признаков рассматривать как вывод из рассмотрения способов построения треугольников по элементам [7].

[7] Мало кому приходит в голову доказывать в школе, что две окружности с расстоянием между центрами, меньшим суммы радиусов, пересекаются ровно в двух точках. Этот факт принимают как очевидный. Соображения симметрии подсказывают, что полученные точки симметричны относительно линии центров окружностей; поэтому два треугольника с данным основанием AB, имеющие заданные длины двух других сторон, симметричны относительно прямой AB, а следовательно, равны. Это соображение лишний раз подчеркивает, что требование выучить доказательство «третьего признака равенства треугольников» есть лишь дань потерявшей смысл традиции.

Сторонники принятого в нашей школе курса геометрии могут видеть дополнительную ценность доказательства третьего признака равенства «по Киселеву» в том, что используемое в нем дедуктивное рассуждение способствует воспитанию логической требовательности учащихся. При этом, однако, не замечают, что доказательство, которое обязаны были заучивать миллионы школьников, содержит довольно грубую логическую ошибку. В самом деле, это доказательство утверждает, что *треугольники ABC и ABC_1* (черт. 2), *имеющие соответственно равные стороны, равны,* ибо $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$ и $\angle BCC_1 = \angle BC_1C$, поскольку треугольники ACC_1 и BCC_1 равнобедренные; поэтому $\angle ACB = \angle AC_1B$. Но почти то же самое рассуждение одновременно доказывает и *равенство треугольников ABC и ABC_1, имеющих одинаковую сторону AB, равные стороны AC и AC_1 и равные углы ACB и AC_1B, противолежащие одной из равных сторон:* $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$, — ибо треугольник ACC_1 равнобедренный; поэтому $\angle BCC_1 = \angle BC_1C$, а значит, и треугольник BCC_1 равнобедренный; поэтому $CB = C_1B$. Но сама теорема о равенстве при указанных условиях треугольников ABC и ABC_1, очевидно, является неверной. Какова же ценность доказательства, равным образом устанавливающего справедливость истинного и ложного предложений?



Черт. 2

Хорошо известно, что в системе научного обоснования геометрии возможно принять за первоначальное, неопределяемое понятие равенство отрезков и углов; при этом «первый признак равенства треугольников» приходится по существу считать аксиомой. Именно этот путь обоснования геометрии был избран Д. Гильбертом. В равносильной гильбертовой системе аксиом аксиоматике Ф. Шура неопределяемым понятием является «движение», с помощью которого определяется равенство фигур. При таком построении геометрии признаки равенства треугольников, естественно, доказываются; однако в основу доказательства кладутся довольно сложные свойства движений, принимаемые без доказательств. Эти свойства движений сами по себе ничуть не проще признаков равенства треугольников; поэтому a priori вовсе не ясно, является ли более предпочтительным принимать за аксиомы эти свойства или «признаки равенства». В нашей же школьной практике принято вообще не формулировать свойства движений. Но понять при этом смысл «доказательства» первого признака равенства треугольников (доказательства аксиомы?) становится невозможным не только для 12-летнего ребенка, но и для взрослого математика.

Сама планировка современного курса осложнена из-за того, что следует ограничениям, имеющим смысл лишь при не формулируемом и не воспринимаемом учащимися выделении теорем «абсолютной» геометрии, независимой от аксиомы параллельных. Зачем, например, давать (не тривиальное и требующее известных усилий для запоминания) доказательство теоремы о том, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного? Не лучше ли поскорее доказать, что сумма внутренних углов равна двум прямым?

При начале систематического курса в V классе и устранении лишних осложнений (отмеченного выше типа) мы никак не можем считать предлагаемый «объем знаний» по геометрии преувеличенным. Дополнительную экономию времени и затрачиваемых учащимися усилий можно получить, если широко пользоваться при доказательствах соображениями симметрии. Осевая симметрия позволяет просто установить свойства равнобедренного треугольника, свойства биссектрисы угла и перпендикуляра, восстановленного к отрезку в его середине, и пр. Изучение параллельных линий и параллелограммов естественно связать с параллельными переносами, а окружностей — с поворотами.

Известную трудность представляет идея ориентированного угла произвольной величины. Здесь нельзя избежать сопоставления различных понятий, объединяемых общим наименованием «угол». Но преодоление такого рода трудностей как раз и является одним из самых необходимых элементов повышения логической культуры учащихся[8].

Наибольшие сомнения, вероятно, вызовет предложение дать достаточно полный ассортимент формул для вычисления площадей и объемов и «наглядное обоснование» их даже в сравнительно трудных случаях. Формулировка принципа Кавальери, конечно, предполагает не обязательный для заучивания рассказ о путях его обоснования при помощи разрезания на тонкие слои. Но в подобной форме обращение к предельным процессам происходит в восьмилетней школе несколько раз:

а) при изучении процесса измерения, появлении в вычислительной практике периодических дробей[9] и рассказе учителя о существовании иррациональных чисел;

б) если принять предложенный «объем знаний» — при указании на возможность перехода от дискретной геометрической прогрессии с близким к единице знаменателем к показательной функции;

в) в рассматриваемом сейчас объяснении происхождения принципа Кавальери.

Нам кажется, что такое предварительное обращение к предельным процессам еще в восьмилетней школе педагогически целесообразно. Столь значительный комплекс идей будет прочно усвоен, лишь если учащиеся возможно раньше получат с ним первое соприкосновение.

Лишь в одном случае осуществление предложенной программы требует обращения к искусственным приемам. Надо тем или иным способом или определить множитель c_1 в формуле для объема шара

$$V = c_1 r^3 \qquad (1)$$

или множитель c_2 в формуле

$$S = c_2 r^2 \qquad (2)$$

для площади сферы. Один из этих множителей получается из другого при помощи общеизвестного разбиения шара на «бесконечно тонкие» пирамидки, устанавливающего, что

$$c_1 = \frac{1}{3} c_2.$$

Правильность же формул (1) и (2) с неопределенным множителем вытекает из предложений о пропорциональности объемов (площадей) подобных фигур третьей (второй) степеням линейных размеров, на твердом усвоении которых в применении к произвольным фигурам (а не только многоугольникам и многогранникам) мы, как уже отмечалось, настаиваем. Их наглядное обоснование предполагает рассказ о процессе измерения площадей и объемов при помощи измельчающейся кубической (квадратной) сетки. Это еще одно соприкосновение в восьмилетней школе с предельными процессами.

Каковы же, однако, значения постоянных c_1 и c_2? Этот вопрос не может быть решен совсем уж просто, ибо подлежащая доказательству теорема глубоко неочевидна (случайность пропорциональности констант c числу π, возникающему при решении задачи о площади круга, ярче всего подчеркивается тем, что в четырехмерном евклидовом пространстве объем шара радиуса r равен $C_1 r^4$, где $C_1 = \frac{1}{2}\pi^2$). В ряде зарубежных школ принята система, при которой формула

$$c_1 = \frac{4}{3}\pi \qquad (3)$$

сообщается учащимся без основания. Нам, однако, кажется такое положение нежелательным. Для доказательства формулы (3) можно также воспользоваться, например, принципом Кавальери. Сравним между собой «поставленные» на одной горизонтальной плоскости шар радиуса r и цилиндр высоты $2r$ с радиусом основания r, из которого вырезан вписанный

[8] Как и понимание, скажем, того, что уравнение $x+1=0$ не имеет корней до введения отрицательных чисел, а уравнение $x^2+1=0$ — до введения комплексных чисел и т. п.

[9] Можно не давать в рамках восьмилетней школы «теории» периодических дробей, которая в старших классах явится простым применением формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии, но и в восьмилетней школе трудно обойтись без указания на то, что процесс деления фактически дает $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$.

в него конус (черт. 3). Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на расстояние h, представляет собой круг радиуса $r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}$ и площади $\pi(r^2 - h^2)$; такое же сечение цилиндра с вырезанным из него конусом представляет собой кольцо, ограниченное окружностями радиуса r и h, и, следовательно, имеет ту же площадь $\pi r^2 - \pi h^2$. В силу принципа Кавальери отсюда следует, что объем шара равен объему цилиндра без объема конуса, т. е.

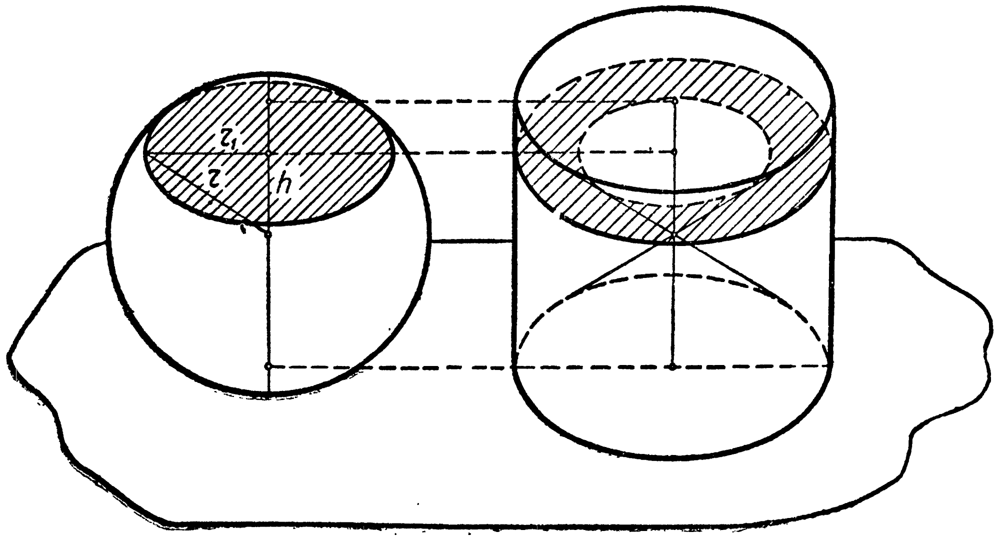
$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

и, значит,

$$c_1 = \frac{4}{3} \pi.$$

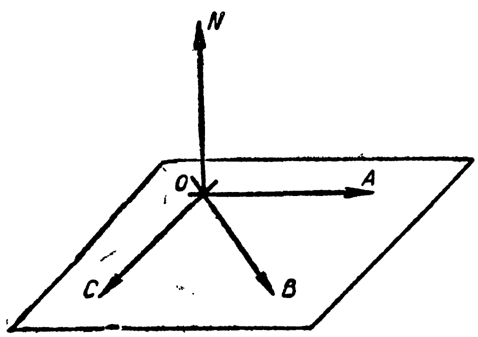
Целесообразность включения в курс восьмилетней школы простейших понятий векторной алгебры не представляется нам бесспорной. Однако векторами все равно пользуются на уроках физики — не следует ли в таком случае ввести их и в геометрию? Правда, физикам нужны не те векторы, с которыми привыкли оперировать геометры: в физике всегда фигурируют связанные (в крайнем случае — скользящие) векторы, в то время как геометрия занимается свободными векторами. Но понятие связанного вектора математически гораздо проще понятия свободного вектора, и изучение связанных векторов представляет собой весьма полезную пропедевтику к введению более общего понятия о векторах. Эти соображения подсказывают предложение о прохождении в восьмилетней школе темы о связанных векторах (складываемых по правилу параллелограмма), а в старших классах — темы о свободных векторах (складываемых по правилу треугольника).

Наконец, нам кажется совершенно неестественным, что выпускники восьмилетней школы не имеют никакого представления о формуле для расстояния между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости, отнесенной к декартовым прямоугольным координатам, и об уравнении окружности даже в ее простейшей форме (заметим, что они знакомы с уравнениями гиперболы и параболы!). Мы, однако, совсем не считаем уместным введение в программу восьмилетней школы большого раздела, посвященного аналитической геометрии. Объем сообщаемых знаний по теме «Метод координат на плоскости» должен быть минимальным (так, нам кажется, что понятие о конических сечениях бесспорно должно остаться за рамками восьмилетней школы). Полученные знания могут иллюстрироваться на занятиях простыми задачами, не превышающими по трудности следующих: «Найти множество точек, разность квадратов расстояний которых от двух точек имеет фиксированное значение» (прямая) или «Найти множество точек, сумма квадратов расстояний которых от двух точек имеет фиксированное значение» (окружность),— спешим только подчеркнуть, что эти примеры касаются лишь сопровождающих курс задач и никак не должны включаться в число подлежащих запоминанию теорем!



Черт. 3

Основную часть курса геометрии в старших классах должно, как нам кажется, составить изучение стереометрии, широко использующее метод координат и элементы векторного исчисления. То обстоятельство, что использование алгебры векторов делает многие «трудные» стереометрические теоремы почти очевидными, является, на наш взгляд, лишним основанием проходить именно эти доказательства: не следует пытаться развивать математические способности учащихся за счет запрещения наиболее простых и естественных путей решения той или иной задачи [10]. Так, теорема о том, что прямая ON, перпендикулярная двум прямым OA и OB плоскости, перпендикулярна и каждой другой прямой OC этой плоскости (черт. 4), следует из того, что каждый вектор $\overline{OC}$, принадлежащий рассматриваемой плоскости, может быть выражен в виде линейной комбинации векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$; поэтому из равенств $\overline{ON}\cdot\overline{OA}=0$ и $\overline{ON}\cdot\overline{OB}=0$ следует и равенство $\overline{ON}\cdot\overline{OC}=0$. Отсюда сразу следует и «теорема о трех



Черт. 4

перпендикулярах» школьного курса геометрии. Большое место в курсе геометрии в старших классах средней школы должно, по нашему мнению, занимать решение стереометрических задач с применением тригонометрии; при этом также может быть с успехом использована алгебра векторов.

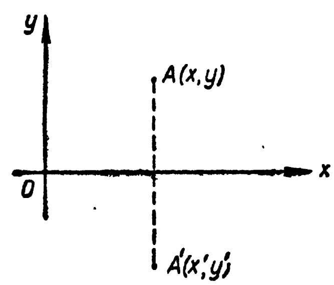
Несколько менее безусловной представляется желательность в старших классах средней школы темы, посвященной геометрическим преобразованиям. Однако подытожить определенным образом относящиеся сюда знания, полученные учащимися в восьмилетней школе, было бы бесспорно полезно.

[10] Именно поэтому нам кажется в корне порочной аргументация тех защитников чисто арифметических методов решения вычислительных задач, которые утверждают, что привлечение алгебраических уравнений лишает эти задачи интереса, делая их чрезмерно легкими.

Содержание раздела, посвященного геометрическим преобразованиям, может быть следующим. Прежде всего в старших классах естественно говорить о преобразованиях в с е й п л о с к о с т и, в то время как в восьмилетней школе можно ограничиться рассмотрением преобразования ф и г у р. Этот новый подход к самому понятию преобразования для начинающего может представить некоторые трудности (см. статью А. Н. К о л м о г о р о в а в № 2 журнала «Математика в школе» за этот год); поэтому важно, чтобы учащиеся к моменту прохождения этой темы владели уже координатным методом и могли записать, скажем, симметрию относительно оси x-ов в виде системы равенств

$$x'=x, \quad y'=-y$$

(черт. 5). Произвольные д в и ж е н и я естественно определить здесь как *преобразования, не меняющие расстояний между точками*; аналогично этому п р е о б р а з о в а н и я п о д о б и я определяются как *преобразования, сохраняющие отношения расстояний.*



Черт. 5

Из определения движения вытекает, что оно полностью определяется тем, в какие точки перешли три заданные точки, не принадлежащие одной прямой; отсюда легко выводится, что каждое движение можно осуществить с помощью нескольких (не более трех!) последовательных осевых симметрий. Если определить также движения 1-го рода (сохраняющие ориентацию фигур), то отсюда сразу вытекает т е о р е м а Ш а л я: *все движения 1-го рода представляют собой повороты или параллельные переносы.* Наконец, наряду со сжатием к точке (гомотетией) следует рассматривать и с ж а т и е к п р я м о й; другая возможность реализации того же круга идей заключается в изучении п а р а л л е л ь н о й п р о е к ц и и пространства и плоскости на плоскость, важной и в связи с задачами начертательной геометрии (метод Монжа). В обоих случаях появляется ценная возможность расширить круг изучаемых в средней школе кривых (традиционно включающий параболу и гиперболу) также и за счет эллипса. При этом из определения эллипса как линии, получаемой из окружности сжатием к прямой или параллельным проектированием, весьма естественно вытекают многие важные его свойства.

Из писем и заметок

Э. А. ЯСИНОВЫЙ (г. Куйбышев)

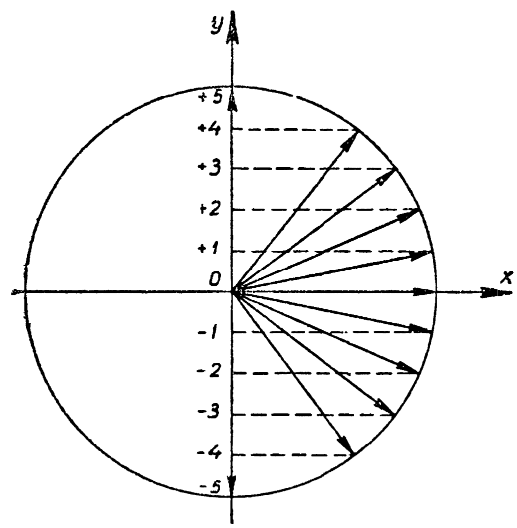
ОБ ИЗМЕНЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В учебнике С. И. Новоселова[1] монотонность функций рассматривается сначала для четвертей круга, затем четверти объединяются в более крупные промежутки монотонности. Монотонность функций $\sin x$ и $\cos x$ доказывается на основании теоремы о хордах и стягиваемых ими дугах и о хордах и их расстояниях от центра.

Мы считаем, что целесообразнее рассматривать монотонность сразу для более крупных промежутков, а не для четвертей, и при доказательстве использовать числовые шкалы: для $\sin x$ и $\cos x$ — на осях координат, для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — на прямых, параллельных осям координат.

Покажем примерное изложение рассматриваемого вопроса.

Изменение синуса угла. Пусть вектор длиной, например, в 5 единиц вращается в положительном направлении в промежутке от $-90°$ до $+90°$. Рассмотрим несколько положений этого вектора, соответствующих случаям, когда векторы равны -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5 (черт. 1). Используя определение синуса угла, можем сделать следующие выводы: если угол возрастает в промежутке от $-90°$ до $+90°$, то синус угла будет возрастать, принимая значения от -1 до 1; если угол возрастает от $90°$ до $270°$, то синус угла убывает от 1 до -1. С дальнейшим возрастанием угла от $270°$ до $270° + 180°$ синус будет изменяться так же, как и в промежутке от $-90°$ до $+90°$. Вообще, в каждом из промежутков



Черт. 1

от $-90° + 360° \cdot m$ до $+90° + 360° \cdot m$ с возрастанием угла растет и синус от -1 до 1, а в каждом из промежутков от $90° + 360° \cdot m$ до $270° + 360° \cdot m$ с возрастанием угла синус убывает от 1 до -1.

Изменение косинуса угла. Пусть вектор длиной, например, в 9 единиц вращается в положительном направлении в промежутке от 0° до 180°. Зафиксируем несколько положений этого вектора, соответствующих случаям, когда абсциссы векторов равны, например, 9; 8; 7; 6; ...; -6; -7; -8; -9 (черт. 2).

Используя определение косинуса угла, убеждаемся в том, что при возрастании угла в промежутке от 0° до 180° косинус

[1] С. И. Новоселов, Тригонометрия. Учебник для средней школы, Учпедгиз, М.