АЛГЕБРА В НАЧАЛО

Предисловие

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Предлагаемая книга „Элементы алгебры и анализа" значительно разнится от моей „Элементарной алгебры", переизданной в переработанном виде в 1923 году.

Различие это троякого рода:

во-первых, весь материал заново переработан с целью, главным образом, его упрощения и лучшего распределения;

во-вторых, настоящая книга содержит в себе элементы анализа бесконечно-малых, с его применениями к вопросам элементарной геометрии и начальной механики, и краткие сведения по аналитической геометрии, без которых элементарный курс математики был бы неполным;

в-третьих, в конце книги помещены некоторые дополнения к обычному курсу алгебры, напр, теория соединений, бином Ньютона, однозначность первых четырех алгебраических действий и другие.

Укажу сначала главнейшие изменения первого рода, причем буду держаться той последовательности в какой материал распределен в предлагаемой книге.

Изложение относительных чисел по возможности упрощено и поставлено раньше понятия об уравнении, чтобы при решении уравнений иметь возможность не стесняться невозможностью вычитания.

Изложение так называемых „алгебраических действий" (тождественных преобразований) проведено теперь более индуктивным путем, чем прежде, и местами сокращено.

Глава „Алгебраические дроби" значительно упрощена (напр.§ 77—основное свойство дроби, § 83—умножение дробей, и др). Равным образом упрощено изложение отношений и пропорций; все оно ведется теперь ближе к арифметическим понятиям.

В главе этой сделано небольшое добавление о производных пропорциях (§ 98), с которыми приходится иметь дело в геометрии, а также указано геометрическое применение свойства равных отношений (к установлению пропорциональности между периметрами и сходственными сторонами подобных многоугольников).

В §§ 103 и 105 выражение формулой пропорциональности (прямой и обратной) сделано более конкретно, чем прежде.

Подробнее изложено о графике двучлена первой степени и о графическом решении уравнения.

Обстоятельнее развито понятие о равносильности уравнений, получаемых из данного уравнения посредством прибавления к его частям одного и того же числа или посредством умножения частей на одно и то же число (§§ 120—124)

Добавлено графическое истолкование некоторых случаев решения уравнения $ax = b$ (§133). Добавлен параграф (134) о буквенных уравнениях.

О целью лучшего уяснения процесса извлечения корня предварительно указано сокращенное возвышение в квадрат целого числа (§ 157).

Значительно упрощено объяснение извлечения квадратного корня из чисел. Теперь все изложение ведется чисто арифметическим путем, без посредства уравнения с 2 неизвестными, как это делалось в моей прежней алгебре, и без предварительного установления свойства числа десятков корня и свойства числа его единиц. Для нахождения приближенных квадратных корней дано более практичное правило (§ 177).

В конце книги приложены таблицы квадратных корней четырехзначных чисел как целых, так и дробных; объяснение их помещено в тексте книги (§ 178). Таблицы эти взяты мною из известного английского учебника: „Elementary algebra by Godfrey and Siddons (1924 г.). Они значительно сокращают время и труд при вычислениях и служат хорошим пособием при разъяснении некоторых статей алгебры (напр., при построении графика показательной функции $y = 10^x$ при помощи частных значении этой функции при $x = {}^{1}/_{2}$, ${}^{1}/_{4}$, ${}^{1}/_{8}$, ${}^{1}/_{16}$, и т. д. (§ 263).

В главе о приближенных вычислениях, помимо более конкретного изложения, добавлены еще правила сокращенного умножения и сокращенного деления, позволяющие сравнительно быстро находить приближенное произведение и частное с желаемой степенью точности.

Целая функция 2-й степени и ее графическое изображение рассмотрены в предлагаемой книге значительно подробнее, чем прежде (§§ 220—228).

При изложении свойств функции $y = x^2$, $y = x^3$ и других (показательной, логарифмической и пр.) прежде всего решаются вопросы о возможности функции, об ее однозначности или многозначности и (до некоторой степени) об ее непрерывности, и только после разрешения этих вопросов указывается построение их графиков по таблице частных значений.

Вместо обратной функции $y = \sqrt[3]{x}$ рассматривается более простая функция $y = \sqrt{x}$, на которой впервые для читателя обнаруживается свойство многозначности. При этом наглядно устанавливается соотношение между графиком прямой функции и графиком ей обратной (§ 182); соотношение это в дальнейшем позволяет быстро и легко найти график логарифмической функции по графику показательной и вообще график обратной функции по графику прямой.

При решении иррациональных уравнений более наглядно, чем прежде, разъясняется причина появления посторонних решений (§ 231).

Свойства бесконечных прогрессий, а также первое понятие о пределе изложены в этой книге более просто, чем прежде (§§ 250—254).

Сокращено и лишено абстрактности изложение показателей отрицательных и дробных (§§ 256—261).

Добавлена глава о некоторых свойствах степени с рациональными показателями для лучшего усвоения свойств показательной и логарифмической функции (§ 262),

Для лучшей иллюстрации свойств десятичных логарифмов В графикам функций $y = 2^x$ и $y = ({}^{1}/_{2})^{x}$ (и им обратных) добавлены еще графики функций $y = 10^x$ и $y = \log_{10} x$.

С целью упрощения весь отдел о логарифмах переделан заново.

Описание таблиц пятизначных логарифмов заменено описанием таблиц четырехзначных, пользование которыми значительно проще и которые тем не менее вполне достаточны для практических целей вычисления.

В конце книги приложены и самые таблицы четырехзначных логарифмов и антилогарифмов.

Таким образом, изменения, внесенные теперь в изложение прежнего алгебраического материала, имеют целью главным образом отвлеченность заменить конкретностью, дедуктивные выводы иллюстрировать индуктивно и тем самым облегчить читателю усвоение учебного материала.

Переходя теперь к тем отделам этой книги, которые можно назвать новыми (элементы анализа и аналитической геометрии) сравнительно с прежним материалом алгебры, надо прежде всего заметить, что содержание этих отделов (а также и элементов алгебры) находится в соответствии с появившимися в 1925 году программами-минимум единой трудовой школы, изданными Научно-методическим советом Ленинградского губон о. Статьи эти следующие:

1. Основные свойства пределов и применение их к вопросам элементарной геометрии (определение длины окружности, площади круга, боковых поверхностей цилиндра и конуса, объемов пирамиды, цилиндра, конуса и шара).

2. Начальные сведения о производных функциях и их применение к алгебраическому анализу (признаки возрастания и убывания функций, нахождение maximum и minimum, определение вогнутости и выпуклости кривых, исследование целых функций 2-й и 3-й отепеней и пр.) и к вопросам элементарной механики (нахождение скорости по данному закону пространства и нахождение ускорения по данному закону скорости, с иллюстрацией этих применений примерами свободного падения тел и движения тела, брошенного вертикально вверх).

3. Элементарные сведения по аналитической геометрии (уравнения прямой, окружности, эллипса, гиперболы и параболы) с указанием главнейших свойств кривых 2-го порядка.

4. Понятие о первообразной функции и ее применения в геометрии (нахождение объемов пирамиды, конуса, шарового сегмента) и в механике (нахождение пространства по данной скорости и скорости но данному ускорению).

Изложение всех этих статей я стремился выполнить возможно конкретнее и нагляднее, при посредстве большого количества чертежей (число их в книге равно 119): При этом пособиями мне, между прочим, служили:

C. Godfrey and A. W. Siddons. Elementary algebra (1924).

W. E. Paterson. School algebra (1924).

S. Bernard and J. M. Child. A new algebra.

Charles Davison. Higher algebra for colleges.

Dr. Josef Jacob. Arithmetik (1921).

Prof. Dr. G. Ulrich. Ausfuhrlisches Lehrbuch fur den Selbst-unterricht (1922). .

Prof. Dr. Chr. Schmehl. Die Algebra und algebraische Analysis.

Behrendsen-Gotting.Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsatzen.

Richard Sappantschisch. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

И. другие.

В приложении я поместил еще краткое изложение теории соединений и бинома Ньютона и некоторые другие дополнительные статьи, полезные для тех лиц, которые желают углубить и расширить свои сведения по элементарной математике.

Впоследствии я намерен дополнить мои „Элементы" еще и систематически подобранными упражнениями и задачами.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

Пятое издание подразделено на 2 части. К первой части отнесены „Элементы алгебры" с приложением четырехзначных таблиц квадратных корней, логарифмов и антилогарифмов; ко второй — „Элементы анализа" вместе с некоторыми дополнительными статьями по алгебре.

Сверх того в пятом издании книги введены следующие изменения и дополнения:

1. Сделаны многочисленные исправления и улучшения; напр., в § 109 (часть первая) добавлено (мелким шрифтом) обобщение и уточнение доказательства того, что график прямой пропорциональной зависимости есть прямая линия; в §320 (часть 2-я) улучшено разъяснение недостаточности определения касательной, как такой прямой, которая с кривою имеет только одну общую точку, и многие другие.

2. Решение неравенства второй степени (с одним неизвестным), помещавшееся в предыдущих изданиях в „добавлениях" (в конце книги), перенесено теперь в главу о трехчлене второй степени (часть 1-я, § 228,2), где оно является более уместным.

3. Равным образом, „Соединения" и „Бином Ньютона", помещавшиеся в „добавлениях", отнесены теперь к „Элементам алгебры" и помещены в конце первой части.

4. Совершенно переработано доказательство свойства касательной (что она есть биссектриса угла, образованного...) к эллипсу, к гиперболе и к параболе (часть вторая, §§ 360, 365 и 369). В настоящем издании это доказательство исходит непосредственно из общего определения касательной как предельного положения секущей, тогда как в предыдущих изданиях доказательство основывалось на неверном допущении, что прямая, имеющая с кривой только одну общую точку, есть касательная к этой кривой.

5. Из добавлений теперь выпущена имеющая только теоретическое значение глава: „ Освобождение уравнения от знаков радикала помощью неопределенных коэффициентов*. Она заменена теперь более важными для курса алгебры главами: „Общие формулы решения системы двух уравнений первой степени" (часть, 2-я, § 396 и след.), „Понятие о комплексных числах" (§ 400 и след.) и другими.

6. К настоящему изданию изготовлены мною многочисленные упражнения и задачи,

расположенные сообразно порядку следования параграфов текста книги. Упражнения к „Элементам алгебры", ввиду их значительного объема (более 1200 №№), выделены в. особую книжку под названием: Упражнения и задачи к „Элементам алгебры". Упражнения же к „Элементам анализа" помещены в конце второй части.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Глава первая. **Алгебраическое знакоположение.**
Глава вторая.**Свойства первых четырех арифметических действий.**
Глава третья.**Положительные и отрицательные числа (относительные числа).**
Глава четвертая. **Понятие об уравнении.**

Глава первая.

Алгебраическое знакоположение.

1. Употребление букв.

а) Для выражения общих свойств чисел. Пусть мы желаем кратко выразить на письме, что произведение двух чисел не изменится, если мы поменяем местами множимое со множителем. Тогда, обозначив одно число буквой a, а другое буквой b, мы можем написать равенство:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

или короче: $ab = ba$, условившись раз навсегда, что если между двумя буквами, написанными рядом, не стоит никакого знака, то это значит, что между ними подразумевается знак умножения.

Так поступают всегда, если желают выразить, что некоторое свойство принадлежит не каким-нибудь отдельным числам, а всяким числам.

Буквы для обозначения чисел берутся обыкновенно из латинского (или французского) алфавита.

б) Для сокращенного выражения правила, посредством которого можно решать задачи, сходные по условиям, но различающиеся только величиной данных чисел. Положим, напр., мы решаем задачу: найти 3% числа 520. Тогда рассуждаем так: так как 1% какого-нибудь числа составляет $^1/_{100}$ этого числа, то

1% числа 520 составляет $^{520}/_{100} = 5,2$,

а 3% „ „ „ $^{520}/_{100} \cdot 3 = 15,6$

Решив несколько подобного рода задач, мы замечаем, что для нахождения процентов какого-нибудь числа достаточно разделить это число на 100 и результат умножить на число процентов. Чтобы выразить это наглядно, мы предложим задачу в таком общем виде: найти p% числа a.

Задачу решаем так:

1% числа a составляет $^a/_{100}$,

p% „ „ „ $^a/_{100} \cdot p$

Обозначив искомое число буквой x, мы можем написать равенство:

$$x = {}^{a}/_{100} \cdot p\ ,$$

из которого прямо видно, как можно находить проценты от любого данного числа.

Подобно этому, если мы желаем кратко выразить правило умножения или деления дроби на дробь, мы обозначаем дроби буквами: ${}^{a}/_{b}$ и ${}^{c}/_{d}$ и пишем равенства:

$$ {}^{a}/_{b} \cdot {}^{c}/_{d} = {}^{ac}/_{bd}\ ; \qquad {}^{a}/_{b} : {}^{c}/_{d} = {}^{ad}/_{bc}$$

Заметим, что ***всякое равенство, выражающее посредством букв и знаков действий какое-нибудь предложение, касающееся чисел, называется формулой.***

Укажем еще некоторые арифметические формулы.

Если буквой n обозначим любое целое число, то произведение $2n$ выразит любое четное число.

Так, если вместо n будем подставлять целые числа: 1, 2, 3, 4, ..., то произведение $2n$ даст: 2 • 1 = 2; 2 • 2 = 4; 2 • 3 = 6; 2 • 4 = 8, и т. д.

При n целом сумма $2n + l$ выражает любое нечетное число; так, если n = 0, 1, 2, 3, 4,..., то сумма $2n + l$ даст: 2 • 0+1=0 + 1 = 1; 2 • 1 + 1 = 2 + 1=3; 2 • 2 + 1 = 4 + 1 = 5, и т. д.

Если в каком-нибудь двузначном числе на месте десятков стоит цифра a, а на месте единиц цифра b, то всех единиц в таком числе будет $10a + b$. Напр., в числе, у которого деоят-ков 7, а простых единиц 9, всего единиц будет 10 • 7 + 9 = 70 + 9 = 79.

Равным образом, если в трехзначном числе на месте сотен стоит цифра a, на месте десятков — цифра b и на месте единиц — цифра c, то всех единиц в таком числе должно быть $100a + 10b + c$. Напр., если в числе 3 сотни, 5 десятков и 8 единиц, то всего единиц оно содержит 100 • 3 + 10 • 5 + 8 = 358.

Приведем еще некоторые формулы, известные из геометрии.

Если основание и высоту прямоугольника измерим одной и той же линейной единицей и для основания получим число b, а для высоты — число h, то площадь **s** этого прямоугольника, выраженная в соответствующих квадратных единицах, будет $s = bh,$.

При тех же обозначениях для треугольника получим формулу $s = {}^{1}/_{2}\, bh$, для трапеции $s = {}^{1}/_{2}\, (b_1 + b_2)h$, где b_1 и b_2 означают числа, измеряющие в одной и той же единице оба основания трапеции; для площади круга мы пишем формулу $s = \pi R^2$, где R — радиус, π — отвлеченное число, означающее отношение длины окружности к ее диаметру (оно равно приблизительно 3,14); для объема **V** шара применяется формула $V = {}^{4}/_{3}\, \pi R^3$ и т. п.

2. Алгебраическое выражение.

Если несколько чисел, обозначенных буквами (или буквами и цифрами), соединены между собой посредством знаков, указывающих, какие действия надо произвести над числами, то такое обозначенпе называется алгебраическим выражением.

Таковы, напр., обозначения: $^{a}/_{100} \cdot p$; ab ; $2x+1$;

Для краткости речи мы часто будем, вместо „алгебраическое выражение", говорить просто „выражение".

Вычислить какое-нибудь выражение для данных численных значений букв значит подставить в него на место букв эти численные значения и произвести все указанные в выражении действия; число, получившееся после этого, называется численной величиной алгебраического выражения для данных численных значений букв. Так, численная величина выражения $^{a}/_{100} \cdot p$ при p= 3 и a = 520 равна $^{520}/_{100} \cdot 3 = 5{,}2 \cdot 3 = 15{,}6$.

3. Действия, рассматриваемые в алгебре, следующие: сложение, вычитание, умножение; деление, возвышение в степень и извлечение корня. Что такое первые четыре действия, известно из арифметики. Пятое действие — возвышение в степень — представляет собой особый случай умножения, когда перемножаются несколько одинаковых сомножителей. Произведение таких сомножителей называется степенью, а число их — показателем степени. Если какое-нибудь число берется сомножителем 2 раза, то произведение называется второй степенью; если какое-нибудь число берется сомножителем 3 раза, то произведение называется третьей степенью, и т. д.

Так, вторая степень 5 есть произведение $5 \cdot 5$ т. е. 25;
третья степень $^{1}/_{2}$ есть произведение $^{1}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2}$ т. е. $^{1}/_{8}$ и т. п.
Первою степенью числа принято называть само это число.

Вторая степень называется иначе квадратом, а третья степень — кубом. Причина этих названий состоит в том, что произведение $a \cdot a$ выражает (в квадратных единицах) площадь квадрата со стороною в a линейных единиц, а произведение $a \cdot a \cdot a$ выражает (в кубических единицах) объем куба с ребром в a линейных единиц.

Об извлечении корня мы пока говорить не будем, так как это действие в начале алгебры не рассматривается.

4. Знаки, употребляемые в алгебре.

Для обозначения первых четырех действий в алгебре употребляются те же знаки, как и в арифметике, только знак умножения, как мы уже говорили, обыкновенно не пишется, если оба сомножителя, или один из них, обозначены буквами. Напр., вместо $a \times b$ (или вместо $a \cdot b$) пишут просто ab и вместо $3 \cdot a$ пишут $3a$. Как знак деления, безразлично, употребляется или двоеточие (:), или черта (горизонтальная или наклонная); так, выражения:

$$a : b, \ \frac{a}{b}, \ a/b$$

означают одно и то же, а именно, что число a делится на другое число b.

Возвышение в степень принято сокращенно выражать так: пишут число, которое требуется повторить сомножителем, а над ним, с правой стороны, ставят другое число — показатель степени, выражающий, сколько раз возвышаемое число должно быть повторено сомножителем. Так, 3^4 (читается: три в четвертой степени) заменяет собою подробное обозначение: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Если при числе не стоит никакого показателя степени, то можно подразумевать при нем показателем единицу; напр., a означает то же самое, что и a^1, так как первою степенью числа принято называть само это число.

Равенство чисел обозначается знаком = , а неравенство или знаком > (больше) или знаком < (меньше). Напр., если написано

$$5 + 2 = 7; \quad 5 + 2>6; \quad 5 + 2<10,$$

то это значит: 5 + 2 равно 7; 5 + 2 больше 6; 5 + 2 меньше 10. Для указания порядка действий употребляются скобки; например, выражение:

$$a\{ b - [c + (d - e)]\}$$

показывает, что действия над числами a, b, c, d и e должны быть выполнены в таком порядке: из d вычитается e, полученная разность прикладывается к c, полученная сумма вычитается из b и на эту разность умножается a; значит, сначала производятся действия, указанные внутри малых скобок ( ), потом действия, указанные внутри ломаных скобок [ ], затем действия, стоящие внутри фигурных скобок { }.

Замечание. Для сокращения письма принято в некоторых случаях скобки не ставить, а только подразумевать их. Напр., скобки не ставятся при обозначении последовательных сложений, вычитаний и умножений; так,

$$\text{вместо } [(a + b) + c] + d \text{ пишут } a + b + c + d;$$

$$\text{вместо } [(a - b) - c] - d \text{ пишут } a - b - c - d;$$

$$\text{вместо } [(ab)c]d \text{ пишут } abcd;$$

В этих случаях порядок действий указывается самим выражением (слева направо).

В некоторых других случаях также принято скобки опускать; мы сб этом скажем тогда, когда представится надобность.

5. Исторические сведения. В древние времена математики (главным образом греческие, индусские и арабские) очень мало пользовались математическими знаками (символами) для обозначений действий над числами. Математические предложения выражались большею частью словами и писались посредством тех же письменных знаков, которые служили для выражения речи вообще. В XV—XVI столетиях стали появляться особые знаки действий и отношений. Раньше других были введены знаки + и —, появившиеся впервые в рукописи великого итальянского живописца и архитектора *Леонардо да-Винчи*, а затем и в печатной арифметике немецкого математика *Видмана* (в 1489 г.). Знак умножения (x) был введен (в 1631 г.) английским математиком *Оутрехтом.*

Для обозначения равенства введен был (в 1557 г.) английским алгебраистом *Рекордом* знак = ; „ибо,— как писал он,— никакие два предмета не могут быть более равными., чем две параллельные линии одинаковой длины". Другой английский математик *Херриот* ввел знаки > и < (в 1631 г.) и точку как знак умножения.

Знаменитым немецким математиком *Лейбницем* (в 1694 г.) впервые введен знак (:) для обозначения деления, которое раньше обозначалось чертою.

Скобки ( ), [ ] и { }встречаются впервые в трудах фламандского математика *Жирара* (в 1629 г.). Величайший французский математик XVII столетия *Франциск Вьета* вместо скобок употреблял черту, которую он ставил над выражением, рассматриваемым как одно целое. Он же стал употреблять буквы для обозначения чисел (впервые буквы появились в работах немецкого монаха *Иеронима Неморариуса* в XII столетии).

Знаменитый французский философ и математик *Рене Декарт* в XVII столетии ввел в употребление для обозначения неизвестных чисел последние буквы алфавита и для обозначения данных чисел первые буквы алфавита.

К началу XVIII века алгебраическое знакоположение достигло своего полного развития и с тех пор почти не изменялось (лишь с развитием науки добавлены были некоторые новые обозначения).

Глава вторая.

Свойства первых четырех арифметических действий.

6. Сложение.

а) Возьмем сумму нескольких слагаемых, напр. 7 + 3 + 2. Мы можем производить сложение или в том порядке, в каком слагаемые написаны: 7 + 3 = 10; 10 + 2 = 12, или же можем переставить слагаемые, напр., так: 3 + 2 + 7, и произвести сложение в этом порядке: 3 + 2 = 5; 5 + 7 = 12. Как бы мы ни изменяли порядок данных слагаемых, сумма их остается одна и та же, именно 12.

Это свойство сложения называется ***переместительным***, так как оно состоит в том, что ***сумма не изменяется от перемещения слагаемых.***

Если обозначим слагаемые буквами a, b, c,..., то переместительное свойство сложения мы можем выразить такими равенствами:

$$a + b + c +\ldots = b + c + a +\ldots= c + a + b +\ldots,$$

где ряд точек означает, что слагаемых может быть и более трех.

б) Возьмем ту же сумму 3 + 7 + 2. Вместо того, чтобы вычислять ее так, как мы это делали сейчас, т. е. к первому слагаемому прибавить второе и к полученной сумме прибавить третье, мы можем взять из этой суммы какие угодно два слагаемые, напр. 7 и 2, сложить их: 7 + 2 = 9 и полученное число прибавить к первому слагаемому: 3 + 9 = 12.

Свойство это называется ***сочетательным***, так как оно состоит в том, что ***сумма не изменяется от соединения (от сочетания) каких-либо слагаемых в одно число***.

В применении к трем слагаемым это свойство (в соединении с переместительным свойством) можно выразить такими равенствами:

$$a + b + c = a + (b + c) = b + (a + c) = c + (a + b),$$

показывающими, что мы можем сложить какие-нибудь два числа и затем их сумму сложить с третьим числом.

в) Пусть требуется к числу 325 прибавить число 243, т. е. прибавить сумму 200 + 40 + 3. Для этого можно к 325 приложить отдельно 200, потом 40, затем 3. Значит, ***чтобы к какому-нибудь числу приложить сумму, можно к .тому числу приложить каждое слагаемое отдельно одно за другим***. Это можно выразить такою формулою:

$$a + (b + c + d +...) = a + b + c + d +...$$

Полезно вспомнить еще следующее свойство сложения:

г) ***Если какое-нибудь слагаемое увеличим (или уменьшим), то сумма увеличится (или уменьшится) и притом на столько же.***

7. Вычитание.

а) Пусть из 849 надо вычесть 325, т. е. вычесть сумму 300 + 20 + 5. Для этого можно вычесть из 849 отдельно 300, 20 и 5. Значит, ***чтобы из какого-нибудь числа вычесть сумму, можно вычесть из этого числа каждое слагаемое отдельно одно за другим.***

Это свойство можно выразить такою формулою:

$$a — (b + c + d +...) = a — b — c — d —...$$

Полезно вспомнить еще следующие свойства вычитания. Так как уменьшаемое можно всегда рассматривать как сумму, а вычитаемое и остаток как слагаемые, то

б) ***если увеличим (или уменьшим) уменьшаемое, то разность увеличится (или уменьшится) и притом на столько же;***

в) ***если увеличим (или уменьшим) вычитаемое, то разность уменьшится (или увеличится) и притом на столько же;***

г) ***если увеличим (или уменьшим) на одно и то же число уменьшаемое и вычитаемое, то разность не изменится.***

8. Умножение

а) Умножение, как и сложение, обладает переместительным свойством, т. е. ***произведение не изменяется от перемещения сомножителей.***

Так:

$$2 • 5 • 7 = 5 • 7 • 2 = 7 • 5 • 2 = ...$$

$$^3/_4 • ^1/_2 • 5 = ^1/_2 • 5 • ^3/_4 = 5 • ^3/_4 • ^1/_2 = ...$$

Вообще:

$$abc = acb = bac = bca =...$$

б) Так же, как и сложение, умножение обладает и сочетательным свойством: произведение не изменится, если какие-либо сомножители будут заменены их произведением.

Так, произведение 7 • 2 • 5 не изменится, если мы сомножители 2 и 5 заменим их произведением, т. е. вместо того, чтобы вычислять это произведение в том порядке, в каком написаны сомножители: 7 • 2 • 5 = 14 • 5 = 70, станем вычислять его в порядке, указанном такими скобками 7 • (2 • 5) = 7 • 10 = 70.

Действительно, произведение 7 • 2 • 5 означает, что 7 повторяется слагаемым 2 раза и полученная сумма повторяется затем слагаемым еще 5 раз; значит, произведение можно записать так:

$$(7 + 7) + (7 + 7) + (7 + 7) + (7 + 7)+ (7 + 7).$$

Но вместо того, чтобы прибавлять сумму 7 + 7, мы может прибавить 7 и затем еще в другой раз 7; значит, написанная нами сумма должна быть такая же, как и

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7,$$

т. е. она должна равняться 7 • 10. В применении к произведению трех сомножителей сочетательное свойство (в соединении с переместительным) можно выразить такими равенствами:

$$abc = a (bc) = b (ac) = c (ab).$$

в) Пусть требуется умножить 526 на 3, другими словами, требуется умножить сумму 500 + 20 + 6 на 3. Для этого, как мы знаем, можно умножить на 3 отдельно каждое слагаемое и результаты сложить. Подобно этому, чтобы умножить сумму $5 + {}^3/_4 +2$ на 8 можно умножить на 8 отдельно 5, $^3/_4$ и 2 и результаты сложить:

$$(5+ {}^3/_4+2) \bullet 8 = 5\bullet 8 + {}^3/_4 \bullet 8 + 2 \bullet 8 = 40 + 6 + 16 = 62.$$

Точно так же, если требуется умножить разность на какое-нибудь число, то для этого можно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй. Например:

$$(12— 10) \bullet 3 = 12 \bullet 3 — 10 \bullet 3 = 36 — 30 = 6;$$

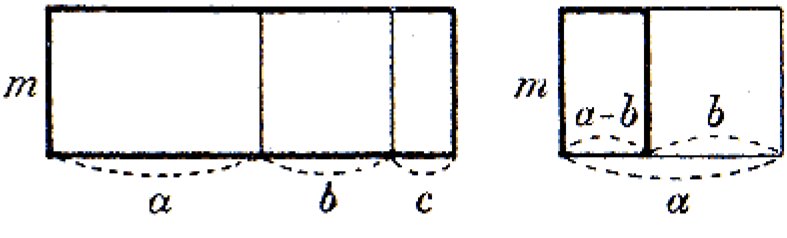
или

$$(2^1/_2 — {}^3/_4) \bullet 8 = 2^1/_2 \bullet 8— {}^3/_4 \bullet 8 = 20 — 6=14.$$

Таким образом, ***чтобы умножить сумму (или разность) на какое-нибудь число, можно умножить на это число каждое слагаемое отдельно (или уменьшаемое и вычитаемое отдельно) и результаты сложить (или вычесть).***

Это свойство называется ***распределительным***, так как действие умножения, производимое над суммою или разностью, распределяется на каждое данное число в отдельности.

Распределительное свойство умножения можно наглядно объяснить геометрически так.



Возьмем четыре отрезка прямой: один в ***a*** единиц длины, другой в ***b***, третий в ***c*** и четвертый в ***m*** таких же единиц длины. Затем построим прямоугольники: один с основанием, равным ***a* + *b* + *c*** , а другой с основанием ***a* — *b*** высоту у того и у другого возьмем в ***m*** линейных единиц. Площадь первого прямоугольника равна произведению

(a+b+c)m, а второго — произведению ***(a — b)m***. Из чертежа непосредственно усматриваем, что первый прямоугольник есть сумма трех прямоугольников с площадями ***am***, ***bm*** и ***cm***, а второй прямоугольник составляет разность двух прямоугольников с площадями ***am*** и ***bm***; следовательно:

$$(a+b+c)m = am + bm + cm \quad \text{и} \quad (a - b)m = am - bm\ .$$

Так как произведение не меняется от перемены мест сомножителей, то написанные сейчас равенства можно переписать так:

$$m(a+b+c) = m\,a + mb + m\,c \quad \text{и} \quad m(a - b) = ma - mb$$

что можио высказать словами таким образом: ***чтобы умножить какое-нибудь число на сумму (или на разность), можно умножить это число на каждое слагаемое отдельно (или на уменьшаемое и вычитаемое отдельно) и результаты сложить (или вычесть).***

г) Пусть надо умножить 7 на 30, т. е. на произведение 3 • 10. Для этого можно умножить 7 на 3 и полученный результат умножить на 10:

$$7 \bullet (3 \bullet 10)= 7 \bullet 3 \bullet 10.$$

Подобно этому

$$7 \bullet ({}^{3}/_{4} \bullet {}^{5}/_{6}) = 7 \bullet {}^{3}/_{4} \bullet {}^{5}/_{6}$$

и вообще:

$$a(bc) = abc$$

$$a\,(bcd) = abcd, \text{ и т. п.}$$

Значит, ***чтобы умножить какое-нибудь число на произведение, можно умножить это число сначала на первый сомножитель, потом полученное произведение умножить на второй сомножитель, затем на третий и т. д.***

д) Пусть требуется умножить произведение 2 • 5 • 8 на 10. Для этого можно умножить на 10 какой-нибудь один сомножитель, оставив другие без изменения:

$$(2 \bullet 5 \bullet 8) \bullet 10 = (2 \bullet 10) \bullet 5 \bullet 8 = 2 \bullet (5 \bullet 10) \bullet 8 = 2 \bullet 5 \bullet (8 \bullet 10);$$

получим во всех случаях одно и то же число 800.

Вообще: $(abc...)\ m = (am)\ bc... = a\ (bm)\ c... =...$

Значит, чтобы умножить произведение на какое-нибудь число, можно умножить на это число только один сомножитель, оставив все другие без изменения.

9. Деление.

Деление можно рассматривать как такое действие (обратное умножению), посредством которого по данному произведению и одному из сомножителей отыскивается другой сомножитель. Поэтому правильность деления всегда можно поверять умножением: если, умножив частное на делитель, получим делимое, то деление сделано правильно.

Напр., деление:

$$^{2}/_{3} : {}^{4}/_{5} = {}^{2 \cdot 5}/_{3 \cdot 4}$$

верно, так как $^{2 \cdot 5}/_{3 \cdot 4} \cdot {}^{4}/_{5} = {}^{2 \cdot 5 \cdot 4}/_{3 \cdot 4 \cdot 5}$, что по сокращении на 4 и на 5 дает делимое $^{2}/_{3}$.

Полезно вспомнить, что деление на какое-нибудь число равносильно умножению на обратное число; так:

$$^{2}/_{3} : {}^{4}/_{5} = {}^{10}/_{12} = {}^{5}/_{6} \quad \text{и} \quad {}^{2}/_{3} \cdot {}^{5}/_{4} = {}^{10}/_{12} = {}^{5}/_{6}$$

Из свойств деления укажем следующие:

а) ***Чтобы разделить сумму (или разность) на какое-нибудь число, можно разделить на это число каждое слагаемое (или уменьшаемое и вычитаемое) отдельно и результаты сложить (или вычесть).***

Так,

$$(20 + 8 + 2^{1}/_{2}) : 4 = 5 + 2 + {}^{5}/_{8}$$

в чем можно убедиться поверкой

$$(5 + 2 + {}^{5}/_{8}) \cdot 4 = 20 + 8 + {}^{5}/_{2}.$$

Подобно этому:

$$(30 — 0,6) : 3 = 10 — 0,2.$$

Вообще:

$$(a + b + c) : m = {}^{a}/_{m} + {}^{b}/_{m} + {}^{c}/_{m}$$

$$(a — b) : m = {}^{a}/_{m} — {}^{b}/_{m}$$

в чем легко убедиться поверкой.

Свойство это можно назвать распределительным свойством деления.

б) ***Чтобы разделить какое-нибудь число на произведение, можно разделить это число сначала на первый сомножитель, потом результат разделить на второй сомножитель, затем на третий и т. д.***

Так:

$$120 : (2 \cdot 5 \cdot 3) = [(120 : 2) : 5] : 3 = (60 : 5) : 3 = 12 : 3 = 4, \text{ или}$$

$$10 : ({}^{3}/_{4} \cdot {}^{5}/_{6}) = (10 : {}^{3}/_{4}) : {}^{5}/_{6} = {}^{40}/_{3} : {}^{5}/_{6} = {}^{240}/_{15} = {}^{80}/_{5} = 16$$

Вообще:

$$a : (bcd) = [(a : b) : c] : d,$$

в чем можно убедиться поверкою.

в) ***Чтобы разделить произведение на какое-нибудь число, можно разделить на это число какой-нибудь один сомножитель, оставив все другие без изменения.***

Так, чтобы разделить произведение 40•12•8 на 4, можно разделить на 4 один из сомножителей: 10 или 12, или 8:

$$(40 \cdot 12 \cdot 8) : 4 = 10 \cdot 12 \cdot 8 = 40 \cdot 3 \cdot 8 = 40 \cdot 12 \cdot 2.$$

Во всех (случаях получим одно и то же число 960. Вообще:

$$(abc) : m = {}^{a}/_{m}\, bc = a\, {}^{b}/_{m}\, c = ab\, {}^{c}/_{m}$$

в чем можно убедиться поверкою.

г) Укажем еще следующее важное свойство деления: Если делимое и делитель умножим (или разделим) на одно и то же число, то частное не изменится. Возьмем, напр., деление:

$$8 : 3 = {}^{8}/_{3}$$

и умножим делимое и делитель, положим, на 5; тогда получим новое частное:

0

$$(8 \cdot 5) : (3 \cdot 5) = {}^{8 \cdot 5}/_{3 \cdot 5}$$

которое по сокращении его на 5 даст прежнее частное ${}^{8}/_{3}$. Возьмем еще пример на деление дробей:

$${}^{3}/_{4} : {}^{5}/_{6} = {}^{3 \cdot 6}/_{4 \cdot 5}$$

Умножим делимое и делитель, положим, на ${}^{2}/_{7}$ тогда получим новое частное:

$$({}^{3}/_{4} \cdot {}^{2}/_{7}) : ({}^{5}/_{6} \cdot {}^{2}/_{7})$$

которое, согласно правилам умножения и деления дробей, равно

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} : \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 7)}{4 \cdot 7 \cdot (5 \cdot 2)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2},$$

что по сокращении на 2 и на 7 дает прежнее частное ${}^{3 \cdot 6}/_{4 \cdot 5}$

Вообще, какие бы числа a, b и m ни были, всегда $(am) : (bm) = a : b$, что можно написать и так:

$${}^{am}/_{bm} = {}^{a}/_{b}$$

Если частное не изменяется от умножения делимого и делителя на одно и то же число, то оно не изменяется и от деления делимого и делителя на одно и то же число, так как деление на какое-нибудь число равносильно умножению на обратное число.

10. Замечание. Свойство, которое мы сейчас указали, обыкновенно в арифметике высказывается так: ***если увеличим (или уменьшим) делимое и делитель в одинаковое число раз, то частное не изменится;*** значит, другими словами, этим выражалось, что частное не изменится, если мы умножим (или разделим) делимое и делитель на одно и то же целое число. Теперь мы видим, что оно не изменяется и от умножения (или деления) делимого и делителя на одно и то же какое угодно число, целое или дробное.

11. Применения свойств действий. Указанными свойствами действий можно пользоваться:

1) Для преобразования алгебраических выражений, напр.:

а) $a + b + a + 2 + b + a + 8$. Пользуясь сочетательным свойством сложения, сгруппируем слагаемые так: $(a + a + a) + (b + b) + (2 + 8)$

Эту сумму короче можно написать так: $\{a \cdot 3) + (b \cdot 2) + 10$, что, пользуясь переместительным свойством умножения, можно переписать так: $3a + 2b + 10$.

б) $a + (b + a)$. Чтобы к числу a прибавить сумму $(b + a)$, достаточно к a прибавить b и затем еще a; получим $a + b + a$. Сгруппируем слагаемые так: $(a + a) + b$. Эту сумму можно написать короче: $a \cdot 2 + b$ и еще короче: $2a + b$.

в) $a \cdot (3xxa)$. Чтобы умножить число a на произведение $3xxa$, достаточно a умножить на 3, полученный результат умножить на x и т. д. Получим $a3xxa$. Пользуясь сочетательным свойством умножения, сгруппируем сомножители так: $3(aa)\ (xx)$.

Это произведение можно короче написать: $3a^2x^2$.

г) $(^1/_5\ ax) \cdot 10$. Чтобы умножить произведение на 10, достаточно умножить на 10 один какой-нибудь сомножитель. Умножим $^1/_5$ на 10; тогда получим $2ax$.

д) $(a + x + 1) \cdot 3$. Согласно распределительному свойству умножения, получим: $(a \cdot 3) + (x \cdot 3) + (1 \cdot 3)$, что можно написать так: $3a + 3x + 3$.

е) $^{9ab}/_3$. Чтобы разделить произведение $9ab$ на 3, достаточно разделить на 3 один сомножитель 9; разделив, получим $3ab$.

2) Для разъяснения некоторых свойств чисел. Пусть, напр., требуется разъяснить следующее свойство трехзначного числа: если к какому-нибудь трехзначному числу припишем справа то же самое трехзначное число, то полученное таким образом шестизначное число делится без остатка и на 7, и на 11, и на 13. Возьмем, напр., число 756; приписав к нему с правой стороны 756, получим 756 756. Число это делится на 7, на 11 и на 13:

$$756\,750 : 7 = 108\,108; \quad 756\,756 : 11=68\,796; \quad 756\,756 : 13 = 58\,212.$$

Чтобы объяснить, почему это так, обозначим взятое трехзначное число одною буквой a. Приписать к этому числу с правой стороны такое же число — это все равно, что умножить a на 1000 (т. е. приписать к a три нуля) и затем прибавить к полученному произведению число a.

Например:

$$756\ 756 = 756\ 000 + 756 = 756 \cdot 1000 + 756.$$

Таким образом, шестизначное число, полученное указанным путем, должно быть равно сумме $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{1000} + \boldsymbol{a}$, что очевидно, составляет $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{1001}$. Чтобы разделить это произведение на какое-нибудь число, можно, как мы знаем, разделить на это число только один сомножитель 1001. Но число 1001 как раз равно произведению $7 \cdot 11 \cdot 13$; значит, оно делится и на 7, и на 11, и на 13. Поэтому и все шестизначное число разделится и на 7, и на 11, и на 13.

Глава третья.

Положительные и отрицательные числа (относительные числа).

I. Понятие о величинах, которые можно понимать в двух противоположных смыслах.

12. Задача 1. Термометр в полночь показывал 2 градуса, а в полдень 5 градусов. На сколько градусов изменилась температура от полуночи до полудня?

В этой задаче условия выражены недостаточно полно: надо еще указать: 2 градуса тепла или 2 градуса холода показывал термометр в полночь, т. е. вершина ртутного столбика в термометре была в полночь на 2 деления выше или на 2 деления ниже той черты, на которой стоит 0°; подобные же указания должны быть сделаны и относительно температуры в полдень. Если и в полночь, и в полдень термометр указывал тепло, то температура за этот промежуток времени повысилась от 2 до 5 градусов, значит, изменилась на 3 градуса; если же в полночь термометр указывал 2 градуса холода (ниже 0°), а в полдень 5 градусов тепла (выше 0°), то температура повысилась на 2 + 5 т. е. на 7 градусов. Могло случиться и так, что в полночь температура была 2° холода и в полдень 5° тоже холода (тогда температура не повысилась, а понизилась на 3 градуса), или так, что в полночь температура была 2° тепла, а в полдень 5° холода (тогда температура понизилась на 7 градусов).

В этой задаче речь идет о величине, имеющей направление: число градусов температуры можно отсчитывать вверх от нулевой черты термометра и вниз от нее. Принято температуру выше 0° (тепло) считать положительной и обозначать числом градусов со знаком +, а температуру ниже 0° (холод) считать отрицательной и обозначать числом градусов со знаком — (не будет недоразумения, если первое число брать совсем без знака).

Выразим теперь нашу задачу, примерно, так: термометр в полночь показывал —2°, а в полдень + 5°. На сколько градусов изменилась температура от полуночи до полудня? В таком виде задача получает вполне определенный ответ: температура повысилась на 2 + 5, т. е. на 7 градусов.

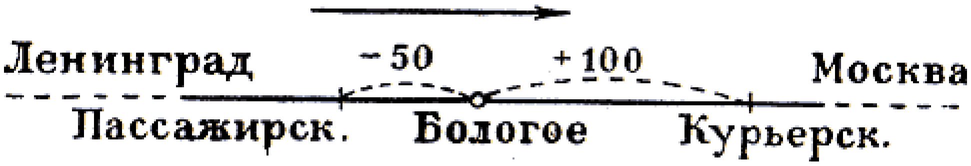
Задача 2. Когда скорый поезд Октябрьской железной дороги (соединяющей Москву с Ленинградом) находился на расстоянии 100 километров от станции Бологое (эта станция лежит приблизительно посредине между Москвой и Ленинградом), тогда пассажирский поезд этой дороги был на расстоянии 50 километров от Бологого. На каком расстоянии находились тогда эти два поезда друг от друга?

В таком виде задача эта представляется не вполне определенной: в ней не сказано, находились ли поезда по одну сторону от Бологого, например в сторону по направлению к Ленинграду, или же они были по разным сторонам от Бологого. Если первое, то расстояние между поездами было, очевидно, 100 — 50, т. е. 50 километров, а если второе, то это расстояние было 100 + 50, т.е. 150 километров. Значит, для того, чтобы эта задача была определенною, недостаточно задать величину расстояния поездов от Бологого, но еще нужно указать, в каком направлении эти расстояния надо считать от Бологого.

Мы имеем здесь опять пример величины, в которой, кроме ее размера, можно рассматривать еще направление,— это расстояние, считаемое по какой-нибудь линии (напр, по железной дороге) от определенного на ней места (напр, от станции Бологое). Расстояние это можно считать и в одном направлении (напр, к Москве), и в другом противоположном (напр, к Ленинграду). Обыкновенные (арифметические) числа недостаточны для выражения и размера, и направления расстояний. Условимся в подобных случаях поступать так.

Назовем какое-нибудь одно из двух направлений Октябрьской дороги (напр, направление от Ленинграда к Москве) положительным, а противоположное направление (от Москвы к Ленинграду)—отрицательным; сообразно этому расстояния, считаемые в положительном направлении, будем называть положительными расстояниями, а расстояния, считаемые в отрицательном направлении, будем называть отрицательными. Первые будем выражать числами со знаком + (или вовсе без знака), а вторые - числами со знаком —. Так, если поезд находится в месте, отстоящем на 100 километров от Бологого по направлению к Москве, то мы будем говорить, что его расстояние от Бологого равно +100 километрам (или просто 100 км); если же поезд находится, положим, на 50 км от Бологого по направлению к Ленинграду, то мы скажем, что его расстояние от Бологого равно —50 километрам. Здесь знаки + и —, конечно, не означают действий сложения и вычитания, а только служат условно для обозначения направлений.

Выразим теперь нашу задачу так: когда курьерский (скорый) поезд Октябрьской железной дороги находился от Бологого на расстоянии + 100 км (или просто 100 км), тогда пассажирский поезд этой дороги был от Бологого на расстоянии —50 км. Как велико было тогда расстояние между этими поездами?



Теперь задача выражена вполне точно, и ответ на нее получается определенный (см. чертеж, на котором стрелка указывает положительное направление дороги): поезда находились на расстоянии 100 + 50, т. е. 150 километров.

13. Другие величины, которые можно понимать в двух противоположных смыслах. Кроме величин, указанных в предыдущих задачах, многие другие также имеют направление, т. е. они могут быть рассматриваемы в двух противоположных смыслах, Таковы, например:

доход в противоположном смысле будет **расход,**

выигрыш „ „ „ „ **проигрыш**,

прибыль „ „ „ „ **убыток**,

имущество „ „ „ „ **долг** и т. п.

Если доход, выигрыш, прибыль, имущество... условимся считать величинами положительными и выражать их числами со знаком + (или без знака), то расход, проигрыш, убыток, долг... надо считать .величинами того же рода, но отрицательными, и выражать их числами со знаком —; тогда можно говорить, что расход есть отрицательный доход, проигрыш есть отрицательный выигрыш и т. д. При таком соглашении понятны будут, напр., такие словесные выражения: жилищное товарищество получило дохода с квартир: в январе +200 руб. в феврале + 150 руб., в марте —50 руб. (значит, в марте получился убыток 50 руб.); или такие: у старшего брата имущества было на 5000 руб., у среднего на 3000 руб., у младшего на —500 руб. (значит, у младшего брата не было имущества, а был долг в 500 руб.).

Должно, однако, заметить, что наряду с указанными величинами существует очень много других, в которых нельзя указать „направления"; напр., нельзя понимать в двух противоположных смыслах такие величины, как объем, площадь и многие другие.

14. Относительные числа. Числа, рассматриваемые в арифметике, служат для выражения таких величин, которых направление не рассматривается (когда, напр., интересуются знать только размер какого-нибудь расстояния, а не направления, по которому его надо считать). Числа же, рассматриваемые в алгебре, служат для выражения размера величин и их направления. Для этого величину, понимаемую в каком-нибудь одном смысле, выражают числом с предшествующим ему знаком +, а ту же величину, понимаемую в противоположном смысле, выражают числом с предшествующим ему знаком —.

Число с предшествующим ему знаком + (который, впрочем, может быть и опускаем) называется положительным; число с предшествующим ему знаком — называется отрицательным. Так, +10, + $^1/_2$, + 0,3 положительные числа, а — 8, — $^5/_7$, — 3,25 отрицательные числа. К числам присоединяют еще 0 (нуль), не относя его ни к положительным, ни к отрицательным. Выражения + 0,— 0 и просто 0 считают равносильными.

Числа положительные, отрицательные и нуль называются относительными числами в отличие от чисел обыкновенных (или арифметических), которые не имеют перед собой никакого знака.

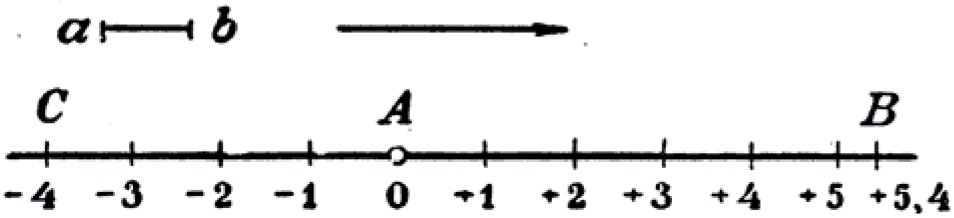
Абсолютною величиною относительного числа называется это число, взятое без знака; так, абсолютная величина числа —10 есть 10, абсолютная величина числа + 5 есть 5.

Два относительных числа считаются равными, если у них одинаковы абсолютные величины и знаки.

15. Изображение чисел помощью отрезков прямой. Отрезком прямой (см. чертеж) называется часть какой-нибудь прямой линии, ограниченная с обеих сторон, напр., с одной стороны точкой A, с другой точкой B.

В каждом отрезке можно различать: во-первых, длину его, во-вторых, направление, которое для данного отрезка может быть двоякое. Напр., во взятом нами отрезке можно различать направление или от точки A к точке B или, наоборот, от B к A. Если мы рассматриваем взятый отрезок в направлении от А к В, то точку А мы будем называть началом отрезка, а точку В - его концом.

Такими отрезками мы наглядно можем выражать относительные числа следующим образом. Возьмем какую-нибудь прямую (напр, горизонтальную) и условимся, какое из двух направлений этой прямой считать положительным .



Примем, напр., направление слева направо (указанное стрелкою) за положительное, тогда противоположное направление — справа налево — мы будем считать отрицательным. Далее, примем какую-нибудь длину ***ab*** (изображенную на чертеже) за единицу длины. Пусть теперь дано какое-нибудь положительное число, напр. + 5,4.

Возьмем на нашей прямой произвольную точку А и отложим вправо от нее 5,4 единиц длины, равных ***ab***. Тогда получим отрезок АВ, длина которого равна 5,4 единицы и направление положительное. Этот отрезок и выразит нам наглядно число + 5,4. Возьмем теперь какое-нибудь отрицательное число, напр. — 4. Чтобы изобразить его наглядно, отложим от той же точки А влево 4 единицы длины. Тогда получим отрезок АС, длина которого равна 4 единицам, а направление отрицательное; значит, этот отрезок выражает число —4.

Можно представить себе, что все относительные числа выражены направленными отрезками, отложенными на одной и той же прямой от одной и той же ее точки А, принятой за начало отрезков. Тогда на той части прямой, которая расположена направо от А, изобразится ряд положительных чисел, а на части прямой расположенной влево от А, изобразятся отрицательные числа. Число нуль выражается на этой прямой не отрезком, а одной точкой А. Такая прямая часто называется числовою прямою.

Так как направление отрезков, выражающих числа со знаком +, противоположно направлению отрезков, выражающих числа со знаком —, то и самые эти знаки принято называть противоположными знаками. Всякие два числа, как +3 и —3, + $^1/_2$ и — $^1/_2$ и т. п., у которых знаки противоположны, а абсолютные величины одинаковы, называются противоположными числами.

Рассмотрим теперь, как производятся различные действия над относительными числами.

II. Сложение относительных чисел.

16. Задача. Кооперативное товарищество получило прибыли в январе 300 руб., в феврале 250 руб. и в марте —100 руб. (значит, в марте был убыток 100 руб.). Сколько прибыли получило товарищество за эти три месяца?

Искомая прибыль, очевидно, составляет 300 + 250 —100 = 450 руб.

Можно сказать, что прибыль есть сумма трех относительных чисел: +300, +250 и —100, разумея при этом, что 100 руб. убытка погашаются 100 руб. прибыли и, следовательно, уменьшают общую прибыль на 100 руб.

Подобным образом можно складывать между собой и другие противоположные величины, напр, доход и расход, выигрыш и проигрыш, имущество и долг и т. п. Особенность такового сложения состоит в том, что две противоположные величины, имеющие одинаковую абсолютную величину, при сложении взаимно уничтожаются (дают в сумме нуль).

17. Сложение двух чисел. Пусть требуется сложить два числа с одинаковыми знаками, напр. +3 и +5, или —3 и —5. Это значит, что складываются величины одного и того же „направления": 3 руб. дохода с 5 руб. дохода, 3 руб. расхода с 5 руб. расхода, и т. п. Очевидно, что в первом случае получится 8 руб. дохода, во втором случае 8 руб. расхода. Значит:

$$(+3) + (+5) = +8; \qquad (-3) + (-5) = -8.$$

Таким образом, ***чтобы сложить два числа одинаковых знаков, надо сложить их абсолютные величины и оставить тот же знак***.

Пусть требуется сложить два числа с разными знаками, папр., (+ 5) и (— 3), или (—5) и (+ 3). Это значит, что складываются величины противоположного смысла: 6 руб. прибыли с 3 руб. убытка, или 5 руб. расхода с 3 руб. дохода, и пр. Очевидно, что в первом случае получится 2 руб. прибыли, а во втором 2 руб. расхода. Значит:

$$(+5) + (-3) = +2; \qquad (-5) + (+3) = -2,$$

Таким образом, чтобы сложить два числа разных знаков, надо найти разность их абсолютных величин и перед нею поставить знак того числа, у которого абсолютная величина больше.

Отбросив знак + перед положительным числом, мы можем написанные сейчас равенства переписать короче:

$$5 + (-3) = 2; \qquad -5 + 3 = -2$$

Замечания, **а)** ***Сумма двух противоположных чисел равна нулю.*** Так:

$$(+3) + (-3) = 0; \quad (-8) + (+8) = 0.$$

Напр., если я продвинулся вперед на 3 шага, а затем отодвинулся назад также на 3 шага, то в результате я не продвинулся ни вперед, ни назад.

б) ***Прибавить 0 к какому-нибудь числу или прибавить к 0 какое-нибудь число — значим, очевидно, оставить это число без изменения.***

Так:

$$(+3) + 0 = +3; \qquad 0 + (-5) = -5.$$

18. Другое выражение правил сложения. Два правила сложения, указанные нами, можно заменить двумя другими правилами, очень удобными для применения.

а) ***Прибавить положительное число— значит прибавить его абсолютную величину.***

Так:

(+ 7) + (+ 3) = +10 и (+ 7) + 3 = 7 + 3 = 10;

(—7) + (—3) = — 4 и (—7) + 3 = — 7 + 3 = — 4.

б) ***Прибавить отрицательное число— значит отнять его абсолютную величину.***

Так:

(+ 7) + (— 10) = —3 и (+7) — 10 = 7— 10 = — 3;

(— 7) + (— 10) = —17 и (— 7) — 10 = — 7 — 10 = —17.

Эти два правила можно сокращенно выразить такими формулами двойных знаков:

+ (+ a) = + a; + (— a) = — a.

19. Сложение трех и более чисел. Сначала находят сумму двух первых слагаемых, к ней прибавляют третье слагаемое, и т. д. Пусть, напр., требуется найти сумму:

(+ 8) + (— 5) + (— 4) + (+ 3),

которую можно короче выразить так:

8 + (— 5) + (— 4) + 3.

Производим сложение в таком порядке:

8 + (—5) = 3; 3 + (— 4) = —1; (— l) + 3 = 2.

Впрочем, такого порядка нет надобности всегда придерживаться, как это будет видно из свойств суммы, которую мы вскоре укажем.

III. Вычитание относительных чисел.

20. Задача. Прибыль фабрики за 2 месяца, январь и февраль, составила ***a*** руб. Как велика была прибыль за один февраль, если известно, что за январь фабрика дала ***b*** руб. прибыли?

Прибыль за два месяца составляет, конечно, сумму прибылей, полученных отдельно за каждый из этих месяцев. Это остается верным и тогда, когда прибыль за какой-нибудь месяц была отрицательная, т. е. когда эта прибыль была на самом деле убытком. Так, если прибыль за январь была+2000 руб., а за февраль —500 руб., то за эти два месяца вместе прибыль составляла сумму (+ 2000) + (— 500) = +1500 руб. Поэтому искомая прибыль за февраль должна быть таким числом (положительным или отрицательным), которое, будучи сложено (по правилам сложения относительных чисел) с прибылью за январь, составит в сумме прибыль за оба месяца.

Таким образом, в нашей задаче дана сумма ***a*** и одно слагаемое ***b***, а требуется отыскать другое слагаемое. Действие, посредством которого по данной сумме и одному слагаемому находится другое слагаемое, называется вычитанием, безразлично, будут ли даны числа арифметические или относительные; при этом данная сумма называется уменьшаемым, данное слагаемое— вычитаемым, а искомое число — разностью (или остатком). Обозначив искомую разность в нашей задаче буквой ***x***, мы можем написать:

$$x = a — b.$$

Из этого следует, что правильность вычитания мы всегда можем поверять сложением: найдя искомую разность, сложим ее с вычитаемым; если в сумме получим уменьшаемое, то вычитание сделано верно.

21. Нахождение разности как одного из двух слагаемых. Найдем разность ***a* —*b*** в следующих частных случаях:

а) a =1000, b = 400.

Тогда x =1000 — 400 = 600 (поверка: 600 +400 =1000).

б) a = 1000, b = 1000; значит, за 2 месяца январь и февраль, получилась такая же прибыль, как и за один январь. Это могло случиться только тогда, когда за февраль не было ни прибыли, ни убытка; другими словами, когда за февраль прибыль была 0 руб.

Таким образом:

$$x = 1000 — 1000 = 0$$

(поверка: 1000 + 0 = 1000).

в) a =1000, b = 1200; значит, за 2 месяца прибыль была меньше, чем за один январь, и меньше на 200 руб. Это могло случиться только тогда, когда февраль принес не прибыль, а убыток, и притом убыток в 200 руб.; другими словами, когда за февраль прибыль была — 200 руб.

Таким образом:

$$x = 1000 — 1200 = — 200$$

(поверка: (— 200) + 1200 = 1000).

В этом случае нам пришлось вычесть большее число (1200) из меньшего (из 1000). Такое вычитание было бы невозможно, если бы мы ограничивались арифметическими числами; для относительных же чисел вычитание всегда возможно, а именно: ***разность от вычитания большего числа из меньшего равна избытку большего числа над меньшим, взятому со знаком —.***

Так:

1000 —1200 = —200, потому что (— 200) +1200 = 1000;

$3 — 5^1/_2 = — 2^1/_2$, „ „ $(— 2^1/_2) + 5^1/_2 = 3$;

0 — 8 = —8, „ „ (—8) + 8 = 0; и т. п.

г) a = 1000, b = — 200; значит, за два месяца прибыль фабрики била 1000 руб., тогда как за один январь был убыток в 200 руб. Это могло произойти только тогда, когда размер прибыли за февраль превосходил размер январского убытка на 200 руб.

Таким образом:

$$x = 1000 — (— 200) = 1000 + 200 = 1200$$

(поверка: 1200 + (— 200) = 1000).

д) *a* = — 100, *b* = 800, т. е. за январь и февраль вместе был убыток в 100 руб., тогда как за один январь была прибыль в 800 руб. Это могло быть, очевидно, только тогда, когда в феврале был убыток, размер которого превосходил размер прибыли за январь на 900 руб.

Таким образом:

$$x = — 100 —800 = — 900$$

(поверка: (— 900) + 800 == —100).

е) *a* = —100, *b* = — 150, т. е. за 2 месяца был убыток в 100 руб., а за один январь был убыток в 150 руб. Так как за два месяца убыток оказался меньше, чем за один январь, то, значит, февраль принес прибыль, а именно: прибыль в 50 руб.

Таким образом:

$$x = (— 100) — (—150) = 50$$

(поверка: 50 + (— 150) = — 100).

22. Правило вычитания. Из рассмотрения всех этих случаев вычитания мы можем вывести следующее правило: ***чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно к уменьшаемому приложить (по правилам сложения) число, противоположное вычитаемому.*** Так, мы сейчас видели (в случае **г**), что

$$1000 — (— 200) = 1200$$

Но то же самое число мы получим, если вместо того, чтобы вычитать —200, к уменьшаемому 1000 приложим число, противоположное вычитаемому, т. е. число +200:

$$1000 + (+200) =1200.$$

Точно так же мы видели (в случае **е**), что

$$(— 1 00) — (— 150) = 50;$$

но то же самое число мы получим, если к —100 приложим по правилу сложения число +150.

$$(— 100) + (+ 150) = + 50 = 50.$$

Подобно этому, и во всех других рассмотренных случаях вычитания действие это можно заменить сложением уменьшаемого с числом, противоположным вычитаемому.

Так:

1) 1000 — 400 = 600 и 1000 +(— 400) = 600;

2) 1000 — 1000 = 0 и 1000 + (— 1000) = 0 ;

3) 1000 —1200 = —200 и 1000+ (— 1200) = — 200;

4) (— 100)—800 = — 900 и (— 100) + (— 800) = — 900.

23. Формулы двойных знаков. Таким образом, согласно данному правилу, вычитание положительного числа + ***а*** можно заменить прибавлением отрицательного числа — ***а***, а вычитание отрицательного числа — ***а*** можно заменить прибавлением положительного числа + ***а***; это можно выразить такими формулами двойных знаков:

— (+ ***a***) = — ***a***; — (— ***a***) = + ***a***.

Эти формулы уподобляются тем формулам двойных знаков, которые были указаны для сложения (§18):

+ (+ ***a***) = + ***a***; + (— ***a***) = — ***a***;

24. Алгебраическая сумма и разность. Относительные числа дают возможность всякую разность представить в виде суммы, и наоборот, сумму изобразить в виде разности. Напр., разность 7 — 3 может быть написана так: (+ 7) + (—3), или проще: 7 —3; сумма 4 + 2 может быть изображена так: (+ 4) — (— 2), или проще: 4 — (— 2).

Подобно этому всякое выражение, представляющее собой ряд последовательных сложений и вычитаний, может быть представлено в виде суммы.

Например:

20 — 5 + 3 —7 = 20 + (—5) + 3 + (—7).

Сумма, в которой слагаемые могут быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, принято называть алгебраическою суммою, в отличие ее от арифметической суммы, в которой все слагаемые числа обыкновенные (арифметические). Равным образом разность называется алгебраической, если в ней уменьшаемое и вычитаемое числа относительные.

IV. Главнейшие свойства сложения и вычитания относительных чисел.

25. Убедимся на примерах, что те свойства сложения и вычитания арифметических чисел, которые мы указали для чисел арифметических (§§ 6, 7), принадлежат также и числам относительным:

а) Переместительное свойство: ***сумма не изменяется от перемещения слагаемых.***

Например:

(—4) + (+ 3) + (—1) + (+ 5) = + 3;

(—4) + (—1) + (+ 5) + (+ 3) = + 3;

(+ 5) + (—1) + (— 4) + (+ 3) = + 3, и т. п.

Если, напр., торговец, продав четыре предмета, получил прибыли на одном из них 3 руб., на другом 5 руб., на третьем же имел убыток 4 руб. и на четвертом также убыток 1 руб., то для него безразлично, в каком порядке следовали эти продажи: проданы ли были сначала те предметы, на которых получена прибыль, или как-нибудь иначе; при всяком порядке результат будет один и тот ж: после четырех продаж торговец получил прибыли 3 рубля.

б) Сочетательное свойство: ***сумма не изменится, если какие-нибудь слагаемое мы заменим их суммою.***

Так, при вычислении суммы:

(—4) + (+ 3) + (—1) + (+ 5) = + 3,

вместо того, чтобы производить сложение в том порядке, в каком написаны слагаемые, мы можем какие-нибудь из них, напр, второе и третье, заменить их суммою, вычислив ее предварительно: (+ 3) + (— 1) = + 2; тогда будем иметь: (— 4) + (+ 2) + (+ 5) = 3, т. е. мы получим ту же сумму, как и прежде. Можно было бы какие-нибудь три слагаемые, напр. 2-е, 3-е и 4-е, заменить их суммою: (+ 3) + (— 1) + (+ 5) = + 7; тогда мы получим: (—4) + (+ 7) = + 3, т. е. получим ту же сумму +3.

в) ***Чтобы к какому-нибудь числу прибавишь сумму нескольких слагаемых, можно к этому числу прибавить каждое слагаемое отдельно одно за другим.***

Пусть, напр., требуется к числу 40 прибавить сумму 20 + (— 5) + (+ 7), что можно выразить так:

40 + [20 + (—5) + (+7)].

Мы можем сначала вычислить прибавляемую сумму:

20 + (—5) =20 — 5 = 15; 15 + (+ 7)= 15 + 7 = + 22

и затем полученное число + 22 приложить к 40:

40 + (+ 22) = + 62.

Но вместо этого мы можем к 40 прибавить сначала первое слагаемое 20, потом второе слагаемое —5 и, наконец, третье слагаемое +7:

40 + 20 = 60; 60 + (— 5) = 55; 55 + (+ 7) -= + 62.

Окончательная сумма оказывается та же самая.

г) ***Чтобы от какого-нибудь числа отнять сумму нескольких слагаемых, можно от этого числа отнять каждое слагаемое отдельно одно за другим.***

Пусть, напр., нам желательно из 20 вычесть сумму 10 + (— 4) + (—3), что можно выразить так:

20 — [10 + (—4) + (—3)].

Мы можем сначала вычислить отнимаемую сумму:

10 + (— 4) = 10 — 4 = 6; 6 + (— 3) = 6— 3 = 3

и затем полученное число отнять от 20:

20 — 3 = 17.

Но вместо этого мы можем отнять от 20 сначала первое слагаемое 10, затем второе слагаемое —4 и, наконец, третье слагаемое — 3:

20— 10 = 10;   10 — (— 4) = 10 + 4 = 14;   14 — (— 3)= 14+ 3 = 17.

Мы получили то же самое число, как и прежде.

V. Умножение относительных чисел.

26. Определение. Как известно из арифметики, ***умножение, на целое, число есть действие, посредством которого множимое повторяется слагаемым столько раз, сколько единиц во множителе, а умножение на дробь есть действие, посредством которого находится эта дробь от множимого.*** Оба эти определения вполне применимы и к умножению относительных чисел, когда множитель есть положительное число; стоит только условиться положительное число рассматривать как обыкновенное арифметическое. Напр., умножить —5 на + 3 (или просто на 3)—значит повторить — 5 слагаемым 3 раза (получим —15); умножить 0 на + 5 —значит повторить число 0 слагаемым 5 раз (получим 0); умножить —12 на + $^3/_4$ (или просто на $^3/_4$)—значит найти $^3/_4$ от —12 (получим —9).

Умножение на отрицательное число мы условимся понимать в таком особом смысле: ***умножить какое-нибудь множимое на отрицательный множитель — значит умножить множимое на абсолютную величину множителя и полученное произведение взять с противоположным знаком.*** Так, умножить —3 на —2 — значит умножить — 3 на 2 (получим — 6) и результат взять с противоположным знаком (получим +6).

27. Вывод правила умножения. Рассмотрим следующие четыре случая умножения:

а)(+10)(+2); **б)**(— 10)(+2); **в)**(+10)(—2); **г)**(— 10)(—2).

В первом случае надо +10 повторить слагаемым 2 раза, от чего получим +20; во втором случае надо —10 повторить слагаемым 2 раза, отчего получим — 20. В третьем и четвертом случаях надо множимое умножить на 2 и результат взять с противоположным знаком. Значит, в третьем случае получим —20, а в четвертом +20. Таким образом:

(+10)(+2) = +20;   вообще   ***(+a) (+b) = + ab;***

(— 10)(+2) = — 20;   „   ***(— a) (+ b) = — ab***;

(+10)(—2) = — 20;   „   ***(+ a) (—b) = — ab;***

(— 10)(—2) = + 20;   „   ***(— a) (—b) = + ab.***

Правило. ***Чтобы найти произведение двух относительных чисел, надо перемножить их абсолютные величины и произведение взять со знаком + в том случае, когда перемножаемые числа имеют одинаковые знаки, и со знаком — в том случае, когда они противоположных знаков.***

Часть этого правила, касающаяся знаков, носит название правила знаков; его обыкновенно выражают так: при умножении двух чисел одинаковые знаки дают +, а разные дают —.

Можно также сказать, что от умножения на положительное число знак множимого не меняется, а при умножении на отрицательное число он изменяется на противоположный.

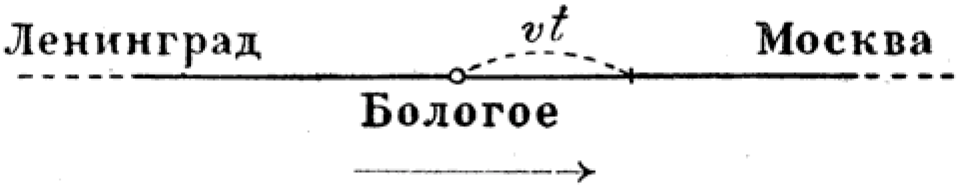
К указанным случаям умножения мы должны еще присоединить тот случай, когда множимое или множитель будет нуль: произведение любою числа на нуль и произведение нуля на любое число принимается равным нулю. Так: (+3)•0 = 0; (— 5)•0 = 0; 0•(— 4) = 0, и т. п.

28. Чтобы показать полезность данного выше правила умножения относительных чисел, рассмотрим следующую задачу.

Задача. В полдень поезд Октябрьской железной дороги (соединяющий Ленинград с Москвою) проследовал через станцию Бологое (расположенную, приблизительно, посредине между Ленинградом и Москвою). Определить место, в котором находился этот поезд в момент времени, отстоящий от полудня (того же дня) на ***t*** часов, если известно, что поезд двигался со скоростью ***v*** км в каждый час (предполагается для простоты, что поезд двигался безостановочно).

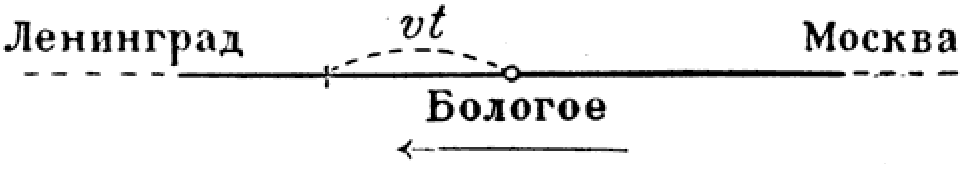
Положим, что в этой задаче буквы ***t*** и ***v*** означают какие-нибудь арифметические числа (пусть, напр., скорость поезда была 40 км в час, а момент времени, в который требуется определить местонахождение поезда, отстоял от полудня на 3 часа). Тогда в ответ на вопрос задачи мы только можем сказать, что в указанный момент времени поезд находился на таком расстоянии от Бологого, какое он может пройти в ***t*** часов, т. е. на расстоянии, равном ***vt*** км. Но мы не можем сказать, нужно ли это расстояние считать от Бологого по направлению к Москве или по направлению к Ленинграду, так как, во-первых, в задаче не указано, в каком направлении двигался поезд: от Ленинграда к Москве или от Москвы к Ленинграду, и, во-вторых, мы не знаем, идет ли речь о моменте времени, который был позже полудня на ***t*** часов, или же о том моменте, каторый был раньше полудня на ***t*** часов. Таким образом, наша задача, чтобы быть вполне определенной, должна распасться на следующие 4 отдельные задачи:

1) В полдень поезд, двигавшийся от Ленинграда к Москве со скоростью ***v*** км в час, проходил через станцию Бологое. Определить местонахождение этого поезда через ***t*** часов после полудня.



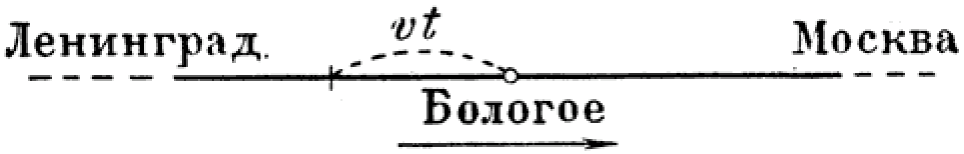
Тогда ответ будет таков: в указанный момент времени поезд находился на расстоянии ***vt*** км от Бологого по направлению к Москве .

2) В полдень поезд, двигавшийся от Москвы к Ленинграду со скоростью ***v*** км в час, проследовал через станцию Бологое. Определить местонахождение этого поезда через ***t*** часов после полудня.



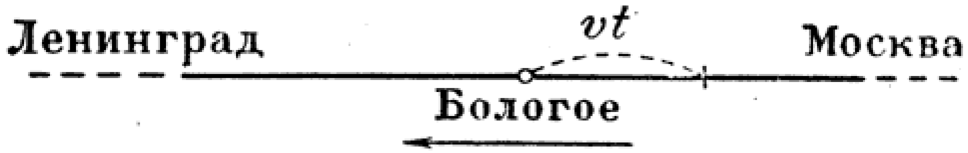
Ответ будет: на расстоянии ***vt*** км от Бологого по направлению к Ленинграду .

3) В полдень поезд, двигавшийся от Ленинграда к Москве со скоростью ***v*** км в час, проходил через станцию Бологое. Определить местонахождение этого поезда за ***t*** часов до полудня.



Ответ: на расстоянии ***vt*** км от Бологого по направлению к Ленинграду .

4) В полдень поезд, двигавшийся от Москвы к Ленинграду со скоростью ***v*** км в час, проходил через станцию Бологое. Определить местонахождение этого поезда за ***t*** часов до полудня.



Ответ: на расстоянии ***vt*** км от Бологого по направлению к Москве .

Введение в алгебру отрицательных чисел и правил действий над ними позволяет эти четыре отдельные задачи выразить одною общею задачею и дать для нее одно общее решение. Для этого предварительно условимся, во-первых, какое из двух возможных направлений пути (от Ленинграда к Москве, или наоборот) считать за положительное и какое за отрицательное; и, во-вторых, какой промежуток времени, следующий за полуднем или предшествующий ему, считать положительным и какой отрицательным. Условимся, напр., скорость поезда при движении его от Ленинграда к Москве считать положительной, а скорость при обратном движении — от Москвы к Ленинграду — считать отрицательной; таким образом, мы будем, напр., говорить: поезд двигался со скоростью + 40 км в час, или поезд двигался со скоростью — 35 км в час, разумея при этом, что в первом случае поезд шел от Ленинграда к Москве со скоростью 40 км в час, а во втором случае он шел от Москвы к Ленинграду со скоростью 35 км в час. Далее, условимся считать положительными все те промежутки времени, которые следуют за полуднем; напр., мы будем говорить, что момент времени, в который требуется определить местонахождение поезда, отстоит от полудня на + 4 часа, или момент этот отстоит от полудня на —3,часа, разумея при этом, что в первом случае момент времени надо считать позднее полудня на 4 часа, а во втором случае его надо брать раньше полудня на 3 часа.

Допустим теперь, что в задаче нашей буквы ***t*** и ***v*** будут означать не числа арифметические, как мы прежде предполагали, а числа относительные; напр., ***t*** может означать в задаче и + 4, и —3; ***v*** может означать и + 40, и —35, и другие относительные числа. Тогда мы можем сказать, что задача наша включает в себе все четыре частные случая, указанные выше, и точным ответом на нее будет следующий общий ответ:

в указанный момент времени расстояние поезда от Бологого равно ***vt*** км, если под произведением ***vt*** относительных чисел условимся разуметь произведение их абсолютных величин, взятое со знаком плюс в том случае, когда оба сомножителя числа положительные или оба числа отрицательные, и со знаком минус в том случае, когда один сомножитель число положительное, а другой отрицательное.

При этом условии наш общий ответ (указанный выше) будет годен для всех частных случаев. Действительно:

1) Пусть буквы v и t означают положительные числа, напр, v = + 40 и t = +3. Эти задания означают, что поезд шел по направлению от Ленинграда к Москве со скоростью 40 км в час и что требуется определить местонахождение поезда в момент , времени, бывший 3 часа после полудня. В этом случае искомое место лежит, как мы видели, на 120 км от Бологого по направлению к Москве.

Значит, искомое расстояние равно +120 км. Но, согласно нашему условию, и произведение vt в этом случае дает: (+ 40) (+ 3) = + 120. Следовательно, искомое расстояние равно произведению vt км.

2) Пусть v отрицательное число, напр. — 40, а t положительное число, напр. + 3. Эти задания надо понимать в том смысле, что поезд шел от Москвы к Ленинграду, и надо определить его место в момент, бывший 3 часа после полудня. Мы видели, что тогда оно лежит на 120 км от Бологого, по направлению к Ленинграду, т. е. искомое расстояние равно — 120 км. Но и произведение vt в этом случае дает: (—40)(+3) = —120; значит, искомое расстояние равно vt км.

3) Пусть v положительное число, напр. + 40, а t отрицательное число, напр. —3. Эти задания означают, что поезд шел от Ленинграда к Москве, и требуется определить его место в момент, бывший за 3 часа до полудня. Это место находится на 120 км от Бологого по направлению к Ленинграду, значит, искомое расстояние равно —120 км. Но и произведение vt в этом случае дает: (+40) (—3) = —120; следовательно, искомое расстояние равно vt км.

4) Пусть, наконец, и v, и t означают отрицательные числа, напр. v = — 40, t = — 3. Эти задания означают, что поезд шел по направлению от Москвы к Ленинграду и что момент времени, в который требуется определить местонахождение поезда, был за 3 часа до полудня. В этом случае, как мы видели, искомое место лежит на расстоянии 120 км от Бологого по направлению к Москве, т. е. искомое расстояние равно +120 км. Но и произведение vt в этом случае дает: (— 40) (— 3) = +120; значит, и теперь можно сказать, что искомое расстояние равно vt км.

29. Произведение трех и более чисел. Пусть требуется вычислить произведение:

(+2) (—1) (+ 3) (—10) (—4) (—5).

Для этого умножим первое число на второе, полученное про. изведение умножим на третье число, вновь полученное произведение умножим на четвертое число и т. д.:

(+ 2)(—1) = —2; (—2)(+ 3) = — 6; (—6) (—10) = + 60; (+ 60) (— 4)== — 240; (— 240) (— 5) = + 1200.

Если бы перемножались только одни положительные числа, то знак окончательного произведения должен быть, конечно, +. Но когда все или некоторые сомножители отрицательные, то произведение окажется со знаком + в том случае, когда число отрицательных сомножителей четное, и со знаком — в том случае, когда число таких сомножителей нечетное. Так:

1 отрицат. сомножитель	2 отрицат. сомножителя
(+ 2)(—1)(+ 3) = —6;	(+ 2)(—l)(+ 3)(—10) = + 60;

3 отрицат. сомножителя

(+ 2)(— 1) (+3) (—10) (— 4) = —240, и т. д.

Причина этого заключается в том, что каждый раз, как нам приходится умножать на отрицательное число, знак множимого переменяется, а когда приходится умножать на положительное число, он остается без изменения.

VI. Деление относительных чисел.

30. Определение. ***Деление относительных чисел (как и арифметических) есть действие (обратное умножению), посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой.*** Так, разделить +10 на —2 - значит найти такое число ***x***, чтобы произведение (—2)***x*** или, все равно, произведение ***x***(— 2) равнялось+10; такое число есть, и только одно, именно —5, так как произведение — 5 на —2 равно +10, а произведение какого-нибудь иного числа на —2 не может составить + 10.

Из этого определения следует, что правильность деления можно поверять умножением; именно, если, умножив частное на делитель, мы получим делимое, то действие сделано верно.

31. Вывод правила деления. Рассмотрим следующие примеры деления относительных чисел:

(+10): (+2) = + 5, потому что (+ 2) (+ 5)= +10;

(— 10):(—2) = +5, „ „ (—2)(+5) = —10;

(—10):(+2) = — 5, „ „ (+2)(— 5) = —10;

(+10):(—2)= — 5, „ „ (—2)(—5) = + 10.

Из этих примеров выводим правило: ***чтобы разделить одно число на другое, надо разделить абсолютную величину делимого на абсолютную величину делителя и результат взять со знаком +, когда оба данные числа имеют одинаковые знаки, и со знаком —, когда они имеют разные знаки.***

Таким образом, правило знаков при делении остается то же самое, что и при умножении.

32. Другое правило деления. Из арифметики мы знаем, что деление равносильно умножению на число, обратное делителю. То же самое мы можем сказать и о делении относительных чисел, если условимся числом, обратным данному относительному числу ***a***, называть такое число, которое получается от деления +1 на ***a***. Действительно:

$$(—10):(+5) = — 2 \quad и \quad (—10) \bullet (+ {}^{1}/_{5})= —{}^{10}/_{5} = —2;$$

$$(—40):(—8) = +5 \quad \text{и} \quad (—40) \cdot (—{}^{1}/_{8}) = +{}^{40}/_{8} = +5$$

33. Случаи, когда делимое или делитель равны нулю.

а) Пусть требуется разделить 0 на какое-нибудь число, напр. на +10. Это значит, что требуется найти такое число, которое надо умножить на +10, чтобы получить в произведении 0. Такое число есть 0 и только 0, так как 0 • (+10) = 0, а произведение какого-нибудь другого числа, не нуля, на +10 не может, очевидно, равняться 0.

Подобным образом находим:

0:(— 2) = 0, потому что (— 2)•0 = 0;

$0 : {}^{3}/_{4} = 0$, ., „ ${}^{3}/_{4} \cdot 0 = 0$, и т. п.

Значит, ***если делимое равно нулю, а делитель не равен нулю, то частное должно быть нуль.***

б) Положим теперь, что делитель будет 0, а делимое какое: нибудь другое число, напр. (+ 5) :0. Это значит, что требуется найти такое число, которое надо умножить на 0, чтобы получить + 5. Но какое бы число мы ни умножали на 0, мы всегда получим 0, а не число +5 ; значит, частное (+5): 0 не может равняться никакому числу. Подобно этому невозможны деления:

(—5):0;   (+ 0,3) : 0;   (—7,26): 0, и т. п.

Вообще, ***если делитель равен нулю, а делимое не равно нулю, то деление невозможно***.

в) Возьмем, наконец, такой случай, когда и делимое равно нулю и делитель равен нулю;

0:0 = ?

В этом случае ***частное может равняться любому числу***, так как всякое число, умноженное на нуль, дает в произведении также нуль.

VII. Некоторые свойства умножения и деления.

34. Убедимся на примерах, что те свойства умножения и деления, которые мы указали для чисел арифметических (§§ 8 и 9), принадлежат также к числам относительным.

а) Переместительное свойство: ***произведение не изменяется, при изменении порядка сомножителей.***

Возьмем сначала примеры умножения только двух чисел:

(+5) (+2) = +10   и   (+2) (+5) = + 10;

(— 5)(+ 2) = —10   и   (+2) (—5) = —10;

$$(—{}^{2}/_{5})(—{}^{3}/_{4}) = +{}^{6}/_{20} \quad \text{и} \quad (—{}^{3}/_{4})(—{}^{2}/_{5}) = +{}^{6}/_{20}$$

Свойство это применимо и к тому случаю, когда какой-нибудь сомножитель есть 0, если примем, что произведение равно нулю, когда какой-нибудь сомножитель есть нуль. Тогда

0•(+3) = 0 и (+3)•0 = 0;   0•(—5) = 0 и (—5) • 0 = 0.

Возьмем теперь произведение, состоящее более чем из двух сомножителей, например такое:

(—2)(—5)(+ 3).

Абсолютная величина этого произведения равна 2•5•3, знак же окажется + или —, смотря по тому, четное или нечетное число отрицательных сомножителей (в нашем примере знак будет +). Если мы переставим сомножители, например, так:

(+3)(—5)(—2),

то получим новое произведение, у которого абсолютная величина равна 3•5•2, а знак будет + или —, смотря по тому, четное или нечетное число будет отрицательных сомножителей. Но 3•5•2 = 2•5•3 (по переместительному свойству умножения арифметических чисел), и число отрицательных сомножителей, очевидно, остается то же самое, что и прежде; значит, у обоих произведений абсолютная величина будет одна и та же и знаки одинаковы; поэтому:

(— 2) (—5) (+ 3) = (+ 3) (— 5) (— 2).

б) Сочетательное свойство: ***произведение не изменится, если какие-либо из сомножителей будут заменены их произведением.***

Так, вместо того, чтобы производить умножение (—5) (+3) (—2) в том порядке, в каком написаны сомножители:

(—5) (+3) = — 15;   (—15)(—2) = +30,

мы можем взять любые два сомножителя, например +3 и —2, и заменить их произведением, т. е. числом —6, и потом умножить на это число третий сомножитель: (— 5) (— 6) = + 30. Таким образом:

(— 5) (+3) (— 2) = (— 5) [(+ 3) (— 2)].

в) ***Чтобы умножить какое-нибудь число на произведение, можно умножить это число на первый сомножитель, полученное произведение умножить на второй сомножитель и т. д.***

Так, чтобы умножить + 10 на произведение (— 2) (+ 3), мы можем сначала вычислить это произведение (оно равно —6) и затем на него умножить +10 (получим —60); Но можем умножить + 10 сначала на —2 (получим —20) и затем полученное произведение умножить на + 3 (получим — 60). Таким образом:

(+10) [(— 2) (+ 3)] =(+ 10)(— 2) (+ 3).

Вообще:

$$a(bc) = abc.$$

г) ***Чтобы разделить какое-нибудь число на произведение, можно разделить это число на первый сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, это частное разделить на третий сомножитель, и т. д.***

Так, чтобы разделить —40 на произведение (+5) (—2), можно сначала найти это произведение (оно равно —10) и затем разделить — 40 на полученное число (получим + 4); но можно разделить — 40 сначала на + 5 (получим —8), а затем полученное число разделить на —2 (получим + 4). Таким образом:

$$(-40) : [(+5)(-2)] = [(-40) : (+5)] : (-2).$$

Вообще:

$$a : (bc) = (a : b) : c.$$

д) Распределительное свойство: ***чтобы умножить (или разделить) алгебраическую сумму на какое-нибудь число, можно умножить (или разделить) на это число каждое слагаемое отдельно и результаты сложить.***

Пусть, например, надо сумму (+ 8) + (— 2) + (— 3) умножить на —10. Вместо того, чтобы сначала вычислить эту сумму (она равна +3) и потом ее умножить на — 10 (получим — 30), мы можем умножить на — 10 каждое слагаемое отдельно и потом полученные числа сложить:

$$(+8)(-10) = -80; \quad (-2)(-10) = +20; \quad (-3)(-10) = +30;$$

$$-80 + 20 + 30 = -30.$$

Вообще:

$$(a + b + c)\, m = am + bm + cm$$

и

$$(a + b + c) : m = {}^{a}/_{m} + {}^{b}/_{m} + {}^{c}/_{m}$$

е) Покажем еще, что ***если делимое и делитель умножим (или разделим) на одно и то оке число, то частное не изменится.***

Как мы видели прежде (§ 9,г) равенство

$${}^{a}/_{b} = {}^{am}/_{bm}$$

верно для всяких чисел арифметических, как целых, так и дробных. Теперь мы проверим, что это равенство остается верным и тогда, когда все или некоторые буквы ***a, b*** и ***m*** будут означать числа отрицательные.

Возьмем какой-нибудь пример деления:

$$5 : 0,8$$

и умножим делимое и делитель, положим, на $3^{1}/_{2}$ От этого частное не изменится, так как все числа арифметические, и потому мы можем написать равенство:

$$\frac{5}{0,8} = \frac{5 \cdot 3^{1}/_{2}}{0,8 \cdot 3^{1}/_{2}}$$

Пусть теперь в этом равенстве какое-нибудь число сделается отрицательным; пусть, например, вместо 5 будет —5:

$$\frac{-5}{0{,}8}=\frac{-5\cdot3{}^1/_2}{0{,}8\cdot3{}^1/_2}$$

После такой перемены равенство все-таки осталось верным, так как теперь оба частные сделались отрицательными, а абсолютные величины их остались прежние. Заменим еще какое-нибудь другое арифметическое число отрицательным; например, вместо $3{}^1/_2$ возьмем $—3{}^1/_2$:

$$\frac{-5}{0{,}8}=\frac{-5\cdot(-3{}^1/_2)}{0{,}8\cdot(-3{}^1/_2)}$$

Равенство все-таки осталось верным, так как абсолютные величины обоих частных не изменились и оба они отрицательные числа.

Так же легко проверить, что равенство остается верным и тогда, когда третье число сделаем отрицательным.

Значит, какие бы положительные или отрицательные числа под буквами ***a, b*** и ***m*** мы ни разумели, равенство

$${}^a/_b = {}^{am}/_{bm}$$

остается всегда верным.

Частное не изменится также и от деления делимого и делителя на одно и то же число, так как деление равносильно умножению на обратное число.

Заметим, однако, что число, на которое мы умножаем (или делим) делимое и делитель, не должно быть нулем. Например, равенство:

$${}^2/_3 = {}^{2\cdot0}/_{3\cdot0}$$

неверно, так как правая часть этого равенства равна частному 0:0. а это частное может равняться всякому числу, тогда как ${}^2/_3$ есть определенное число.

Глава четвертая.

Понятие об уравнении.

35. Равенства и их свойства. Два числа или два алгебраических выражения, соединенные между собой знаком =, составляют равенство. Числа эти, или выражения, называются частями равенства; то, что стоит налево от знака =, составляет левую часть, а то, что стоит направо от этого знака, составляет правую часть. Например, в равенстве:

$$a + a + a = a\cdot3$$

левая часть есть сумма $a + a + a$, а правая — произведение $a\cdot3$.

Обозначив каждую часть равенства одною буквою, мы можем главнейшие свойства равенства выразить так:

а) Если $a = b$, то и $b = a$, т. е.: ***части равенства мы можем менять местами.*** Если, например, $a + b + c = a + (b + c)$, то и $a + (b + c) = a + b + c$

б) Если $a = b$ и $b = c$, то и $a = c$, т. е.: ***если два числа равны каждое одному и тому же третьему числу, то они равны и между собой.***

Например:

$$4^2=16; \quad 16 = 8 \bullet 2; \quad \text{следовательно, } 4^2 = 8 \bullet 2.$$

в) Если $a = b$ и m какое угодно число, то $a + m = b + m$ и $a — m = b — m$, т. е. ***если к равным числам прибавим или от них вычтем одно и то же число, то равенство не нарушится.*** Например, если $a + b = c$, то, отняв от обеих частей по b, получим $a = c — b$; или если $x — 2 = 8$, то, прибавив по **2**, найдем: $x = 8 + 2 = 10$.

г) Если $a = b$, то $am = bm$ и $^a/_m = {}^b/_m$: т. е. ***если равные числа умножим или разделим на одно и то же число, то равенство не нарушится.*** Например, если $^x/_2 = 3$ то, умножив обе части равенства на 2, получим равенство: $x = 6$; или, если $2x = 14$, то, разделив обе части на 2, найдем: $x = 7$.

Полезно обратить внимание на то, что ***умножение или деление обеих частей равенства на — 1 равносильно перемене знаков перед частями равенства.*** Так, если обе части равенства. $— x = — 5$ умножить на —1, то получим: $x = 5$.

36. Тождество. Два алгебраических выражения называются тождественными, если при всяких численных значениях входящих в них букв они имеют одну и ту же численную величину. Таковы, например, выражения:

$$ab \text{ и } ba, \qquad a + (b + c) \quad \text{и} \quad a + b + c.$$

Если в каком-нибудь равенстве обе его части составляют тождественные алгебраические выражения, то такое равенство называется тождеством. Таково, например, равенство:

$$a + b + c = a + (b + c)$$

Тождеством называется также и такое равенство, в которое входят только числа, выраженные цифрами, если обе его части, по выполнении всех действий, указанных в них, дают одно и то же число; например:

$$(40 \bullet 5):8 = 5^2.$$

37. Уравнение. Положим, мы желаем решить такую задачу: сколько сторон должно быть в выпуклом многоугольнике, чтобы сумма всех его внутренних углов равнялась 10 прямым углам?

Обозначим буквою x неизвестное число сторон выпуклого многоугольника. Тогда сумма внутренних углов его в градусах выразится, как мы знаем из геометрии1), формулой 180° (x — 2). По условию задачи формула эта должна дать 10 прямых углов, т. е. 900°; значит:

$$180\,(x — 2) = 900.$$

Это равенство нельзя назвать тождеством, так как выражения 180 (x — 2) и 900 имеют одинаковую численную величину не при всяком численном значении буквы x.

Если обе части равенства, содержащего одну или несколько букв, имеют одинаковую численную величину не при всяких численных значениях этих букв, то оно называется уравнением, а числа, обозначенные этими буквами, называются неизвестными (числами) уравнения. Эти буквы обыкновенно берутся из последних букв латинского алфавита (x, y, ,z,...). Равенство, написанное нами сейчас согласно условию задачи, есть уравнение с одним неизвестным $\boldsymbol{x}$.

Очевидно, что наша задача будет решена, если мы решим уравнение:

$$180(\boldsymbol{x} —2) = 900,$$

т. е. если мы найдем, какое число надо подставить вместо $\boldsymbol{x}$, чтобы произведение 18($\boldsymbol{x}$ — 2) сделалось равным числу 900; другими словами, какое число надо подставить вместо $\boldsymbol{x}$, чтобы уравнение обратилось в очевидное тождество (900 = 900). Для этого преобразуем уравнение таким образом: разделим обе его части на 180, от чего равенство не нарушится. Тогда в левой части мы получим $\boldsymbol{x}$ — 2 2), а в правой — число 5. Значит:

$$\boldsymbol{x} — 2 = 5.$$

Теперь приложим к обеим частям полученного уравнения по 2, отчего равенство опять-таки не нарушится. Тогда в левой части мы получим $\boldsymbol{x}$ — 2 + 2, т. е. $\boldsymbol{x}$, а в правой части будет 5 + 2, т. е. 7. Значит:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{7}.$$

И, действительно, при $\boldsymbol{x}$ = 7 левая часть уравнения будет 180(7 — 2), т. е. 180 • 5, что составит 900; и уравнение обратится в очевидное тождество: 900 = 900. Таким образом, искомый многоугольник должен быть семиугольник 3).

Число 7, найденное нами для $\boldsymbol{x}$, называется корнем уравнения или его решением; о таком числе принято говорить, что оно удовлетворяет уравнению, т. е. обращает его в очевидное тождество.

Найти корень уравнения — значит решить уравнение.

38. Примеры решения других уравнений,

а) $a + 7 = 9$. Отняв от обеих частей уравнения по 7, найдем: $x = 2$.

б) $15 = 18 — x$. Прибавив к обеим частям по x, получим $15 + x =18$. Теперь отнимем по 15, тогда найдем: $x = 3$.

в) $4x = 42 — 2x$. Прибавив по $2x$, получим $6x = 42$. Разделив обе части на 6, найдем: $x = 7$.

г) $3x = 5x — 40$; $3x + 40 = 5x$; $40 = 5x —3x = 2x$; $20 = x$; $x=20$.

д) $^{3x}/_5 — 7 = 2$. Прибавим по 7; получим $^{3x}/_5 = 9$

Умножим обе части на 5; $3 x = 45$; разделим на 3; $x = 15$.

39. Два основные свойства уравнения. Из приведенных примеров видно, что при решении уравнений можно пользоваться следующими двумя свойствами :

а) ***К обеим частям уравнения можно прибавить, или от них отнять, по одному и тому же числу.***

б) ***Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число.***

Позже мы ознакомимся с этими свойствами более подробно.

40. Члены уравнения. Условимся называть членами уравнения те числа (или те выражения), которые стоят в уравнении со знаком +, или со знаком —, или совсем без знака. Так, в уравнении $\mathbf{4x - 9 = x + 9}$ в левой части есть два члена: $\mathbf{4x}$ и $\mathbf{-9}$, и в правой части также два члена: $\mathbf{x}$ и $\mathbf{+9}$. Если перед членами не стоит никакого знака, то мы условимся подразумевать перед такими членами знак +. Так, в нашем уравнении в левой части есть член $\mathbf{4x}$, перед которым можно подразумевать знак + ; равным образом и перед членом $\mathbf{x}$ в правой части.

Заметим, что надо различать выражения: „члены уравнения" и „части уравнения"; в каждом уравнении есть только 2 части (левая и правая), тогда как членов может быть в каждой части несколько.

41. Перенесение членов уравнения. Полезно теперь же заметить, что при решении уравнений мы можем перенести любой член уравнения из одной части уравнения в другую часть, только переменив перед таким членом знак на противоположный. Так, решая уравнение:

$$4x - 9 = x + 9$$

мы прибавили к обеим частям его по 9; от этого в левой части член $\mathbf{-9}$ уничтожился, а в правой части получилось $\mathbf{x + 9 + 9}$. Таким образом член $\mathbf{-9}$ из левой части перешел в правую, но знак его переменился из — на +. После этого перенесения уравнение сделалось таким:

$$4x = x + 9 + 9$$

Теперь мы отнимаем от обеих частей уравнения по $\mathbf{x}$ от этого в правой части член $\mathbf{x}$ уничтожается, а в левой получается $\mathbf{4x - x}$, и уравнение делается:

$$4x - x = 9 + 9$$

Таким образом, член $\mathbf{x}$ перешел из правой части в левую, но знак его при этом переменился из подразумеваемого + на — 4).

Поступая так, мы всегда можем перенести все члены, содержащие неизвестное, в одну часть уравнения (напр, в левую), а все остальные члены перенести в другую часть уравнения. Так, в нашем примере мы получим: $\mathbf{4x - x = 9 + 9}$, т. е. $\mathbf{3x = 18}$ и, следовательно, $\mathbf{x = 6}$.

Замечания. 1) Введение в алгебру отрицательных чисел позволяет нам, перенося члены уравнения из одной его части в другую, не стесняться вычитанием большего числа из меньшего. Напр., в уравнении:

$$4x + 10 = 9x - 15,$$

мы можем член $\mathbf{9x}$ перенести в левую часть, а член $\mathbf{+ 10}$ в правую:

$$4x — 9x = —15 —10, \quad \text{т. е. } —5x = — 25.$$

Но если $—5x = — 25$, то $5x = 25$ (если два отрицательных числа равны между собой, то их абсолютные величины должны быть равны), и, следовательно, $x = 5$.

(Можно также сказать: умножим обе части равенства $— 5x = — 25$ на $— 1$; тогда получим : $5x = 25$)

Можем и не освобождаться от знаков —, а прямо разделить обе части уравнения на —5:

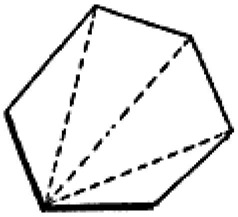
$$^{—5x}/_{—5} = {}^{—25}/_{—5}$$

2) Нет надобности переносить все члены, содержащие неизвестное, непременно в левую часть уравнения; их можно перенести и в правую часть, а известные члены в левую; напр., во взятом нами примере мы можем перенести $4x$ вправо, а $—15$ влево:

$$10 + 15 = 9x — 4x ; \qquad 25 = 5x; \qquad 5 = x; \qquad \text{следовательно, } x = 5.$$

Используются технологии **uCoz**

[1] Из геометрии известно, что во всяком выпуклом многоугольнике-сумма внутренних углов равна 2d (двум прямым углам), повторенным столько раз, сколько в многоугольнике сторон без двух. Так, как видно из чертежа , сумма внутренних углов 6 угольника равна 2d, повторенным 4 раза (4 = 6—2).



[2] В произведении 180 (x — 2) число 180 есть множимое, а x — 2 множитель; если же мы разделим произведение на множимое, то получим множитель.

[3] Заметим, что наше уравнение можко было бы решить, основываясь не на свойствах равенства, а на свойствах действий. Так, заметив, что в уравнении **180 (x — 2)=900** число **180** есть множимое, число **x — 2** множитель, а **900** произведение, мы можем найти множитель: он равен произведению, деленному на множимое, т. е. равен **900:180**, что составляет **5**. Тогда получим: **x — 2 = 5**. Теперь видим, что x есть уменьшаемое, **2** вычитаемое, а **5** остаток. Но уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с остатком, значит: **x = 2 + 5 = 7**.

[4] Перенесение членов уравнение из одной части в другую послужило причиной введения слова „алгебра". Эго слово в первый раз встречается в сочинении арабского астронома Мухаммеда Альхуаризми (жившего в IX веке). Сочинение его было озаглавлено „Альджебр-уальмукабала" что означает: ,,восстановление и противоположение". Под „восстановлением" разумелось уничтожение в уравнениях членов, перед которыми стоит знак —, посредством прибавления к обеим частям уравнения одного и того же числа, равного вычитаемому члену; а под „противоположением" разумелось уничтожение членов, перед которыми стоит знак +, посредством отнятия от обеих частей уравнения одного и того же числа, равного уничтожаемому члену.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(ПЕРВЫЕ ЧЕТЫРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ).

Глава первая. **Многочлен и одночлен.**
Глава вторая. **Алгебраическое сложение и вычитание.**
Глава третья. **Алгебраическое умножение.**
Глава четвертая.**Алгебраическое деление.**
Глава пятая. **Разложение на множители.**
Глава шестая. **Алгебраические дроби.**
Глава седьмая. **Отношение и пропорция.**
Глава восьмая. **Пропорциональная зависимость (прямая и обратная).**

Глава первая.

Многочлен и одночлен.

42. Многочлен и одночлен. Алгебраическое выражение, составленное из нескольких других выражений, соединенных между собою знаками + или —, называется многочленом. Таково, напр., выражение:

$$ab - a + b^2 - 10 + \frac{a-b}{2}$$

Отдельные выражения, от соединения которых знаками + или — получился многочлен, называются его членами. Обыкновенно члены многочлена рассматриваются вместе с теми знаками, которые стоят перед ними; напр., говорят: член — ***a***, член + $\boldsymbol{b}^2$ и т. п. Перед первым членом, если перед ним не поставлено никакого знака, можно подразумевать знак + ; так, в нашем примере первый член есть ***ab*** или + ***ab***.

Выражение, состоящее только из одного члена, называется одночленом, из двух членов —двучленом, из трех — трехчленом и т. п. Одночлен представляет собой или отдельное число, выраженное буквой или цифрами (напр. — ***a***, + 10), или произведение (напр. ***ab***), или частное (напр. $^{a-b}/_{2}$) или степень (напр. b^2); но ***одночлен не должен представлять собою ни сумму, ни разность***, так как в противном случае это был бы двучлен, трехчлен, вообще многочлен.

Если одночлен представляет собою частное, то он называется дробным одночленом; все другие одночлены называются целыми. Так, в нашем примере одночлен $^{a-b}/_{2}$ есть дробный, а все остальные члены многочлена целые. Так как в начале алгебры мы будем говорить только о целых одночленах, то для краткости мы будем их называть просто „одночленами".

Если все члены многочлена целые, то он также называется целым.

43. Коэффициент. Положим, дано произведение:

$$a\,3ab\,(-2),$$

в котором некоторые сомножители выражены цифрами, другие— буквами. Такие произведения можно преобразовать (пользуясь сочетательным и переместительным свойствами умножения), соединив в одну группу все сомножители, выраженные цифрами, в другую группу - все сомножители, выраженные буквою a, и т. д.:

$$3\,(—\,2)\,(aa)b,$$

что можно написать короче: $—\,6a^2b$;. Подобно этому:

$$—\,10\,axx\,(—\,2) = +\,20ax^2, \quad \text{и т. п.}$$

Выраженный цифрами сомножитель, поставленный впереди буквенных сомножителей, называется коэффициентом одночлена. Так, в одночлене $—\,6a^2b$ число — **6** есть коэффициент [1)].

Заметим, что если коэффициент есть целое положительное число, то он означает, сколько раз повторяется слагаемым то буквенное выражение, к которому он относится; так, $3ab = 3(ab) = (ab)\cdot 3 = ab + ab + ab$. Если коэффициент есть дробь, то он выражает, какая дробь берется от численной величины буквенного выражения. Так: $^2/_3\,ax = ax \cdot {}^2/_3$, а умножить ax на $^2/_3$ — значит взять $^2/_3$ от числа ax.

44. Свойства многочлена. Всякий многочлен можно рассматривать как алгебраическую сумму его членов. Напр., многочлен

$$2a — b + c$$

есть сумма: $2a + (—\,b) + (+\,c)$ так как выражение $+\,(—\,b)$ равносильно выражению $—\,b$ и выражение $+\,(+\,c)$ означает то же, что и $+\,c$. Вследствие этого все свойства суммы относительных чисел (отдел1§ 25) принадлежат также и многочлену. Напомним главнейшие из этих свойств:

а) Переместительное свойство: ***численная величина многочлена не изменяется при перемещении его членов*** (с их знаками).

Положим, напр., мы находим численную величину многочлена

$$2a^2 — ab + b^2 — {}^1/_2\,a$$

при $a = —\,4$ и $b = —\,3$. Для этого предварительно вычислим каждый член отдельно:

$$2a^2 = 2(—\,4)^2 = 2(—\,4)(—\,4) = 32; \qquad —\,ab = —\,(—\,4)\,(—\,3) = —12;$$

$$b^2 = (—\,3)^2 = (—\,3)(—\,3) = +9; \qquad —\,{}^1/_2\,a = —\,{}^1/_2\,(—\,4) = +2.$$

Теперь сложим все полученные числа или в той последовательности, в какой написаны члены многочлена:

$$32 — 12 + 9 + 2 = 31,$$

или в каком-нибудь ином порядке,— всегда получим одно и то же число 31.

б) Сочетательное свойство: ***численная величина многочлена не изменится, если какие-либо его члены мы заменим их алгебраической суммой.***

Так, если во взятом сейчас многочлене мы заменим члены $— ab$, $+ b^2$ и $— {}^1/_2\, a$ их алгебраической суммою, т. е. возьмем этот многочлен в таком виде:

$$2a^2 + (— ab + b^2 — {}^1/_2\, a)$$

то при $a = — 4$ и $b = — 3$ получим:

$$32 + (— 12 + 9 + 2) = 32 + (— 1) = 31,$$

т. е. получим то же самое число 31, которое получили прежде. Заметим еще следующее важное свойство многочлена:

в) ***Если перед каждым членом многочлена переменим знак на , противоположный, то численная величина многочлена изменит также знак на противоположный, а абсолютная величина ее не изменится.***

Напр., численная величина многочлена $2a^2 — ab + b^2 — {}^1/_2\, a$ при $a = — 4$ и $b = — 3$ равна, как мы видели, 31, а численная величина многочлена $— 2a^2 + ab — b^2 + {}^1/_2\, a$ при тех же значениях букв равна —31.

45. Приведение подобных членов. Иногда в многочлене встречаются такие члены, которые отличаются друг от друга только коэффициентами, или знаками, или даже и совсем не отличаются; такие члены называются подобными. Напр., в многочлене

$$\underline{4a}-\underline{\underline{3x}}+\underline{0{,}5a}+\underline{\underline{8x}}+3ax-\underline{\underline{2x}}$$

первый член подобен третьему (они подчеркнуты одной чертой), второй член подобен четвертому и шестому (подчеркнуты двумя чертами), а пятый член не имеет себе подобных.

Если в многочлене встречаются подобные между собой члены, то их можно соединить в один член. Так, в приведенном сейчас примере мы можем (основываясь на сочетательном свойстве многочлена) соединить члены в такие группы:

$$(4a + 0{,}5a) + (— 3x + 8x — 2x) + 3ax.$$

Но очевидно, чго 4 каких-нибудь числа да 0,5 такого же числа составляют 4,5 этого же числа. Значит, $4a + 0{,}5a = 4{,}5a$. Равным образом $— 3x + 8x = 5x$ и $5x — 2x = 3x$. Значит, многочлен можно изобразить так:

$$4{,}5a + 3x + 3ax.$$

Заметим, что соединение всех подобных между собою членов многочлена в один член принято называть приведением подобных членов многочлена.

Замечание. Два подобных члена о одинаковыми коэффициентами, но о разными (знаками взаимно уничтожаются, таковы, напр., члены $+ 2a$ и $—2a$, или $—{}^1/_2\, x^2$ и $+{}^1/_2\, x^2$.

Примеры.

1) $a+\underline{5mx}-\underline{2mx}+\underline{7mx}-\underline{8mx}=a+2mx.$

2) $\underline{4ax}+b^2-\underline{7ax}-\underline{3ax}+\underline{2ax}=-4ax+b^2=b^2-4ax.$

3) $\underline{4a^2b^3}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{0.5a^2b^3}+3a^2c+\underline{\underline{8ab}}=4{,}5a^2b^3+5ab+3a^2c.$

Глава вторая.

Алгебраическое сложение и вычитание.

46. Что представляют собою „алгебраические действия".

В арифметике действия производятся над числами, и в результате получается одно новое число. В алгебре действия производятся не над числами, а над алгебраическими выражениями, и в результате получается новое алгебраическое выражение. Напр., умножить одночлен **3*a*** на одночлен **2*a*** — значит, во-первых, указать умножение принятыми знаками:

$$(3a)\ (2a)$$

и, во-вторых, преобразовать, если возможно, полученное алгебраическое выражение в другое, более простое. В нашем примере преобразование можно выполнить, рассуждая так: чтобы умножить какое-нибудь число на произведение **2 • *a***, можно умножить это число сначала на **2**, а потом результат умножить на ***a***.

Значит:

$$(3a)\ (2a) = (3a)\ 2a.$$

В последнем выражении мы можем скобки отбросить, так как от этого смысл выражения не изменяется; тогда получим **3*a* 2*a***.. Теперь, пользуясь сочетательным свойством умножения, сгруппируем сомножители так: **(3 • 2) (*aa*)**, что, очевидно, составляет $6a^2$.

Какое бы число буква ***a*** ни означала, численная величина выражения **(3*a*) (2*a*)** всегда равна численной величине выражения $6a^2$, т. е. эти выражения тождественны.

Таким образом, алгебраическое действие в нашем примере умножения состоит, во-первых, в указании этого действия принятыми в алгебре знаками и, во-вторых, в преобразовании, если возможно, полученного алгебраического выражения в другое, тождественное ему.

47. Сложение одночленов. Пусть требуется сложить несколько одночленов:

3*a*, — 5*b*, + 0,2a, — *7b* и ***c***. Их сумма выразится так:

$$3a + (-5b) + (+0{,}2a) + (-7b) + c$$

Но выражения: **+ (— 5*b*), + (+ 0,2a)** и **+ (— *7b*)** равносильны выражениям: **— 5*b*, + 0,2a** и **— *7b*** поэтому сумму данных одночленов можно переписать проще так:

$$\underline{3a}-\underline{\underline{5b}}+\underline{0{,}2a}-\underline{\underline{7b}}+c,$$

что после приведения подобных членов даст: $3{,}2a — 12b + c$. Значит, ***чтобы сложить несколько одночленов, достаточно написать их один за другим с их знаками и сделать приведение подобных членов.***

48. Сложение многочленов. Пусть требуется к какому-нибудь числу или алгебраическому выражению m прибавить многочлен $a — b + c$. Искомую сумму можно выразить так:

$$m + (a — b + c).$$

Чтобы преобразовать это выражение, примем во внимание, что многочлен $a — b + c$ представляет собой сумму $a + (— b) + c$, а, чтобы прибавить сумму, можно прибавить каждое слагаемое одно за другим; поэтому:

$$m + (a — b + c) = m + a + (— b) + c$$

Но прибавить $— b$ все равно, что вычесть b; поэтому:

$$m + (a — b + c) = m + a — b + c$$

Правило. ***Чтобы к какому-нибудь альебраическому выражению прибавить многочлен, надо приписать к этому выражению все члены многочлена один за другим с их знаками*** (причем перед первым членом многочлена, если перед ним не стоит никакого знака, надо подразумевать знак +) и сделать приведение подобных членов, ***если они окажутся.***

Пример.

$$3a^2 — 5ab + b^2 + (4ab — b^2 + 7a^2).$$

Первое слагаемое, которое мы обозначали сейчас одной буквой m, дано в этом примере в виде многочлена $3a^2 — 5ab + b^2$. Применяя указанное правило, найдем:

$$3a^2 — 5ab + b^2 + (4ab — b^2 + 7a^2) = 3a^2 — 5ab + b^2 + 4ab — b^2 + 7a^2 = 10a^2 — ab$$

Если данные для сложения многочлены содержат подобные члены (как в нашем примере), то слагаемые полезно писать одно под другим так, чтобы подобные члены стояли под подобными:

$$\begin{array}{r@{}l} + & 3a^2 — 5ab + b^2 \\ & \underline{7a^2 + 4ab — b^2} \\ & 10a^2 — ab. \end{array}$$

49. Вычитание одночленов. Пусть требуется из одночлена $10ax$ вычесть одночлен $—3ax$. Искомая разность выразится так:

$$10ax — (— 3ax).$$

Согласно правилу вычитания, вычитание $— 3ax$ можно заменить прибавлением числа, противоположного числу $— 3ax$. Такое число есть $+ 3ax$, поэтому:

$$10ax — (— 3ax) = 10ax + (+ 3ax) = 10ax + 3ax = 13ax.$$

Значит, ***чтобы вычесть одночлен, достаточно приписать его к уменьшаемому с противоположным знаком (и сделать приведение подобных членов, если они окажутся).***

50. Вычитание многочленов. Пусть требуется из какого-нибудь числа или алгебраического выражения **m** вычесть многочлен $a - b + c$, что можно обозначить так:

$$\mathbf{m} - (a - b + c).$$

Для этого, согласно правилу вычитания (Отдел1§ 22), достаточно прибавить к **m** число, противоположное числу $a - b + c$. Такое число есть $-a + b - c$ (§ 44, в); значит:

$$\mathbf{m} - (a - b + c) = \mathbf{m} + (-a + b - c)$$

Применяя теперь правило сложения многочленов, получим:

$$\mathbf{m} - (a - b + c) = \mathbf{m} - a + b - c.$$

Значит, ***чтобы из какого-нибудь алгебраического выражения вычесть многочлен, достаточно к этому выражению приписать все члены вычитаемого многочлена с противоположными знаками (и сделать приведение).***

Если требуется вычесть из одного многочлена другой многочлен и в этих многочленах имеются подобные члены, то вычитаемый многочлен полезно писать под уменьшаемым, переменяя знаки у вычитаемого многочлена на противоположные, и так, чтобы подобные члены стояли под подобными. Напр., вычитание $(7a^2 - 2ab + b^2) - (5a^2 + 4ab - 2b^2)$ лучше всего расположить так:

$$\begin{array}{r}
7a^2 - 2ab + b^2 \\
\pm 5a^2 \pm 4ab \mp 2b^2 \\
\hline
2a^2 - 6ab + 3b^2
\end{array}$$

(в вычитаемом многочлене верхние знаки поставлены те, какие были заданы, а внизу они переменены на противоположные).

51. Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак + или—.

Пусть в выражении

$$2a + (a - 3b + c) - (2a - b + 2c)$$

требуется раскрыть скобки. Это надо понимать так, что требуется над многочленами, стоящими внутри скобок, произвести те действия, которые указаны знаками, стоящими перед скобками. В нашем примере перед первыми скобками стоит знак +, перед вторыми знак—. Произведя сложение и вычитание по данным нами правилам, получим выражение без скобок:

$$2a + a - 3b + c - 2a + b - 2c = a - 2b - c$$

Таким образом, мы должны помнить, что, ***раскрывая скобки, перед которыми стоит знак +, мы не должны изменять знаки внутри скобок, а раскрывая скобки, перед которыми стоит знак —, мы должны перед всеми членами, стоящими внутри***

скобок, переменить знаки на противоположные.

Пусть еще требуется раскрыть скобки в выражении:

$$10p — [3p + (5p — 10) — 4].$$

Для этого всего удобнее раскрыть сначала внутренние скобки, а потом внешние:

$$10p — [3p + 5p — 10 — 4] = 10p — 3p — 5p + 10 + 4] = 2p + 14.$$

52. Заключение в скобки части многочлена. Для преобразования многочлена иногда бывает полезно заключить в скобки совокупность некоторых его членов, причем перед скобками иногда желательно поставить + т. е. изобразить многочлен в виде суммы, а иногда знак —, т.е. изобразить многочлен в виде разности. Пусть, напр., в многочлене $a + b — c$ мы желаем заключить в скобки два последних члена, поставив перед скобками знак +. Тогда пишем так:

$$a + b — c = a +(b — c),$$

т. е. внутри скобок оставляем те же знаки, какие были в данном многочлене. Что такое преобразование верно, убедимся, если раскроем скобки по правилу сложения; тогда получим снова данный многочлен.

Пусть в том же многочлене требуется заключить в скобки два последние числа, поставив перед скобками знак минус.

Тогда напишем так:

$$a + b — c = a — (— b + c) = a — (c — b),$$

т. е. внутри скобок перед всеми членами переменяем знаки на противоположные. Что такое преобразование верно, убедимся, если раскроем скобки по правилу вычитания; тогда получим снова данный многочлен.

Замечание. Можно и весь многочлен заключить в скобки, поставив перед ними знак + или —. Напр., можно написать:

$$a — b + c = + (a — b + c) \quad и \quad a — b + c = — (— a + b — c).$$

Глава третья.

Алгебраическое умножение.

53. Умножение степеней одного и того же числа. Пусть надо умножить a^3 на a^2, что можно обозначить так: a^3a^2, или подробнее: $(aaa)\,(aa)$. Здесь произведение aaa умножается на другое произведение aa. Но чтобы умножить какое-нибудь число на произведение, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножп тель, и т. д.; поэтому:

$$a^3a^2 = (aaa)(aa) = (aaa)\,aa,$$

что может быть написано и без скобок, так как порядок действий остается и без скобок такой же, какой указан скобками:

$$a^3a^2 = aaaaa = a^5.$$

Значит, ***при умножении степеней одного и того же числа показатели их складываются.***

Таким образом: $x^3x = x^4$, $m^2m^3 = m^5$, $y^2\,y\,y^3 = y^6$, и т. д.

54. Умножение одночленов. Мы уже говорили раньше (§ 46), как можно преобразовать произведение одночленов $(3a)\ (2a)$ в одночлен $6a^2$. Повторим теперь сказанное тогда на другом примере. Пусть дано умножить:

$$3ax^2(—\,5abx)$$ 2).

Так как одночлен $—\,5abx$ есть произведение, то достаточно умножить множимое на первый сомножитель $—5$, результат умножить на второй сомножитель a, и т. д. Значит:

$$3ax^2(—\,5abx) = 3ax^2(—\,5)abx.$$

В этом произведении, пользуясь сочетательным свойством умножения, сгруппируем сомножители в такие группы:

$$(+3)(—\,5)\ (aa)\ b\ (x^2x).$$

Произведя умножение в каждой группе, получим:

$$—\,15\ a^2b\ x^3.$$

Значит, ***чтобы умножить одночлен на одночлен, надо перемножить их коэффициенты, сложить показатели одинаковых букв, а те буквы, которые входят только во множимое или только во множитель, перенести в произведение с их показателями.***

Примеры.

1) $0{,}7a^3x\ (3a^4x^2y^2) = 2{,}1a^7x^3y^2$

2) $(\ {}^1/_2\,m\,x^3\ )^2 = {}^1/_2\,m\,x^3\ (\ {}^1/_2\,m\,x^3\ ) = {}^1/_4\,m^2\,x^6$

3) $—3{,}5\ x^2y\ (\ {}^3/_4\,x^3) = —\ {}^{21}/_8\ x^5y$

55. Умножение многочлена на одночлен.

Пусть дано умножить многочлен $a + b — c$ на одночлен m, что можно выразить так:

$$(a + b — c)\ m.$$

Многочлен $a + b — c$ есть сумма относительных чисел $a + b + (— c)$. Но, чтобы умножить сумму, можно умножить каждое слагаемое отдельно и результаты сложить (распределительное свойство); значит:

$$(a + b — c)\ m = [\ a + b + (— c)\ ]\ m = am + bm + (— c)m\ .$$

Но $(— c)m = — cm$ и $+ (—cm) = — cm$; поэтому

$$(a + b — c)\ m = am + bm — cm.$$

Правило. ***Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.***

Так как произведение не изменяется от перестановки мест сомножителей, то это правило применимо также и к умножению одночлена на многочлен; таким образом:

$$m(a + b — c) = ma + mbm— mc.$$

Примеры.

1) $(3x^2 — 2ax + 5a^2) (—4ax)$.

Здесь умножение членов многочлена на данный одночлен надо производить по правилу умножения одночленов, принимая во внимание также и правило знаков: одинаковые знаки при умножении дают +, а разные знаки дают —. Умножаем отдельно каждый член многочлена на одночлен:

$$(3x^2)(—4ax) = — 12ax^3; \quad (— 2ax) (—4ax) == + 8a^2x^2; \quad (+ 5a^2) (—4ax) = — 20a^3x .$$

Теперь сложим полученные результаты:

$$— 12ax^3 + 8a^2x^2 — 20a^3x.$$

2) $(a^2 — ab + b^2) (3a) = a^2 (3a) — (ab) (3a) + b^2 (3a) = 3a^3 — 3a^2b + 3ab^2$

3) $(7x^3 + {}^3/_4\, ax — 0{,}3) (2{,}l\, a^2x) = (7x^3) (2{,}l\, a^2x) + ({}^3/_4\, ax) (2{,}l\, a^2x) — 0{,}3 (2{,}l\, a^2x) =$
$= 14{,}7a^2x^4 + 1{,}575a^3x^2 — 0{,}63\, a^2x$.

4) $2a (3a — 4\, ax + {}^1/_2\, x^2) = 6a^2 — 8a^2x + ax^2$

56. Умножение многочлена на многочлен. Пусть требуется произвести умножение:

$$(a + b — c) (m — n).$$

Рассматривая множитель $m — n$ как одно число (как одночлен), применим правило умножения многочлена на одночлен:

$$a (m — n) + b (m — n) — c (m — n).$$

Рассматривая теперь выражение $m — n$ как многочлен (двучлен), применим правило умножения одночлена на многочлен:

$$(am — an) + (bm — bn) — (cm — cn).$$

Наконец, раскрыв скобки по правилам сложения и вычитания, окончательно найдем:

$$(a + b — c) (m — n) = am — an + bm — bn — cm + cn$$

Правило. ***Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.***

Конечно, при умножении членов первого многочлена на члены второго многочлена нужно руководствоваться правилами знаков: одинаковые знаки дают + разные знаки —.

Пример, $(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(a^3 - 3ab^2 + b^3)$

Умножим сначала все члены множимого на 1-й член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)\,a^3 = a^5 - 5a^4b + a^3b^2 - 3a^3$$

Затем умножим все члены множимого на 2-й член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(-3ab^2) = -3a^3b^2 + 15a^2b^3 - 3ab^4 + 9ab^2$$

Далее, умножим на третий член множителя:

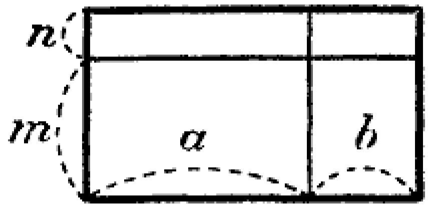
$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(b^3) = a^2b^3 - 5ab^4 + b^5 - 3b^3$$

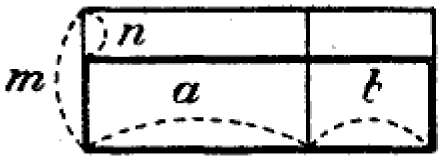
Наконец, сложим все полученные произведения и сделаем приведение подобных членов; окончательный результат будет:

$$a^5 - 5a^4b - 2a^3b^2 - 3a^3 + 16a^2b^3 - 8ab^4 + 9ab^2 + b^5 - 3b^3$$

Замечания. 1) Чтобы при умножении многочлена на многочлен не пропустить ни одного из произведений членов, полезно всегда держаться какого-нибудь одного порядка умножения; напр., как это мы сейчас делали, умножить сначала все члены множимого на 1-й член множителя, затем умножить все члены на 2-й член множителя, и т. д.

2) В применении к арифметическим числам правило умножения многочленов может быть наглядно истолковано геометрически. Возьмем, напр., 4 отрезка прямой ***a, b, m*** и ***n*** и построим два прямоугольника: один с основанием ***a + b*** и высотою ***m + n***, другой с основанием ***a + b*** ,и высотою ***m — n***.





Площадь первого равна (***a*** + ***b***) (***m*** + ***n***), а площадь второго будет (***a*** + ***b***) (***m*** — ***n***). Из чертежей непосредственно видно, что первая площадь равна ***am*** + ***bm*** + ***an*** + ***bn***, а вторая равна ***am*** + ***bm*** — ***an*** — ***bn***.

Примеры.

1) $(a - b)(m - n - p) = am - bm - an + bn - ap + bp.$

2) $(x^2 - y^2)(x + y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$

3) $(3an + 2n^2 - 4a^2)(n^2 - 5an) = 3an^3 + 2n^4 - 4a^2n^2 - 15a^2n^2 - 10an^3 + 20a^3n =$
$= -7an^3 + 2n^4 - 19a^2n^2 + 20a^3n$

4) $(2a^2 - 3)^2 = (2a^2 - 3)\ (2a^2 - 3) = (2a^2)^2 - 3\ (2a^2) - (2a^2)\ 3 + 9 =$
$= 4a^4 - 6a^2 - 6a^2 + 9 = 4a^4 - 12\ a^2 + 9$

57. Расположенный многочлен. Расположить многочлен по степеням какой-нибудь буквы — значит, если возможно, написать его члены в такой последовательности, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались от первого члена к последнему. Так, многочлен $1 + 2x + x^2 - x^3$ расположен по возрастающим степеням буквы x. Тот же многочлен будет расположен по убывающим степеням буквы x, если члены его напишем в обратном порядке: $- x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Буква, по которой расположен многочлен, называется главной его буквой. Член, содержащий главную букву с наибольшим показателем, называется высшим членом многочлена; член, содержащий главную букву с наименьшим показателем или не содержащий ее вовсе, называется низшим членом многочлена.

58. Умножение расположенных многочленов всего удобнее производить так, как будет указано на следующем примере.

Умножить

$$3x - 5 + 7x^2 - x^3 \text{ на } 2 - 8x^2 + x.$$

Расположив оба многочлена по убывающим степеням буквы x, пишут множитель под множимым и под ними проводят черту:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -x^3 & +7x^2 & +3x & -5 \\
 & & & -8x^2 & +x & +2 \\
\hline
8x^5 & -56x^4 & -24x^3 & +40x^2 & & \\
 & -x^4 & +7x^3 & +3x^2 & -5x & \\
 & & -2x^3 & +14x^2 & +6x & -10 \\
\hline
8x^5 & -57x^4 & -19x^3 & +57x^2 & +x & -10
\end{array}$$

Умножают все члены множимого на 1-й член множителя (на $- 8x^2$) и полученное произведение пишут под чертою. Умножают затем все члены множимого на 2-й член множителя (на $+ x$) и полученное второе произведение пишут под первым так, чтобы подобные члены стояли под подобными. Также поступают и далее. Под последним произведением (на **+ 2**) проводят черту, под которою пишут полное произведение, складывая все остальные произведения.

Можно также оба многочлена расположить по возрастающим степеням главной буквы и затем производить умножение в том порядке, как было сейчас указано.

59. Высший и низший члены произведения. Из рассмотрения этих примеров следует:

Высший член произведения равен произведению высшего члена множимого на высший член множителя.

Низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя.

Остальные члены произведения могут получиться от соединения нескольких подобных членов в один. Может даже случиться, что в произведении, после приведения подобных членов, все члены уничтожатся, кроме первого и последнего (высшего и низшего), как это видно на следующем примере:

$$\begin{array}{l}
x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-a \\
\hline
x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \\
\quad -ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^5=x^5-a^5.
\end{array}$$

60. Число членов произведения. Пусть во множимом будет пять членов, а во множителе три члена. Умножив каждый член множимого на 1-й член множителя, мы получим 5 членов произведения; умножив затем каждый член множимого на 2-й член множителя, мы получим еще б членов произведения и т. д.; значит, всех членов в произведении окажется 5•3, т. е. 15. Вообще, ***число членов произведения, до соединения в нем подобных членов, равно произведению числа членов множимого на число членов множителя.***

Так как высший и низший члены произведения не могут иметь себе подобных членов, а все прочие члены могут уничтожиться, то **наименьшее число членов произведения после приведения в нем подобных членов равно 2.**

61. Некоторые формулы умножения двучленов. Полезно запомнить следующие формулы умножения двучленов:

а) $\boldsymbol{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = \boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$.

Напр.: $17^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289$.

Таким образом, ***квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.***

б) $\boldsymbol{(a-b)^2} = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 = \boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$.

Напр.: $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

Таким образом, ***квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.***

Замечание. Полезно заметить, что возвышение в степень по отношению к сложению и вычитанию не обладает распределительным свойством; так, $\boldsymbol{(2+3)^2}$ не равно 2^2+3^2, или $\boldsymbol{(8-6)^2}$ не равно 8^2-6^2.

в) $\boldsymbol{(a+b)(a-b)} = a^2+ab-ab-b^2 = \boldsymbol{a^2-b^2}$

Напр.: $25 \cdot 15 = (20+5)(20-5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$.

Таким образом, ***произведение суммы двух чисел на их разность равно разности***

квадратов этих чисел.

г) $\boldsymbol{(a + b)^3} = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

Напр.: $12^3 = (10 + 2)^3 = 10^3 + 3•10^2•2 + 3•10•2^2 + 2^3 = 1000 + 600 + 120 + 8=1728$.

Таким образом, ***куб суммы, двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведенне первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа.***

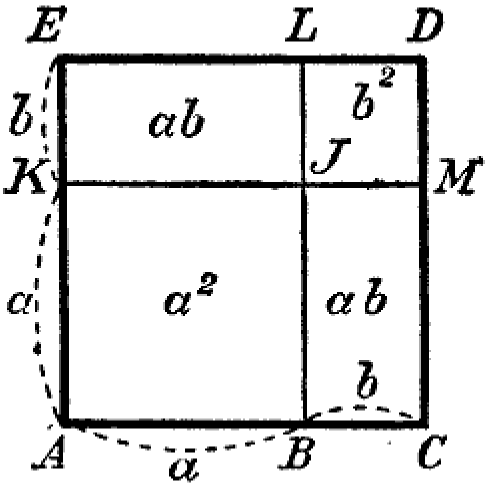
д) $\boldsymbol{(a — b)^3} = (a — b)^2 (a — b) = (a^2 — 2ab + b^2)(a — b) =$
$= a^3 — 2a^2b + ab^2 — a^2b + 2ab^2 — b^3 = \boldsymbol{a^3 — 3a^2b + 3ab^2 — b^3}$

Напр.:$19^3 = (20 — 1)^3 = 20^3 — 3•20^2•1 + 3•20•1^2 — 1^3 = 8000 —1200 + 60 — 1= 6869$.

Таким образом, ***куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведенне первого числа па квадрат второго, минус куб второго числа.***

62. Геометрическое истолкование некоторых из этих формул.

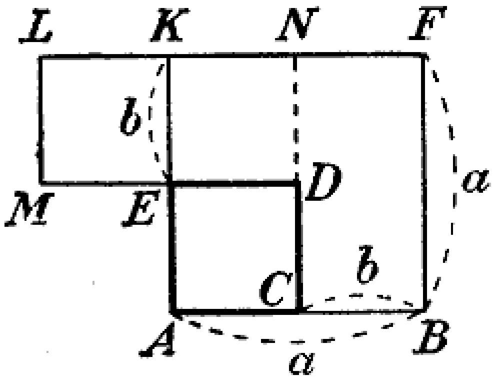
а) Отложим отрезок прямой AB = *a* и к нему приложим отрезок BC = *b* , затем построим квадраты: ACDE и ABJK, которых площади будут равны $\boldsymbol{(a + b)^2}$ и $\boldsymbol{a^2}$. Продолжив прямые BJ н KJ до пересечения с ED и CD, мы разобьем больший квадрат на 4 части, которых площади будут: $\boldsymbol{a^2}$, $\boldsymbol{b^2}$, ***ab*** и ***ab***.



Значит:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}.$$

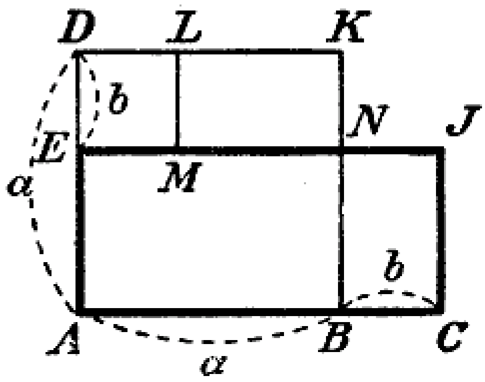
б) Отложим AB = ***a*** и из AB вычтем BC=***b***; затем построим квадраты ACDE, ABFK и KLME, которых площади будут $\boldsymbol{(a — b)^2}$, $\boldsymbol{a^2}$ и $\boldsymbol{b^2}$. Продолжив CD до точки N, мы получим: пл. ACDE = пл. ABFK + пл. EKLM— пл. CBFN — пл. DNLM.



Значит:

$$(a — b)^2 = a^2+ b^2— ab — ab = a^2 — 2ab + b^2.$$

в) Отложив (черт. 13) AB = ***a***, BG = ***b***, AD = ***a*** и DE = ***b***, построим прямоугольник ACJE и квадраты ABKD и DEML.



Тогда пл. ACJE = пл. ABKD + пл. BCJN — пл. DEML — пл. LMNK. Но прямоугольники BCJN и LMNK равны, и потому их площади в написанном нами равенстве взаимно уничтожаются: пл. ACJE = пл. ABKD — пл. DEML, т. е.

$$(a + b)(a—b) = a^2 — b^2.$$

63. Применения. При помощи указанных формул можно иногда производить умножение многочленов проще, чем обыкновенным путем. Приведем примеры:

1) $(4a^3 — 1)^2 = (4a^3)^2 — 2 (4a^3)\bullet 1 +1^2 = 16a^6 — 8a^3 + 1$

2) $(x + y)(y — x) = (y + x)(y — x) = y^2 — x^2.$

3) $(x + y + 1)(x — y +1) = [(x + 1) + y] [(x +1) — y] = (x +1)^2 — y^2 = x^2 + 2x +1 — y^2.$

4) $(a — b + c)(a + b — c)=[a — (b— c)] [a + (b — c)] =$

$= a^2 — (b — c)^2 = a^2 — (b^2 — 2bc + c^2) = a^2 — b^2 + 2bc — c^2$

Глава четвертая.

Алгебраическое деление.

64. Деление степеней одного и того же числа. Пусть требуется разделить:

$$a^5 : a^2.$$

Так как делимое должно равняться делителю, умноженному на частное, а при умножении показатели одинаковых букв складываются, то в искомом частном показатель буквы а должен быть такое число, которое, сложенное с 2, составляет 5; такое число равно разности 5 — 2. Значит:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$$

Подобно этому найдем: $x^3 : x^2 = x$; $y^4 : y = y^3$ и т. п.

Значит, ***при делении степеней одного и того же числа показатель делителя вычитается из показателя делимого***.Если только число, степени которого делятся, не равно нулю. Так, нельзя написать: $0^m : 0^n = 0^{m-n}$, так как это равенство означало бы: 0:0 = 0, тогда как частное 0:0 может равняться любому числу

65. Нулевой показатель. Если при делении степеней одного и того же числа показатель делителя окажется равным показателю делимого, то частное должно равняться 1; напр.: $a^3 : a^3 = 1$, потому что $a^3 = a^3 \cdot 1$. Условимся производить вычитание показателей и в этом случае; тогда в частном мы получим букву с нулевым показателем:
$a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$. Конечно, этот показатель не имеет того значения, которое мы придавали показателям ранее, так как нельзя повторить число сомножителем 0 раз. Мы условимся под видом a^0 разуметь частное от деления одинаковых степеней буквы a, и так как это частное равно 1, то мы будем принимать a^0 за 1.

66. Деление одночленов. Пусть дано разделить:

$$(12a^3b^2x) : (4a^2b^2).$$

Впрочем, ради краткости писания скобки в подобных обозначениях принято опускать. Согласно определению деления, частное, будучи умножено на делитель, должно составить делимое. Поэтому у искомого частного коэффициент должен быть **12 : 4**, т. е. **3**; показатель у буквы a получится вычитанием из показателя этой буквы в делимом показателя той же буквы в делителе, буква b совсем не войдет в частное, или—что все равно—войдет в него с показателем **0**, а буква x перейдет в частное со своим показателем.

Таким образом: $12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax$. Поверка: $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x$

Правило. ***Чтобы разделить одночлен на одночлен, надо коэффициент делимого разделить на коэффициент делителя, из показателей букв делимого вычесть показатели тех же букв делителя и перенести в частное, без изменения показателей, те буквы делимого, которых нет в делителе.***

Примеры.

1) $3m^3n^4x : 4m^2nx = {}^3/_4\, m n^3$

2) $-ax^4y^3 : -{}^5/_6\,axy^2 = +{}^6/_5\,x^3y.$

3) $0{,}8ax^n : -0{,}02ax = -40x^{n-1}$.

67. Признаки невозможности деления одночленов. Если частное от деления целых одночленов не может быть выражено точно целым одночленом, то говорят,что такое деление невозможно. Деление одночленов невозможно в двух олучаях:

а) Когда в делителе есть буквы, которых нет в делимом.

Напр., нельзя разделить $4ab^2$ на $2ax$, так как всякий одночлен, умноженный на $2ax$ дает произведение, содержащее букву x, а в нашем делимом такой буквы совсем нет.

б) Когда показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом.

Напр., деление $10a^3b^2 : 5ab^3$ невозможно, так как всякий одночлен, умноженный на $5ab^3$, дает в произведении такой одночлен, который содержит букву b с показателем 3 или с показателем, большим 3, тогда как в нашем делимом эта буква стоит с показателем 2.

Когда один одночлен не делится на другой одночлен, то частное может быть только указано посредством знаков деления; так частное от деления $4a^2b : 2ac$ может быть указано

или так: $4a^2b : 2ac$, или так: $\frac{4a^2b}{2ac}$

68. Деление многочлена на одночлен.

Пусть требуется разделить многочлен $a + b - c$ на одночлен m, что можно выразить так:

$$(a + b - c) : m, \quad \text{или} \quad \frac{a+b-c}{m},$$

Многочлен $a + b - c$ есть алгебраическая сумма, а чтобы разделить алгебраическую сумму на какое-нибудь число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно; поэтому:

$$\frac{a+b-c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

В этом можно убедиться и поверкою: умножив многочлен ${}^a/_m + {}^b/_m - {}^c/_m$ на делитель m, мы получим делимое $a + b - c$

Правило. ***Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.***

Конечно, деление членов многочлена на одночлен производят по правилу деления одночленов.

Примеры.

1) $(20a^3 - 8a^2 - a) : 4a = 5a^2 - 2a - \frac{1}{4}$.

2) $(4x^2 - 2x + 10) : 2x = 2x - 1 + \frac{5}{x}$.

3) $\left(\frac{1}{2}x^3 - 0,3x^2 + 1\right) : 2x^2 = \frac{1}{4}x - 0,15 + \frac{1}{2x^2}$.

69. Деление одночлена на многочлен. Пусть требуется одночлен ***a*** разделить на многочлен ***b*+ *c*—*d***. Частное от такого деления не может быть выражено ни целым одночленом, ни целым многочленом, так как если допустим, что частное равно какому-нибудь целому одночлену или целому многочлену, то произведение этого частного на многочлен ***b*+ *c*—*d*** дало бы тоже многочлен, а не одночлен, как требуется делением. Частное от деления ***a*** на ***b*+ *c*—*d*** может быть только обозначено знаками деления:

$$a : (b + c - d), \text{ или } \frac{a}{b + c - d}$$

70. Деление многочлена на многочлен. Частное от деления многочлена на многочлен только в редких случаях можно виразить в виде целого многочлена. Напр.:

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b$$

так как $(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Вообще же подобные частные можно только обозначить знаком деления. Напр., частное от деления $a - b + c$ на $d - e$ выразится так:

$$\frac{a - b + c}{d - e}, \text{ или } (a - b + c) : (d - e).$$

Выразить частное в виде целого многочлена иногда удастся тогда, когда оба многочлена расположены по степеням одной и той же буквы. Покажем, как это сделать, на следующем примере:

$$(5x^2 - 19x^3 + 17x + 6x^4 - 4) : (1 - 5x + 3x^2).$$

Напишем оба многочлена по убывающим степеням буквы ***x*** и расположим деление так, как оно располагается при делении целых чисел:

$$\begin{array}{l rrrrr|l}
 & 6x^4 & -\,19x^3 & +\,5x^2 & +\,17x & -\,4 & 3x^2 - 5x + 1 \\
 & \underset{-}{\pm}6x^4 & \underset{+}{\mp}\,10x^3 & \underset{-}{\pm}\,2x^2 & & & \overline{2x^2 - 3x - 4} \\
\hline
\text{1-й остаток} \ldots & & -\,9x^3 & +\,3x^2 & +\,17x & -\,4 & \\
 & & \underset{+}{\mp}\,9x^3 & \underset{-}{\pm}\,15x^2 & \underset{+}{\mp}\,3x & & \\
\hline
\text{2-й остаток} \ldots\ldots & & & -\,12x^2 & +\,20x & -\,4 & \\
 & & & \underset{+}{\mp}\,12x^2 & \underset{-}{\pm}\,20x & \underset{+}{\mp}\,4 & \\
\hline
\text{3 й остаток} & & & \ldots\ldots 0 & & &
\end{array}$$

Предположим, что искомое частное равно какому-нибудь многочлену и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающим степеням буквы ***x***.

Делимое должно равняться произведению делителя на частное. Из умножения расположенных многочленов известно (§ 58), что высший член произведения равен произведению высшего, члена множимого на высший член множителя. В делимом высший член есть первый, в делителе и частном высшие члены тоже первые. Значит, 1-й член делимого ($6x^4$) должен быть произведением 1-го члена делителя ($3x^2$) на 1-й член частного. Отсюда следует: чтобы найти 1 й член частного, достаточно разделить 1-й член делимого на 1-й член делителя. Разделив, находим 1-й член частного $2x^2$. Пишем его под чертою в частном.

Умножим все члены делителя на 1-й член частного и полученное произведение вычтем из делимого. Для этого напишем его под делимым так, чтобы подобные члены стояли под подобными, и у всех членов вычитаемого переменим знаки на обратные. Получим после вычитания 1-й остаток. Если бы этот остаток оказался равным нулю, то это значило бы, что в частном никаких других членов, кроме найденного 1-го, нет, т. е. что частное есть одночлен. Если же, как в нашем примере, 1-й остаток не есть нуль, то будем рассуждать так.

Делимое есть произведение всех членов делителя на каждый член частного. Мы вычли из делимого произведение всех членов делителя на 1-й член частного; следовательно, в 1-м остатке заключается произведение всех членов делителя на 2-й, на 8-й и следующие члены частного. Высший член в остатке есть 1-й; высший член делителя тоже 1-й; высший член в частном (не считая 1-го) есть 2-й член. Значит, 1-й член остатка ($—9x^3$) должен равняться произведению 1-го члена делителя на 2-й член частного. Отсюда заключаем: чтобы найти 2-й член частного, достаточно разделить 1-й член 1-го остатка на 1-й член делителя. Разделив, находим 2-й член частного $— 3x$. Пишем его в частном.

Умножим на 2-й член частного все члены делителя и полученное произведение вычтем из 1-го остатка. Получим 2-й остаток. Если этот остаток равен нулю, то деление окончено; если же, как в нашем примере, 2-й остаток не равен нулю, то будем рассуждать так.

2-й остаток есть произведение всех членов делителя на 3-й, на 4-й и следующие члены частного. Так как из этих членов частного высший есть 3-й, то, подобно предыдущему, 3-й член частного найдем, если 1-й член 2-го остатка разделим на 1-й член делителя. Разделив, находим **— 4**. Умножив на **—4** все члены делителя и вычтя произведение из остатка, получим 3-й остаток. В нашем примере этот остаток оказался нулем; это показывает, что в частном других членов, кроме найденных, не может быть. Если бы 3-й остаток был не 0, то подобно предыдущему, надо было бы делить 1-й член этого остатка на 1-й член делителя; от этого получился бы 4-й член частного, и т. д.

Можно было бы расположить делимое и делитель по возрастающим степеням одной и той же буквы и затем поступать так, как сейчас было сказано; при этом пришлось бы основываться на том, что низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя.

71. Примеры.

$$\text{а)}\ \begin{array}{l|l} 28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a^2 \\ \cline{2-2} \text{,,}\quad - \ 8ax^3 + 20a^2x^2 & 4x^2 - 3ax \\ \cline{1-1} \quad - 21ax^3 - \ 6a^2x^2 + 15a^3x & \\ \qquad \text{,,} \quad + \ 6a^2x^2 - 15a^3x & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Мы здесь не писали произведений 1-го члена делителя на 1-й, на 2-й и т. д. члены частного, потому что эти произведения всегда равны тем членам, под которыми они подписываются, и при вычитании всегда сокращаются. Обыкновенно так и делают.

Кроме того, подписывая вычитаемые, мы писали их прямо с обратными знаками.

$$\text{б) }\begin{array}{r|l} x^3-a^3 & x-a \\ \underline{\text{„}+ax^2} & \overline{x^2+ax+a^2} \\ ax^2-a^3 & \\ \underline{\text{„}+a^2x} & \\ a^2x-a^3 & \\ \underline{\text{„}+a^3} & \\ 0 & \end{array} \qquad \text{в) }\begin{array}{r|l} x^4-a^4 & x-a \\ \underline{\text{„}+ax^3} & \overline{x^3+ax^2+a^2x+a^3} \\ ax^3-a^4 & \\ \underline{\text{„}+a^2x^2} & \\ a^2x^2-a^4 & \\ \underline{\text{„}+a^3x} & \\ a^3x-a^4 & \\ \underline{\text{„}+a^4} & \\ 0 & \end{array}$$

Подобным образом можем убедиться, что разности $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6$... и вообще $x^m - a^m$ делятся без остатка на разность $x - a$, т. е. ***что разность одинаковых степенен двух, чисел делится на разность этих чисел без остатка***.

72. Признаки невозможности деления многочленов. Из описанного процесса видно, что деление многочлена на многочлен нельзя выполнить в следующих случаях:

а) ***Если показатель главной буквы в высшем члене делимого меньше показателя той же буквы в высшем члене делителя, потому что тогда нельзя получить высшего члена частного.***

б) ***Если показатель главной буквы в низшем члене делимого меньше показателя. той же буквы в низшем члене делителя, потому что тогда нельзя подучить низшего члена частного.***

в) Если показатели главной буквы в высшем и низшем членах делимого не меньше, соответственно, показателей этой буквы в высшем и низшем членах делителя, то еще нельзя сказать, чтобы деление было возможно. В этом случае, чтобы судить о возможности или невозможности деления, надо приступить к выполнению самого действия и продолжать его до тех пор, пока окончательно не убедимся в возможности или невозможности получить частное в виде многочлена.

При этом надо различать 2 случая:

I. Когда многочлены расположены по убывающим степеням главной буквы, то продолжают действие до тех пор, пока в остатке не получится 0 (тогда деление возможно и закончено), или пока не дойдут до такого остатка, 1-й член которого содержит главную букву с показателем меньшим, чем показатель 1-го члена делителя (тогда деление невозможно). Напр.:

$$\begin{array}{r|l} 10a^4-2a^3\qquad+3a+4 & 2a^2-1 \\ \underline{\text{„}\qquad+5a^2\qquad\qquad} & \overline{5a^2-a+{}^5/_2} \\ -2a^3+5a^2+3a\quad & \\ \underline{\text{„}\qquad-a\quad} & \\ 5a^2+2a+4 & \\ \underline{\text{„}\qquad+{}^5/_2} & \\ 2a+6^1/_2 & \end{array}$$

Деление невозможно, потому что мы дошли до такого остатка, у которого 1-й член не делится на 1-й член делителя.

II. Когда многочлены расположены по возрастающим степеням, то, сколько бы мы ни продолжали деление, никогда не получим такого остатка, у которого показатель 1-го члена быд бы меньше показателя 1-го члена делителя, потому что при таком расположении показатели главной буквы в первых членах остатков идут увеличиваясь. Напр.:

$$\begin{array}{r|l} 4+3a \qquad\quad -2a^3+10a^4 & -1+2a^2 \\ \cline{2-2} ,, \qquad +8a^2 \qquad\qquad\qquad & -4-3a-8a^2 \\ \hline 3a+8a^2-2a^3 \qquad\quad & \\ ,, \qquad\qquad +6a^3 \qquad\quad & \\ \hline 8a^2+4a^3+10a^4 & \\ ,, \qquad\qquad +16a^4 & \\ \hline 4a^3+26a^4 & \end{array}$$

Продолжая действие дальше, мы получили бы в частном член — $4a^3$, но если бы возможно было получить целое частное (без остатка), то последний член его должен был бы быть $5a^2$ (от деления высшего члена делимого на высший член делителя); значит, деление невозможно.

Замечание. О делении многочленов изложено более подробно во 2-й части, § 390 и след.

Глава пятая.

Разложение на множители.

73. Предварительное замечание. Говоря об алгебраическом делении, мы указывали, что в некоторых случаях частное можно только обозначить знаком деления. Получаемые при этом выражения, вроде таких:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{2x}{3a}, \quad \frac{x^2-4x+y^2}{x+y}$$ и т. п.,

принято называть алгебраическими дробями по сходству этих выражений с арифметическими дробями.

Мы вскоре увидим, что алгебраические дроби, подобно арифметическим, могут быть иногда упрощены посредством сокращения (т.е. посредством деления) делимого и делителя на их общие множители, если таковые окажутся. Для того, чтобы такое сокращение возможно было производить без затруднения, надо научиться разлагать алгебраические выражения на множители (подобно тому, как в арифметике для сокращения дробей надо уметь разлагать целые числа на составляющие их множители).

74. Разложение целых одночленов. Возьмем какой-нибудь целый одночлен, напр. $6a^2b^3$. Так как он представляет собой произведение, то по одному его виду его сразу можно разложить на составляющие множители. Так:

$$6a^2b^3 = 2 \cdot 3\,(aa)\,(bbb) = 2 \cdot 3aabbb.$$

Соединяя эти сомножители в какие-нибудь группы (пользуясь сочетательным свойством умножения), мы можем для этого одночлена указать разнообразные разложения, напр.:

$$6a^2b^3=(6a)(ab^3)=(2a^2b)(3b^2) = (3ab^2)(2ab) \text{ и т. п.}$$

75. Разложение многочленов. Укажем простейшие случаи, когда многочлен может быть разложен на множители.

а) Так как $(a + b - c)\, m = am + bm - cm$, то и наоборот:

$$am + bm - cm = (a + b - c)\, m.$$

Таким образом, ***если все члены многочлена содержат общий множитель, то его можно вынести за скобки.***

Напр.: 1) $x^6 - 2x^2 + 3x = x(x^5 - 2x + 3)$.

2) $16a^2 - 4a^3 = 4a^2(4 - a)$.

3) $5m(x - 1) + 3n\,(x - 1) = (x - 1)\,(5m - 3n)$.

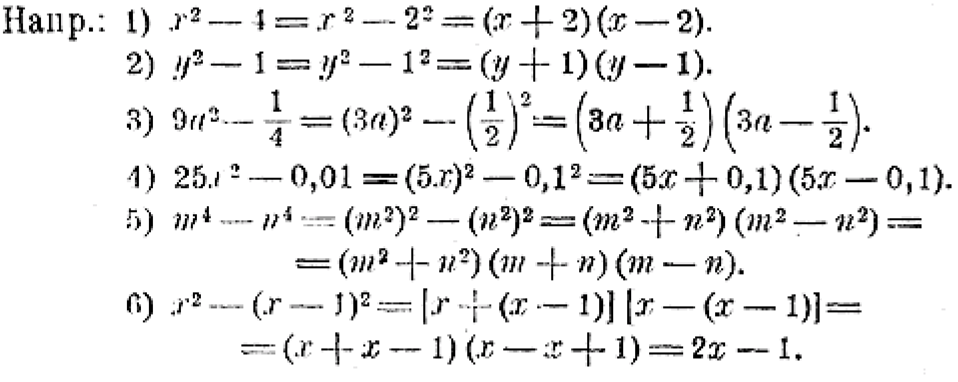
б) Так как

$$(a+ b)(a-b)=a^2 - b^2$$

то и наоборот:

$$a^2 - b^2 = (a+ b)(a-b)$$

Таким образом, ***двучлен, представляющий собой квадрат одного числа без квадрата другого числа, можно заменить произведением суммы этих чисел на их разность.***



Напр.: 1) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$.

2) $y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1)$.

3) $9a^2 - \frac{1}{4} = (3a)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3a + \frac{1}{2}\right)\left(3a - \frac{1}{2}\right)$.

4) $25x^2 - 0,01 = (5x)^2 - 0,1^2 = (5x + 0,1)(5x - 0,1)$.

5) $m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) =$
$= (m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$.

6) $x^2 - (x - 1)^2 = [x + (x - 1)]\,[x - (x - 1)] =$
$= (x + x - 1)(x - x + 1) = 2x - 1$.

в) Так как $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, то и наоборот:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) \text{ и}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 == (a - b)\,(a - b)\ ,$$

Значит, трехчлен, представляющий собой ***сумму квадратов каких-нибудь двух чисел, увеличенную или уменьшенную на удвоенное произведение этих чисел,***

можно заметешь квадратом суммы или разности этих чисел.

Примеры.

1) $a^2 + 2a + 1$. Так как $1 = 1^2$ и $2a = 2a \cdot 1$, то

$$a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2.$$

2) $x^4 + 4 - 4x^2$. Здесь $x^4 = (x^2)^2$, $4 = 2^2$ ***и*** $4x^2 = 2x^2 \cdot 2$;

поэтому: $x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2$. Можно также написать, что

$x^4 + 4 - 4x^2 = (2 - x^2)^2$, так как двучлены .$x^2 - 2$ и $2 - x^2$, будучи возвышены в квадрат, дают трехчлены, отличающиеся только порядком членов:

$$(x^2 - 2)^2 = x^4 + 4 - 4x^2; \qquad (2 - x^2)^2 = 4 - 4x^2 + x^4.$$

3) $-x + 25x^2 + 0{,}01$. Здесь есть два квадрата: $25x^2 = (5x)^2$ и $0{,}01 = 0{,}1^2$. Удвоенное произведение чисел 5x и 0,1 составляет: $2 \cdot 5x \cdot 0{,}1 = x$. Так как в данном трехчлене оба квадрата стоят со знаком +, а удвоенное произведение (т. е. x) со знаком —, то

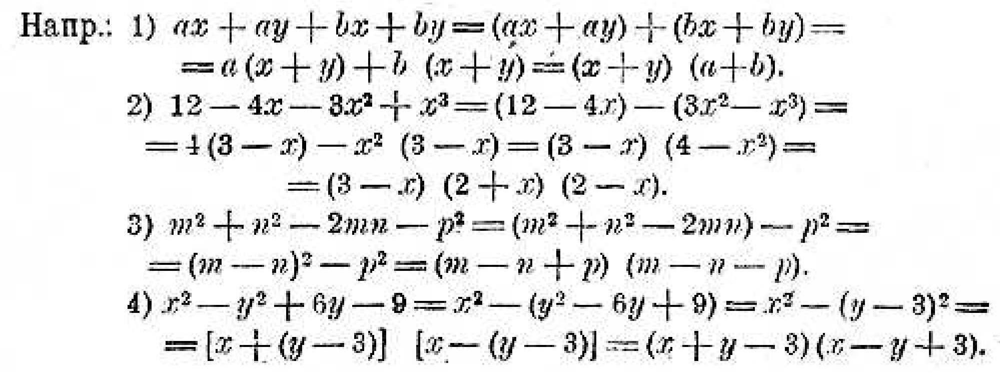
$$-x + 25x^2 + 0{,}01 = 25x^2 - x + 0{,}01 = (5x - 0{,}1)^2 = (0{,}1 - 5x)^2.$$

4) $-x^2 - y^2 + 2xy$. Вынесем знак — за скобки: $-(x^2 + y^2 - 2xy)$. Трехчлен, стоящий в скобках, очевидно, есть $(x - y)^2$.

Значит:

$$-x^2 - y^2 + 2xy = -(x^2 + y^2 - 2xy) = -(x - y)^2 = -(y - x)^2.$$

г) Иногда многочлен можно разложить на множители посредством соединения его членов в некоторые группы.



Напр.: 1) $ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) =$
$= a(x + y) + b\ (x + y) = (x + y)\ (a + b).$

2) $12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) =$
$= 4(3 - x) - x^2\ (3 - x) = (3 - x)\ (4 - x^2) =$
$= (3 - x)\ (2 + x)\ (2 - x).$

3) $m^2 + n^2 - 2mn - p^2 = (m^2 + n^2 - 2mn) - p^2 =$
$= (m - n)^2 - p^2 = (m - n + p)\ (m - n - p).$

4) $x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9) = x^2 - (y - 3)^2 =$
$= [x + (y - 3)]\ [x - (y - 3)] = (x + y - 3)(x - y + 3).$

Глава шестая.

Алгебраические дроби.

76. Отличие алгебраической дроби от арифметической. Как мы уже говорили раньше (§ 73), частное от деления двух алгебраических выражений в том случае, когда деление только указано, называется алгебраической дробью. Таковы, напр., выражения:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{a+b}{c-d};\quad \frac{2x^2-x+5}{x+2}$$

В таких выражениях делимое называется числителем, делитель — знаменателем, а то и другое — членами дроби.

Вспомним, что и арифметическая дробь тоже представляет собою частное от деления числителя на знаменатель. Так, дробь $^3/_5$ не только означает три таких доли, каких в единице содержится пять; дробь эта также означает пятую часть трех единиц, т. е. она есть частное от деления 3 на 5. Но отличие алгебраической дроби от арифметической состоит в том, что арифметическая дробь есть частное от деления одного целого положительного числа на другое целое положительное число, тогда как алгебраическая дробь есть частное от деления каких угодно чисел, как целых, так и дробных, как положительных, так и отрицательных. Напр., выражения:

$$\frac{^2/_5}{-3},\ \frac{-0{,}8}{2^1/_2},\ \frac{-10}{-^1/_3}$$

нельзя назвать дробями арифметическими; это будут частные случаи дробей алгебраических. Таким образом, алгебраическая дробь представляет собою понятие более широкое, чем дробь арифметическая; она включает в себе дробь арифметическую как частный случай.

Однако, несмотря на такое различие, все свойства арифметической дроби принадлежат, как это мы увидим в этой главе, и алгебраической дроби.

77. Основное свойство дроби. Так как дробь есть частное от деления числителя на знаменатель, а частное не изменяется от умножения (или деления) делимого и делителя на одно и то же число (кроме нуля) (Отдел1 § 34, е), то это же свойство принадлежит и дроби, т. е. ***величина дроби не изменяется, если её числитель и знаменатель умножим (или разделим) на одно и то же число (кроме нуля)***. Напр., если мы умножим числитель и знаменатель дроби

$$\frac{-^2/_3}{^7/_5}$$

положим, на $-^4/_9$, то будем иметь: прежняя дробь

$$-\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=-\frac{10}{21};$$

новая дробь:

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]:\left[\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]=\left(+\frac{8}{27}\right):\left(-\frac{28}{45}\right)=$$
$$=-\frac{8\cdot45}{27\cdot28}=-\frac{360}{756}=-\frac{10}{21};$$

мы видим, что величина дроби осталась прежняя.

Пользуясь этим свойством дроби, мы можем выполнять над алгебраическими дробями такие же преобразования, какие в арифметике указываются для дробей арифметических, т. е. мы можем сокращать, если возможно, дроби и приводить их, если нужно, к одному знаменателю. Рассмотрим эти преобразования и укажем еще некоторые, которые в арифметике не применяются.

78. Приведение членов дроби к целому виду. Если случится, что члены дроби сами содержат в себе дроби, то, умножая их на выбранное надлежащим образом число или на алгебраическое выражение, мы можем освободиться от этих дробей.

Примеры.

1) $\frac{{}^3/_4\,a}{b}$; умножив оба члена на 4, получим $\frac{3a}{4b}$

2) $\frac{7a}{2^3/_5 b} = \frac{7a}{{}^{13}/_5 b}$; „ „ „ 5, „ $\frac{35a}{13b}$

3) $\frac{{}^2/_3\,m}{{}^7/_8\,n}$; „ „ „ 24 „ $\frac{16m}{21n}$

4) $\frac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$ „ „ „ x „ $\frac{ax^2-x}{x-1}$

79. Перемена знаков у членов дроби. Переменить знак на противоположный перед числителем и знаменателем дроби — это все равно, что умножить их на —1, от чего величина дроби не изменится. Так:

$$\frac{-8}{-4} = 2 \text{ и } \frac{+8}{+4} = 2; \ \frac{-10}{+2} = -5 \text{ и } \frac{+10}{-2} = -5.$$

Заметим, что если переменим знак перед каким-нибудь одним членом дроби и в то же время переменим знак перед самою дробью, то величина дроби тоже не изменится; напр.:

$$\frac{-10}{+2} = -5; \ -\frac{-10}{-2} = -5; \ -\frac{+10}{+2} = -5.$$

Этими свойствами дроби можно иногда воспользоваться для некоторого ее преобразования; напр.:

$$\frac{m^2-n^2}{n-m} = \frac{m^2-n^2}{-(m-n)} = -\frac{(m+n)(m-n)}{m-n} = -(m+n).$$

80. Сокращение дробей. Чтобы сократить алгебраическую дробь, надо, если возможно, предварительно найти такое алгебраическое выражение, на которое оба члена дроби делятся, и затем их разделить на это выражение. Рассмотрим, как это всего удобнее делать в следующих двух случаях.

а) Возьмем дробь, у которой оба члена — целые одночлены; напр.:

$$\frac{12a^2x^3}{20ax^2}$$

Коэффициенты **12** и **20** делятся на 4, а буквенные выражения делятся на ***a*** и на ***x*^{2}**, Значит, эту дробь можно сократить на ***4ax***^{2}:

$$\frac{12a^2x^3}{20ax^2} \overset{4ax^2}{\overbrace{=}} \frac{3ax}{5} = \frac{3}{5}\,ax$$

(над дробью мы написали те общие множители, на которые дробь сокращаем; вместо деления ***3ax*** на **5** мы разделили на **5** только коэффициент **3**).

б) Если у дроби числитель или знаменатель (или тот и другой)—многочлены, то надо предварительно разложить эти многочлены на множители (так, как было указано в § 75); если в числе их окажутся одинаковые, то на них дробь можно сократить.

Примеры.

$$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2} = \frac{2x\,(3x+4y)}{3y\,(3x+4y)} = \frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2-1}{2x+2} = \frac{(x+1)\ (x-1)}{2(x+1)} = \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}\,(x-1)$$

(вместо деления на 2 поставлено умножение на $^1/_2$ что равносильно делению на 2).

81. Приведение дробей к общему знаменателю,

а) Пусть требуется привести к общему знаменателю дроби со знаменателями, выраженными цифрами, напр, такие:

$$\frac{a}{3},\ \frac{2a^2}{15},\ \frac{5a^2}{18}$$

Для этого разложим знаменатели на простые множители:

$$3; \qquad 15 = 3•5; \qquad 18 = 2•3•3$$

и найдем их наименьшее кратное; это будет 2 • 3 • 3 • 5 = 90. Теперь найдем для каждого знаменателя дополнительный множитель, на который надо умножить этот знаменатель, чтобы получить вместо него 90. Эти дополнительные множители будут:

$$90:3 = 30;\ 90:15 = 6,\ 90:18 = 5.$$

Чтобы дроби не изменили своей величины, надо и числители умножить на те же числа, на которые умножаем знаменатели:

$$\frac{a}{3} \overset{30}{\overbrace{=}} \frac{30a}{90};\quad \frac{2a^2}{15} \overset{6}{\overbrace{=}} \frac{12a^2}{90};\quad \frac{5a^2}{18} \overset{5}{\overbrace{=}} \frac{25a^2}{90}$$

(над дробями написаны дополнительные множители).

б) Возьмем теперь дроби, у которых знаменатели — буквенные одночлены; напр.:

$$\frac{a}{2b},\ \frac{c}{3ab},\ \frac{d}{5ab^2}$$

За общий знаменатель можно, очевидно, взять ***30ab*^{2}**. Дополнительными множителями тогда будут: ***15ab, 10b*** и **6**:

$$\overset{15ab}{\frac{a}{2b}} = \frac{15a^2b}{30ab^2};\quad \overset{10b}{\frac{c}{3ab}} = \frac{10bc}{30ab^2};\quad \overset{6}{\frac{d}{5ab^2}} = \frac{6d}{30ab^2}.$$

в) Далее возьмем дроби, у которых знаменатели многочлены; напр.:

$$\frac{x}{a-b},\quad \frac{y}{a+b},\quad \frac{z}{a^2-b^2}$$

Разложим каждый знаменатель на множители. Первые два не разлагаются, а третий = ***(a + b) (a — b)***. Значит, общим знаменателем будет ***a*^{2} — *b*^{2}**, и мы получим:

$$\overset{a+b}{\frac{x}{a-b}} = \frac{ax+bx}{a^2-b^2};\quad \overset{a-b}{\frac{y}{a+b}} = \frac{ay-by}{a^2-b^2};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

г) Может, случиться, что никакая пара знаменателей не имеет общих множителей. Тогда надо поступить так, как это делается в подобном случае в арифметике, а именно: умножить числитель и знаменатель каждой дроби на произведение знаменателен всех остальных дробей. Напр.:

1) $$\frac{a}{3m},\ \frac{2b}{5n},\ \frac{3c}{2p};\quad \frac{a\cdot 5n\cdot 2p}{3m\cdot 5n\cdot 2p},\ \frac{2b\cdot 3m\cdot 2p}{5n\cdot 3m\cdot 2p},\ \frac{3c\cdot 3m\cdot 5n}{2p\cdot 3m\cdot 5n},$$

т. е.

$$\frac{10anp}{30mnp},\ \frac{12bmp}{30mnp},\ \frac{45cmn}{30mnp}.$$

2) $$\frac{a}{a+b},\ \frac{b}{a-b};\quad \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)},\ \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)},$$

т. е.

$$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2},\ \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}.$$

82. Сложение и вычитание дробей. По правилу деления многочлена на одночлен (§ 68) мы можем написать:

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m};\quad \frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

Читая эти равенства справа налево, находим:

1) ***чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, можно сложить их числители и под суммою подписать тот же знаменатель***;

2) ***чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, можно вычесть их числители и под разностью подписать тот же знаменатель;***

Если данные для сложения или вычитания дроби имеют разные знаменатели, то предварительно их следует привести к одному знаменателю. Напр.:

$$1)\ \frac{\overset{df}{\smile}\,a}{b}+\frac{\overset{bf}{\smile}\,c}{d}+\frac{\overset{bd}{\smile}\,e}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$$

$$2)\ \frac{3m^2\overset{2b}{\smile}}{10a^2bc}-\frac{5n^2\overset{5ac}{\smile}}{4ab^2}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}$$

$$3)\ \frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x-2=2(x-1) & \text{доп. множ.}=x+1 \\ \underline{2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1)} & \quad ,, \qquad ,, \ = \quad 1 \\ \quad \text{Общ. знам. } 2(x+1)(x-1) & \end{array}$$

В результате вычитания получим:

$$\frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$$

83. Умножение дробей. ***Чтобы умножить дробь на дробь можно умножить числитель на числитель и знаменатель на знаменатель и первое произведение взять числителем, а второе знаменателем,*** т. е.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Напомним объяснение этого правила в применении к дробям арифметическим. Пусть дано умножить $^2/_3$ • $^4/_5$ Это значит: найти $^4/_5$ от $^2/_3$ (напр., найти $^4/_5$ длины, равной $^2/_3$ метра). Для этого надо сначала найти $^1/_5$ от $^2/_3$ а затем $^4/_5$ от $^2/_3$. Чтобы найти $^1/_5$ от $^2/_3$ надо $^2/_3$ уменьшить в 5 раз; получим $^2/_{15}$. Чтобы найти теперь $^4/_5$ от $^2/_3$, надо $^2/_{15}$ увеличить в 4 раза; получим $^8/_{15}$. Таким образом:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}$$

Теперь мы проверим это правило и для дробей алгебраических, когда числа ***a, b, c*** и ***d*** будут какие угодно. Предположим сначала, что все эти числа положительные, но не целые, а дробные. Пусть, напр.:

$$a={}^2/_3,\ b={}^7/_8,\ c={}^5/_6\ \text{ и }\ d={}^9/_4.$$

Подставим эти числа в равенство (1), вычислим отдельно его левую и его правую части и сравним результаты, которые получим (при вычислении будем руководствоваться правилами деления и умножения арифметических дробей):

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}:\frac{7}{8}=\frac{2\cdot8}{3\cdot7};\quad \frac{c}{d}=\frac{5}{6}:\frac{9}{4}=\frac{5\cdot4}{6\cdot9};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{2\cdot8}{3\cdot7}\cdot\frac{5\cdot4}{6\cdot9}=\frac{2\cdot8\cdot5\cdot4}{3\cdot7\cdot6\cdot9}$$

(окончательного вычисления производить не будем).

Теперь найдем правую часть равенства (1):

$$ac=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2\cdot5}{3\cdot6};\quad bd=\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7\cdot9}{8\cdot4};$$

$$\frac{ac}{bd}=\frac{2\cdot5}{3\cdot6}:\frac{7\cdot9}{8\cdot4}=\frac{2\cdot5\cdot8\cdot4}{3\cdot6\cdot7\cdot9}$$

Сравнивай полученные результаты, мы видим, что они одинаковы, так как (согласно переместительному свойству умножения целых чисел) 2•8•5•4 = 2•5•8•4 и 3•7•6•9 = 3•6•7•9. Следовательно, равенство (1) остается верным и в этом случае.

Теперь допустим, что какое-нибудь из чисел a, b, c и d сделалось отрицательным. пусть напр., a = — $^2/_3$ (***b, c*** и ***d*** имеют прежние значения). Тогда дробь $^a/_b$ сделается отрицательной, и вся левая часть равенства (1) также будет отрицательное число. В правой части произведение ***ac*** сделается отрицательным, и потому вся правая часть тоже будет отрицательное число. Абсолютная же величина у левой части и у правой останется прежняя. Значит, равенство (1) не нарушится. Так же убедимся, что равенство (1) останется верным и тогда, когда и другие числа сделаются отрицательными.

Все то, что мы сейчас говорили о частном примере, может быть повторено о всяком другом примере; значит, равенство (1) верно при всяких значениях букв ***a, b, c*** и ***d***.

84. Деление дробей. Чтобы разделить дробь на дробь, можно умножить числитель первой дроби на знаменатель второй, знаменатель первой на числитель второй и первое произведение взять числителем, а второе знаменателем, т. е.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Что это равенство верно для всяких чисел ***a, b, c, d***, можно убедиться простою поверкою деления: умножив частное на делитель (по доказанному выше правилу умножения дробей), мы получим делимое:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}\overset{cd}{=}\frac{a}{b}$$

85. Замечания. 1) Так как $^{ad}/_{bc}={}^a/_b\cdot{}^d/_c$, то правило деления можно высказать иначе: ***чтобы разделить дробь на дробь, можно первую дробь умножить на обратную второй.***

2) Всякое целое алгебраическое выражение можно рассматривать как дробь, у которой числитель есть это целое выражение, а знаменателем служит 1; напр.,

$a={}^a/_1$; $3x^2=3x^2/1$ и т. п.

Поэтому данные нами правила действий над дробями можно применять и к таким случаям, когда какое-нибудь из данных выражений есть целое, стоит только это целое изобразить (хотя бы мысленно) дробью. Напр.:

$$3a^2-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^2}{1}-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^2b}{ab}-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^2b-2x}{ab};$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{1\cdot c}=\frac{ab}{c};$$

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a\cdot 1}{bc}=\frac{a}{bc}.$$

86. Освобождение уравнения от знаменателей. Пусть дано уравнение:

$$\frac{5x-1}{2}-\frac{7x-2}{10}=6\,{}^3/_5-\frac{x}{2}$$

Обратим **6 $^3/_5$** в неправильную дробь и приведем все члены к одному знаменателю:

$$\frac{25x-5}{10}-\frac{7x-2}{10}=\frac{66}{10}-\frac{5x}{10}$$

Теперь умножим все члены на 10; тогда знаменатель 10 уничтожится, и мы получим уравнение без дробей:

$$25x-5-(7x-2)=66-5x$$

Для избежания ошибки мы заключили двучлен ***7x— 2*** в скобки, чтобы показать, что знак —, стоявший в данном уравнении перед второю дробью, относится не к ***7x***, а ко всему двучлену ***7x— 2*** (к числителю второй дроби). Раскрыв эти скобки по правилу вычитания, получим:

$$25x-5-7x+2=66-5x;$$

$$25x-7x+5x=66+5-2;\ \ 23x=69;\ \ x=3.$$

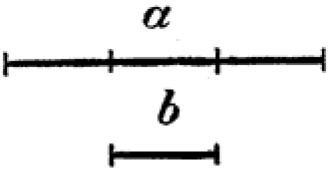
Таким образом, ***чтобы освободить уравнение от знаменателей, надо привести все члены его к одному знаменателю и затем умножить их на этот знаменатель*** (другими словами, ***отбросить его***).

Глава седьмая.

Отношение и пропорция.

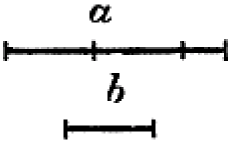
87. Отношение. Часто приходится сравнивать между собою одну величину с другой величиной, однородной ей, с целью узнать, сколько раз первая величана содержит в себе вторую.

Напр., мы с этою целью можем сравнивать вес какого-нибудь предмета с весом другого предмета, цену одного товара с ценою другого товара и т. п. Во всех таких случаях результат сравнения выражается числом, которое может быть и целым, и целым с дробью, и дробным. Пусть, напр., мы сравниваем длину ***a*** с другою длиною ***b***, и результат сравнения оказался целым числом 3 .

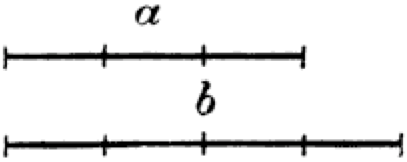


Это значит, что длина ***a*** содержит в себе длину ***b*** ровно 3 раза (другими словами, ***a*** больше ***b*** в 3 раза).

Если результат сравнения есть целое число с дробью, напр. $2^1/_2$, то это значит, что ***a*** содержит в себе ***b*** $2^1/_2$ раза (***a*** больше ***b*** в $2^1/_2$ раза).



Если, наконец, результат сравнения есть дробь, положим $^3/_4$, то ***a*** не содержит в себе ***b*** ни одного раза, а составляет только $^3/_4$ ***b***.



Во всех этих случаях результат сравнения есть отвлеченное число, на которое надо умножить вторую величину, чтобы получить первую. Так, во взятых нами примерах:

$$a = b \cdot 3 ; \quad a = b \cdot 2^1/_2 ; \quad a = b \cdot {}^3/_4 ;$$

Результат сравнения одной величины с другою однородною величиною принято называть отношением первой величины ко второй. Значит, ***отношением одной величины к другой однородной величине называется отвлеченное число, на которое надо умножить вторую величину, чтобы получить первую.*** Так как это число есть частное от деления первой величины на вторую, то отношение обозначается знаком деления. Так, можно писать:

$^a/_b$ (или $a : b$) =3; $^a/_b = 2^1/_2$ $^a/_b = {}^3/_4$. и т. п.

Величины, между которыми берется отношение, называются членами отношения, причем первая величина называется предыдущим членом, а вторая — последующим.

Если величины измерены одною и тою же единицей и выражены числами, то отношение их можно заменить отношением этих чисел. Напр., отношение двух весов, одного в 80 г, а другого в 15 г, равно отношению чисел 80 и 15, т. е. оно равно частному 80:15, что составляет $5^1/_3$; равным образом отношение угла в 30° к прямому углу равно частному 30:90, т. е. дроби $^1/_3$

Сравнивать между собою приходится большею частью величины положительные;

поэтому оба члена отношения и само отношение мы будем предполагать выраженными числами положительными.

88. Зависимость между отношением и его членами та же самая, какая существует между делимым, делителем и частным.

Так:

а) Предыдущий член равен последующему, умноженному на отношение (делимое равно делителю, умноженному на частное). Если, напр., отношение некоторого неизвестного числа x к числу **100** равно $2^{1}/_{2}$, то x = **100** • $2^{1}/_{2}$ = **250**.

б) Последующий член равен предыдущему, деленному на отношение (делитель равен делимому, деленному на частное). Так, если известно, что 15 : x = 5, то x = 15 : 5 = 3.

в) Отношение не изменится, если оба его члена умножим или разделим на одно и то же число (частное не изменится, если...).

89. Приведение членов отношения к целому виду. Умножая оба члена отношения на одно и то же число, мы можем отношение с дробными членами заменить отношением целых чисел. Так, отношение $^{7}/_{3}$: **5** по умножении его членов на 3 обратится в отношение целых чисел 7:15; отношение $^{9}/_{14}$: $^{10}/_{21}$ после умножения его членов на общий знаменатель 42 обратится также в отношение целых чисел 27 : 20.

90. Сокращение отношения. Если оба члена отношения — целые числа, делящиеся на какой-нибудь общий делитель, то такое отношение можно сократить. Так, отношение 42 : 12 по разделении.его членов на 6 будет 7:2.

91. Обратные отношения. Если мы переставим члены отношения, т. е. предыдущий член сделаем последующим, и наоборот, то получим новое отношение, которое называется обратным прежнему. Так, отношение метра к сантиметру обратно отношению сантиметра к метру; первое равно числу 100, второе равно обратному числу 0,01.

92. Пропорция. Заметив, что отношение килограмма к грамму равно 1000 и что отношение километра к метру также равно 1000, мы можем написать равенство:

$$\frac{\text{килограмм}}{\text{грамм}} = \frac{\text{километр}}{\text{метр}}$$

или килограмм : грамм = километр: метр, что читается так: отношение килограмма к грамму равно отношению километра к метру; или так: килограмм относится к грамму так, как километр относится к метру (или еще так: килограмм больше грамма во столько раз, во сколько раз километр больше метра).

Равенство двух отношений принято называть пропорцией. Конечно, величины, входящие в каждое отношение, должны быть однородны; так, в нашем примере величины первого отношения — веса, а величины второго отношения — длины.

Из четырех величин, составляющих пропорцию, первая и четвертая называются крайними членами, вторая и третья — средними членами, первая и третья — предыдущими, вторая и четвертая — последующими. Последняя величина называется также четвертой пропорциональной к первым трем величинам.

Мы будем предполагать, что все четыре члена пропорции выражены числами; такую пропорцию мы будем называть числовою.

93. Основное свойство числовой пропорции. Пусть мы имеем такие числовые пропорции:

$$^{21}/_{7} = {}^{15}/_{5} \text{ (каждое отношение = 3)}$$

и

$$\frac{2^1/_2}{^3/_4} = \frac{10}{3} \text{ (каждое отношение} = 3^1/_3)$$

Возьмем в каждой пропорции произведение крайних членов и произведение средних и сравним их между собою. В первой пропорции произведение крайних равно

$21 \cdot 5 = 105$, и произведение средних равно $7 \cdot 15 = 105$; во второй пропорции произведение крайних = $2\,^1/_2 \cdot 3 = 7\,^1/_2$ и произведение средних = $^3/_4 \cdot 10 = 7\,^1/_2$

Таким образом, в каждой из взятых пропорций произведение крайних членов равно произведению средних.

Чтобы показать, что свойство это принадлежит всякой числовой пропорции, возьмем пропорцию в буквенном виде:

$$^{a}/_{b} = {}^{c}/_{d}$$

Так как каждое из двух отношений, составляющих пропорцию, есть частное от деления предыдущего члена на последующий, то можно сказать, что пропорция есть равенство двух дробей. Приведем эти дроби к общему знаменателю ***bd***.

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{d}}{a}}{b} = \frac{\overset{\underset{\smile}{b}}{c}}{d}; \quad \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}$$

Умножим теперь обе части равенства на ***bd*** (от чего равенство не нарушится); тогда общий знаменатель сократится, и мы получлм равенство:

$$ad = cb,$$

выражающее, что во всякой числовой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Отсюда выходит, что каждый крайний член пропорции равен произведению средних, деленному на другой крайний, и каждый средний член пропорции равен произведению крайних, деленному на другой средний. Это дает нам возможность быстро решать уравнения, данные в виде пропорций; напр., из уравнения

$$^{10}/_{x} = {}^{45}/_{20}$$

выводим прямо: $x = {}^{10 \cdot 20}/_{45} = 4^4/_9$.

94. Обратное предложение. Положим, мы имеем 4 таких числа, что произведение двух из них равно произведению двух остальных, напр.:

5•12 = 30•2.

Такое равенство мы можем превратить в ряд пропорций. Для этого разделим обе части на каждое из таких произведений:

5•30; 5•2; 12•30; 12•2,

в которых один сомножитель взят из одного данного произведения, а другой — из другого. Тогда получим 4 других равенства (если равные числа разделим на равные, то получим равные), а именно:

$$\frac{5\cdot12}{5\cdot30}=\frac{30\cdot2}{5\cdot30};\qquad \frac{5\cdot12}{5\cdot2}=\frac{30\cdot2}{5\cdot2};\qquad \frac{5\cdot12}{12\cdot30}=\frac{30\cdot2}{12\cdot30};\qquad \frac{5\cdot12}{12\cdot2}=\frac{30\cdot2}{12\cdot2}$$

Сократив все эти дроби, найдем:

$$\frac{12}{30}=\frac{2}{5};\qquad \frac{12}{2}=\frac{30}{5};\qquad \frac{5}{30}=\frac{2}{12};\qquad \frac{5}{2}=\frac{30}{12}$$

Мы получим таким образом 4 пропорции, в которых крайними членами служат сомножители одного из данных произведений, а средними членами — сомножители другого данного произведения.

Подобно этому равенство 0,3 • 4 = 6 • 0,2 мы можем превратить в такие пропорции:

$$\frac{0{,}3}{6}=\frac{0{,}2}{4};\qquad \frac{0{,}3}{0{,}2}=\frac{6}{4};\qquad \frac{4}{6}=\frac{0{,}2}{0{,}3};\qquad \frac{4}{0{,}2}=\frac{6}{0{,}3};$$

или равенство: ***5x = 3y*** можем превратить в пропорции:

5:3 = y : x; ***x : y = 3 : 5***, и т. п.

Таким образом, если произведение двух чисел равно произведению двух других чисел, то из этих 4 чисел можно составить пропорции, беря сомножители одного произведения за крайние члены, а сомножители другого произведения за средние члены пропорций.

95. Следствие. Во всякой числовой пропорции можно переставить средние члены между собою, крайние члены между собою, или средние поставить на место крайних, и наоборот, так как от таких перестановок не нарушится равенство между произведением крайних и произведением средних и, следовательно, не нарушится пропорциональность чисел.

96. Среднее геометрическое. Возьмем пропорцию, в которой средние члены одинаковы; например:

33:12 = 12:4.

Повторяющийся член такой пропорции называется средним геометрическим числом двух остальных членов пропорции: 12 есть среднее геометрическое 36 и 4.

Таким образом, если требуется найти среднее геометрическое двух чисел ***a*** и ***b***, то, обозначив его буквой ***x***, мы можем написать пропорцию:

$$a : x = x : b$$

откуда

$$x^2 = ab$$

Значит, среднее геометрическое двух данных чисел есть такое третье число, квадрат которого равен произведению данных чисел. Напр., среднее геометрическое 25 и 4 равно 10, потому что $10^2 = 25 \cdot 4$ [3)].

97. Среднее арифметическое. Средним арифметическим нескольких данных чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число их. Напр., среднее арифметическое 4 чисел: 10, —2, —8 и 12 равно:

$$\frac{10+(-2)+(-8)+12}{4}=\frac{10-2-8+12}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

Среднее арифметическое обладает тем свойством, что если при сложении данных чисел мы заменим каждое из них средним арифметическим, то от этой замены сумма не изменится. Так, сумма чисел 10, — 2, —8 и 12 равна 12 и сумма 3+3+3+3 также равна 12. Положим, напр., что производительность фабрики в течение первых четырех месяцев текущего года, сравнительно с производительностью ее в декабре предыдущего года, повысилась: в январе на 10°/о, в феврале на —2%, в марте на —8% (значит, в последние 2 месяца производительность понизилась) и в апреле на +12%. Тогда можно сказать, что среднее повышение производительности за эти 4 месяца составляет 3% в месяц. Это надо понимать так, что производительность фабрики за все 4 месяца оказалась такая же, какая была бы, если бы она повышалась в каждый месяц одинаково, именно на 3% (сравнительно с декабрьской производительностью). В подобном же смысле говорят часто о среднем доходе, о средней скорости движения, о средней плотности населения и т. п. Во всех таких выражениях подразумевается, что речь идет о среднем арифметическом.

98. Производные пропорции. Из всякой пропорции, помимо перестановки ее членов, можно получить еще некоторые другие пропорции, называемые производными. Укажем две из них.

Если каждое из равных отношений, составляющих пропорцию, увеличим или уменьшим на 1, то равенство между отношениями, очевидно, не нарушится. Поэтому, если

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

то и

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \text{ и } \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1.$$

Приведя 1 к общему знаменателю с тою дробью, к которой она приложена или от которой вычтена, мы получим:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}\text{; или }\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad (1)$$

и

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d}\text{; или }\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}. \qquad (2)$$

Выведенные нами две производные пропорции мы можем высказать так: ***во всякой пропорции сумма или разность членов первого отношения относится к последующему члену этого отношения так, как сумма или разность членов второго отношения относится к последующему члену этого отношения.***

Разделим равенство (1) и (2) на данное равенство ${}^{a}/_{b} = {}^{c}/_{d}$ тогда знаменатели b и d сократятся, и мы получим еще две производные пропорции:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}, \qquad (3)$$

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}, \qquad (4)$$

которые можно высказать так: ***сумма или разность членов первого отношения относится к предыдущему члену этого отношения так, как сумма или разность членов второго отношения относится к предыдущему члену этого отношения.***

Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), найдем еще следующую производную пропорцию:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}, \qquad (5)$$

которую можно высказать так: ***сумма членов первого отношения относится к их разности так, как сумма членов второго отношения относится к их разности.***

Переставив средние члены в двух производных пропорциях, получим еще другие производные пропорции, которые полезно заметить:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d};\ \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d};\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c};\ \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c};\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}.$$

99. Свойство равных отношений. Возьмем несколько равных отношений, напр., таких:

${}^{30}/_{10} = {}^{6}/_{2} = {}^{15}/_{5}$ (каждое отношение =3).

Сложим все предыдущие члены между собою и все последующие члены между собою и посмотрим, в каком отношении находятся эти две суммы. Сумма предыдущих равна: 30 + 6 + 15 = 51; сумма последующих: 10 + 2 + 5 = 17. Мы видим, что отношение первой суммы ко второй равно тому же числу 3, какому равны данные отношения, так что можно написать:

$$\frac{30+6+15}{10+2+5}=\frac{30}{10}=\frac{6}{2}=\frac{15}{5} \qquad \text{(отношение } = 3\text{)}.$$

Чтобы показать, что это свойство общее, возьмем несколько равных отношений в буквенном виде:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots \qquad (\text{каждое отношение}=q).$$

Так как предыдущий член равен последующему члену, умноженному на отношение, то

$$a = bq, \qquad c = dq, \qquad e = fq\ , \ \ldots$$

и следовательно, $a + c + e + \ldots = bq + dq + fq + \ \ldots$

т. е. $a + c + e \ldots =q(b + d + f + \ldots)$

Разделим обе части этого равенства на сумму $b + d + f + \ldots$

$$\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}=q$$

$$q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots,$$

следовательно:

$$\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$$

Таким образом, ***если несколько отношений равны между собою, то сумма всех предыдущих членов их относится к сумме всех последующих, как какой-нибудь из предыдущих относится к своему последующему.***

Так как всякая пропорция состоит из двух равных отношений, то указанное свойство принадлежит также и пропорции.

100. Арифметическое применение. (Пропорциональное деление.) Пусть требуется число 60 разделить на три части пропорционально числам б, 7 и 8. Это надо понимать так, что требуется разделить 60 на такие три части ***x, y*** и ***z***, чтобы ***x*** так относился к 5, как ***y*** относится к 7 и как ***z*** относится к 8, т. е. чтобы

$$^{x}/_{5} = {}^{y}/_{7} = {}^{z}/_{8}$$

Применяя свойства равных отношений, найдем:

$$\frac{x+y+z}{5+7+8}=\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{8}$$

Но $x + y + z = 60$

значит:

$$\frac{60}{20}=\frac{x}{5};\ \frac{60}{20}=\frac{y}{7};\ \frac{60}{20}=\frac{z}{8}$$

Отсюда находим:

$$x=\frac{60\cdot 5}{20}=15,\ y=\frac{60\cdot 7}{20}=21\ \text{и}\ z=\frac{60\cdot 8}{20}=24$$

101. Геометрическое применение. Пусть два многоугольника подобны и стороны одного будут ***a, b, c, d,***..., а сходственные, стороны другого ***a', b', c', d',***... Тогда

$$a/a' = b/b' = c/c' = d/d' = \ldots$$

откуда

$$\frac{a+b+c+d+\ldots}{a'+b'+c'+d'+\ldots}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\ldots,$$

т. е. ***периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны***.

Замечание. Производными пропорциями и свойством равных отношений можно иногда пользоваться для скорейшего решения уравнения, данного в виде пропорции. Приведем примеры.

$$1)\ \frac{3-x}{x}=\frac{40}{7}$$

Составим производную пропорцию: сумма членов первого отношения относится к последующему члену того же отношения так, как . . .

Тогда получим:

$$3/x = 47/7$$

откуда

$$x = 21/47$$

$$2)\ \frac{a+x}{a-x}=\frac{m}{n}$$

Составим производную пропорцию: сумма членов первого отношения относится к их разности так, как . . . Тогда получим:

$$\frac{2a}{2x}=\frac{m+n}{m-n},\ \text{или}\ \frac{a}{x}=\frac{m+n}{m-n}$$

откуда

$$x=\frac{a(m-n)}{m+n}$$

$$3)\ \frac{a-x}{x}=\frac{x}{b-x}$$

Составим новую пропорцию: сумма предыдущих относится к сумме последующих так, как . . . :

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x}$$

Теперь составим производную пропорцию: сумма членов первого отношения относится к последующему члену этого отношения так, как . . . :

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{x}$$

откуда

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

Глава восьмая.

Пропорциональная зависимость (прямая и обратная).

102. Пропорциональная зависимость. Каждый из опыта знает, что если объем воды увеличится (или уменьшится) в каком-нибудь отношении, то и вес ее увеличится (или уменьшится) в том же отношении. Напр., 1 л воды весит 1 кг, 2 л воды весят 2 кг, $2^1/_2$ л воды весят $2^1/_2$ кг и т. д. (предполагается, конечно, что все прочие условия, влияющие на вес воды, остаются неизменными; напр., вода берется одинаково чистая, при одной и той же температуре и пр.). Такая зависимость между объемом воды и ее весом называется ***пропорциональною*** зависимостью. Вообще, если говорят, что две величины находятся между собою в пропорциональной зависимости (или пропорциональны друг другу), то это значит, что ***с увеличением (или уменьшением) одной из них в каком-нибудь отношении другая тоже увеличивается (или уменьшается) в таком же отношении***. Так, стоимость товара, продаваемого на вес, пропорциональна его весу; плата рабочим пропорциональна числу их (при одинаковых прочих условиях); величина дроби пропорциональна ее числителю (при неизменном знаменателе); площадь прямоугольника пропорциональна его основанию при неизменной высоте и пропорциональна его высоте при неизменном основании и т. п.

103. Выражение пропорциональной зависимости формулой. Положим, мы решаем такую задачу:

Поезд железной дороги, двигаясь равномерно, проходит каждый час 30 км. Какое пространство пройдет этот поезд в ***а*** часов (***а*** может быть числом целым и дробным)?

Пусть в ***а*** часов поезд пройдет ***х*** км.

Расположим данные и вопрос задачи так:

в 1 час проходится 30 км;

в ***а*** час „ ***х*** км.

При равномерном движении пространство, проходимое в течение какого-нибудь времени, пропорционально этому времени. Поэтому ***х*** должно быть более или менее 30 и во столько раз, во сколько ***а*** больше или меньше 1. Значит, мы можем записать пропорцию:

$$x : 30 = a : 1,$$

откуда

$$x = 30a.$$

Мы получили, таким образом, формулу, по которой можно вычислить пространство, пройденное в любое число ***a*** часов. Напр., в 2 часа будет пройдено 30 км • 2, в $3^1/_2$ часа 30 км • $3^1/_2$. в $^3/_4$ часа 30 км • $^3/_4$. Значит, в выведенной формуле числа ***x*** и ***a*** будут переменные (соответствующие друг другу), число же 30 постоянное (означающее пространство, проходимое поездом в 1 час, т. е. скорость движения).

Из задач, подобных приведенной сейчас, мы усматриваем, что если две величины пропорциональны, то численное значение одной из них равно некоторому постоянному числу, умноженному на соответствующее численное значение другой величины.

Обратно, если зависимость между двумя какими-нибудь переменными величинами, которые мы обозначим ***y*** и ***x***, выражается формулой вида $y = kx$, где ***k*** есть некоторое постоянное для этих величин число, то такие величины пропорциональны, так как из этой формулы видно, что с увеличением (или уменьшением) величины ***x*** в каком-нибудь отношении другая величина ***y*** тоже увеличивается (или уменьшается) и притом в том же самом отношении. Напр., как известно из геометрии, длина **C** окружности радиуса **R** выражается формулой:

$$\mathbf{C = 6{,}28R \quad (C = 2\pi R)},$$

в которой **R** и **C** - переменные величины, а **6,28** — постоянное число; тогда мы можем заключить, что длина окружности пропорциональна ее радиусу.

Постоянное число, входящее сомножителем в подобные формулы, называется коэффициентом пропорциональности тех переменных величин, к которым формула относится.

104. Обратная пропорциональная зависимость. Иногда случается, что две переменные величины зависят одна от другой так, что с увеличением одной из них другая уменьшается и притом уменьшается в таком же отношении, в каком первая увеличивается. Такие величины называются обратно пропорциональными (а величины просто пропорциональные называются иногда прямо пропорциональными). Напр., число часов, в течение которого поезд железной дороги проходит весь путь от Москвы до Ленинграда, обратно пропорционально средней скорости движения этого поезда, так как с увеличением скорости в $1^1/_2$ раза, в 2 раза..., вообще в некотором отношении, число часов, в течение которого поезд пройдет расстояние от Москвы до Ленинграда, уменьшится в $1^1/_2$ раза, в 2 раза..., вообще в том же отношении, в каком скорость увеличилась. Подобно этому вес товара, который можно купить на данную сумму денег, напр, на 100 руб., обратно пропорционален цене килограмма этого товара; время, в течение которого выполняется рабочими заданная им работа, обратно пропорционально числу этих рабочих (конечно, при условии, что все рабочие работают одинаково успешно); величина дроби обратно пропорциональна ее знаменателю (при постоянном числителе), и т. п.

Замечание. Для того, чтобы две зависящие друг от друга величины были пропорциональны (прямо или обратно), не достаточно только того признака, что с увеличением одной величины другая тоже увеличивается (для прямой пропорциональности), или что с увеличением одной величины другая уменьшается (для обратной пропорциональности). Напр., если какое-нибудь слагаемое увеличится, то и сумма увеличится; но было бы ошибочно сказать, что сумма пропорциональна слагаемому, так как если увеличим слагаемое, положим в 3 раза, то сумма хотя и увеличится, но не в 3 раза. Подобно этому, нельзя, напр., сказать, что разность обратно пропорциональна вычитаемому, так как если увеличится вычитаемое, положим в 2 раза, то разность хотя и уменьшится, но не в 2 раза. Нужно, чтобы увеличение или уменьшение обеих величин происходило в одинаковое число раз (в одинаковом отношении).

105. Выражение обратной пропорциональной зависимости формулой. Положим, мы решаем задачу: один рабочий может выполнить некоторую работу в 12 дней; во сколько дней сделают ту же работу a рабочих?

Обозначим искомое число буквой x и расположим для ясности данные и вопрос задачи так:

1 рабочий исполняет работу в 12 дней

a рабочих исполняют „ „ x дней.

Очевидно, что число дней, потребное для выполнения одной и той же работы, обратно пропорционально числу рабочих. Поэтому (x должно быть меньше 12 и во столько раз, во сколько a больше 1 (другими словами, во сколько 1 меньше a). Значит, отношение x :12 должно равняться не отношению a :1 , как это было бы при прямой пропорциональной зависимости, а обратному отношению 1 : a. Значит, мы можем написать пропорцию:

$$x :12 = 1 : a$$

откуда

$$x = {}^{12}/_{a} \ .$$

По этой формуле мы можем находить число дней x, потребное для исполнения данной работы, при всяком числе a рабочих; напр., 2 рабочих окончат работу в 12/2 дней, 3 рабочих в 12/3 дней и т. п. Значит, числа x и a в этой формуле переменные, а число 12 постоянное, означающее, во сколько дней исполняется работа одним рабочим.

Из задач, подобных решенной сейчас, мы можем усмотреть, что ***если две какие-нибудь величины (которые мы обозначим буквами x и y) обратно пропорциональны, то численное значение одной из них равно некоторому постоянному числу (обозначим его k), деленному на соответствующее значение другой величины***, т. е. $y = {}^{k}/_{x}$, если y и x представляют собою соответствующие значения этих величин.

Так как формулу $y = {}^{k}/_{x}$ можно представить так: $xy = k$, то зависимость между обратно пропорциональными величинами можно высказать еще иначе: ***если две величины обратно пропорциональны, то произведение двух соответствующих друг другу, численных значений этих величин равно постоянному числу.***

Обратно, если зависимость между двумя переменными величинами выражается формулой:

$$y = {}^{k}/_{x} \quad \text{или } xy = k.$$

где k есть постоянное число, то эти величины обратно пропорциональны, так как из формулы видно, что если величина x увеличивается в несколько раз, то величина y уменьшается во столько же раз.

Напр., из физики известно, что при неизменной температуре произведение объема V данной массы газа на его упругость h есть величина постоянная; это, другими словами, означает, что упругость данной массы газа обратно пропорциональна его объему (при одной и той же температуре).

Замечание. Равенство $y = {}^{k}/_{x}$ может быть написано иначе, так:

$$y = k \bullet {}^{1}/_{x}$$

В этом виде оно выражает, что величина y прямо пропорциональна величине дроби ${}^{1}/_{x}$. Значит, если число y обратно пропорционально числу x, то можно также сказать, что число y прямо пропорционально обратной величине числа x, т. е. ${}^{1}/_{x}$.

1) Иногда некоторым буквенным сомножителям придают особое значение, отличающее их от остальных. Такие сомножители обыкновенно пишутся в конце произведения и обозначаются последними буквами алфавита (x, y, z); тогда коэффициентом при них называют произведение всех остальных сомножителей. Так, положим, что в одночлене + $\mathbf{20}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}}$ буква $\boldsymbol{x}$ означает неизвестное уравнения, а буква $\boldsymbol{a}$ — какое-нибудь данное число; тогда произведение + $\mathbf{20}\boldsymbol{a}$ может быть названо коэффициентом при $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$.

2) Скобки и этом выражении означают, что число, равное $\mathbf{3}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}}$, надо умножить на число, равное **—** $\mathbf{5}\boldsymbol{abx}$. Если бы мы написали это выражение без скобок: $\mathbf{3}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}}$ **—** $\mathbf{5}\boldsymbol{abx}$, то это значило бы, что из числа, равного $\mathbf{3}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}}$, вычитается число, равное $\mathbf{5}\boldsymbol{abx}$.

3) Среднее геометрическое потому называется геометрическим (в отличие от среднего арифметического, о котором мы сейчас скажем), что оно часто встречается в геометрии (напр., катет есть средняя пропорциональная величина между всей гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы, и пр.).

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ.

Глава первая. **Понятие о функции и координатах.**
Глава вторая.**График пропорциональной зависимости (прямой и обратной).**
Глава третья. **График двучлена первой степени.**

Глава первая.

Понятие о функции и координатах.

106. Понятие о функции. Если какая-нибудь величина зависит от некоторой другой величины, то принято говорить, что первая величина есть функция второй (или от второй). Так вес воды, наполняющей какой-нибудь сосуд, конечно, зависит от вместимости этого сосуда (при изменении вместимости изменяется и вес воды); поэтому можно сказать, что этот вес есть функция вместимости сосуда; вес керосина, сгорающего в лампе, есть функция от времени, в течение которого горит лампа; длина хорды, проведенной в круге, есть функция расстояния этой хорды от центра круга, и т. д.

Если величина, от которой другая величина есть функция, может быть изменяема произвольно, то она называется переменной независимой (величиной).Переменная независимая называется также ***аргументом*** функции.; сама же функция может быть названа переменной зависимой .

Если, напр., мы рассматриваем зависимость длины хорды данного круга от ее расстояния от центра, то это расстояние есть величина переменная независимая, а длина хорды, которая есть функция от этого расстояния, представляет собой переменную зависимую. Те величины, которые предполагаются неизменяющимися, называются величинами постоянными. Напр., при исследовании зависимости между длиною хорды круга от ее расстояния от центра мы предполагаем, что длина радиуса этого круга не меняется; тогда эту длину можно рассматривать как постоянную.

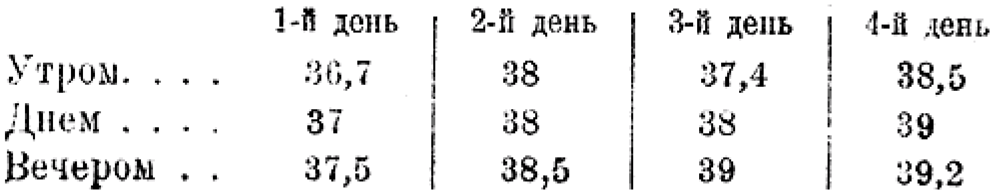
Функции бывают не только от одной переменной независимой, но и от двух, трех и более. Напр., длина пути, пройденного поездом железной дороги, зависит и от скорости, с какою движется этот поезд, и от времени, в течение которого был пройден путь; значит, длина пути в этом случае есть функция от двух переменных независимых: скорости и времени.

Зависимость между функцией и переменными независимыми часто может быть выражена формулой, связывающей между собою числа, измеряющие эти величины. Так, мы видели, что прямая пропорциональная зависимость выражается формулой: $y = kx$, обратная пропорциональная зависимость выражается формулой: $y = {}^{k}/_{x}$, и т.п.

Если функция зависит от одного переменного независимого числа (о таких функциях мы и будем теперь говорить), то это число обозначается большею частью буквою x, а сама функция — буквою y. Числа, которые предполагаются постоянными, мы будем обозначать первыми буквами алфавита: a, b, c.

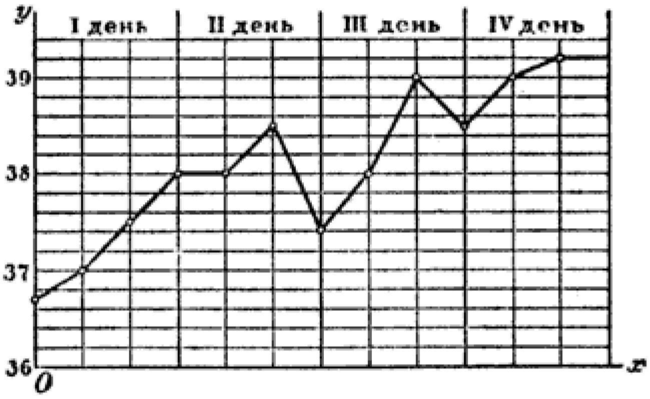
Когда мы рассматриваем зависимость между функцией и переменным независимым числом x, нам важно ясно представлять себе не только то, что функция изменяется при изменении переменного независимого числа, но и то, как происходит это изменение. При этом нет надобности, чтобы функция была задана в виде какого-либо алгебраического выражения; она может быть задана несколькими своими значениями, найденными, положим, из опыта. Примеры таких эмпирических (опытных) функций указаны в следующем параграфе.

107. Графики температуры, влажности и пр. При лечении многих болезней доктору очень важно знать, как изменяется температура больного в течение хода болезни. Для этого пользуются особым медицинским термометром Цельсия, на котором проставлены градусы (от 35° до 42°), разделенные на десятые доли. Термометром этим измеряют температуру больного по несколько раз в день, напр, утром, среди дня и вечером, и результаты измерения записывают. Положим, напр., температура больного за первые 4 дня болезни была следующая :



	1-й день	2-й день	3-й день	4-й день
Утром. . .	36,7	38	37,4	38,5
Днем . . .	37	38	38	39
Вечером . .	37,5	38,5	39	39,2

Чтобы процесс изменения температуры в зависимости от времени сделать наглядным, прибегнем к графическому его изображению.

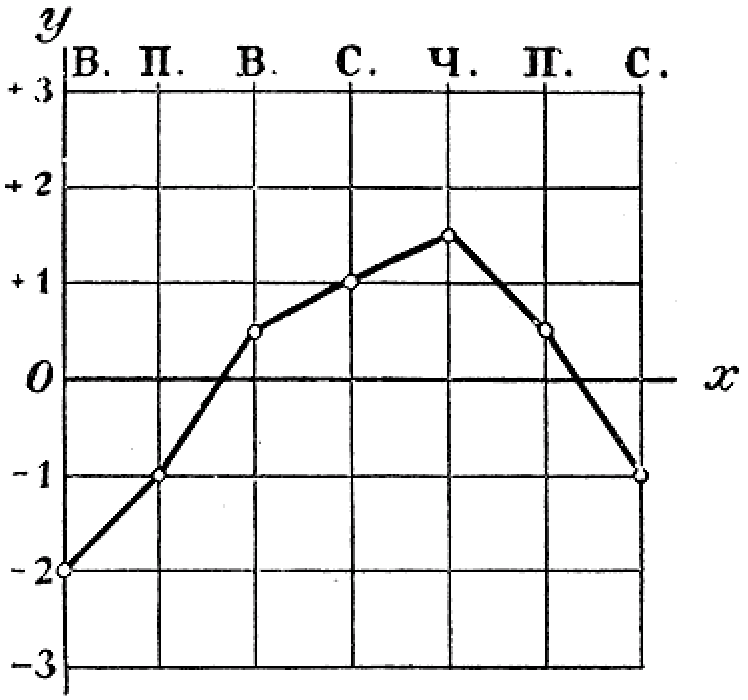


Для этого на горизонтальной прямой ***Ox*** отложим произвольной длины равные деления, которые будут у нас означать промежутки времени между двумя последовательными измерениями температуры. На другой прямой ***Oy***, перпендикулярной ***Ox***, также отложим произвольной длины равные деления и условимся, что каждое из них будет соответствовать, положим, 0,2 градуса температуры. Внизу поставим 36° (предполагая, что температура больного не будет ниже 36°), затем через 5 делений 37°, потом снова через 5 делений 38° и т. д. Проведя затем из всех точек, разграничивающих деления, прямые, параллельные линиям ***Ox*** и ***Oy*,** мы легко нанесем на полученную таким образом сетку точки, соответствующие наблюденным температурам. Так, на первомслева перпендикуляре возьмем точку соответствующую (приблизительно) 36,7°, на втором перпендикуляре — точку, соответствующую 37°, и т. д. Проведя через все полученные точки ломаную линию, мы получим график (чертеж) температуры больного; этот график наглядно изображает нам процесс изменения температуры за 4 первых дня болезни.

В приведенном нами примере температуры больного отрезки, откладываемые на прямых ***Ox*** и ***Oy***, выражались положительными числами. Но иногда бывает необходимо откладывать и отрицательные отрезки. Положим, напр., мы наблюдали температуру наружного воздуха в течение недели ежедневно в полдень и результаты записали в такой таблице:

Воскрес.	Понед.	Вторн.	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
− 2°	− 1°	+ ½°	+ 1°	+1½°	+ ½°	− 1°

Чтобы выразить изменение этих температур графиком, придется откладывать температуры — и положительные, и отрицательные. Это можно сделать, если условимся положительные температуры откладывать вверх от точки ***O***, а отрицательные вниз от нее. Тогда мы получим такой график

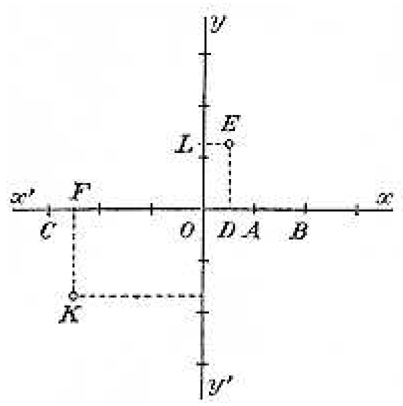


Подобно этому часто составляют графики влажности воздуха, графики атмосферногодавления и пр. Существуют даже самопишущие приборы, которые, раз пущенные в ход, сами собой вычерчивают на особой бумаге кривую температуры воздуха или кривую атмосферного давления и т. п.

Мы перейдем теперь к более подробному рассмотрению графического изображения функций; мы увидим при этом, что изображенные на чертеже функции представляются нам значительно яснее, чем мы их представляли себе без чертежа.

Ознакомимся сначала с тем, что называется координатами точки, расположенными где-нибудь на данной плоскости.

108. Координаты точки. Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые ***xx'*** и ***yy'*** , пересекающиеся в точке ***O***.



Примем, далее, какой-нибудь отрезок прямой (равный,, напр., сантиметру) за единицу длины и условимся откладывать значения переменного независимого числа x на прямой xx', начиная от точки O, как начала, причем положительные значения x будем откладывать вправо от O, а отрицательные — влево от O. Таким образом, отрезок OA выразит нам значение x, равное +1, отрезок OB — значение x, равное + 2, отрезок OC —значение x, равное — 3, и т. п. Сама точка O представляет значение, равное нулю. Значения функции y, соответствующие этим значениям x , мы условимся откладывать на прямых, проведенных через точки A, B, C,... параллельно yy' (иначе сказать, на перпендикулярах к прямой xx'), причем положительные значения функции мы будем откладывать вверх от прямой xx' а отрицательные — вниз от нее. Если, напр., при $x = {}^{1}/_{2}$ значение функции y будет + $1^{1}/_{4}$, то на прямой xx' мы возьмем отрезок OD = + ${}^{1}/_{2}$, и восстановим перпендикуляр DE, равный + $1^{1}/_{4}$ тогда получим точку E, которая выразит нам значение y = + $1^{1}/_{4}$ при x = + ${}^{1}/_{2}$. Равным образом, точка K выразит значение y, равное—$1^{3}/_{4}$ при x = — $2^{1}/_{2}$ и т. п.

Заметим, что точки E, K,... мы можем получить несколько иначе, а именно, вместо того, чтобы на перпендикулярах DE, FK,... откладывать отрезки, выражающие значения y, мы можем их откладывать на прямой yy' начиная от точки O, и затем из концов этих отрезков проводить прямые, параллельные xx' до пересечения с соответствующими перпендикулярами.

Так, OL = + $1^{1}/_{4}$ и проведя $LE \parallel Ox$, мы получим точку E, т. е. ту самую, точку, которую раньше мы получили, отложив DE = + $1^{1}/_{4}$

То же самое можно сказать о точке K и о всех других подобных точках. Вот почему горизонтальную прямую принято обозначать буквами xx' а вертикальную — буквами yy': на первой откладываются значения переменного независимого числа x, на второй можно откладывать значения функции y.

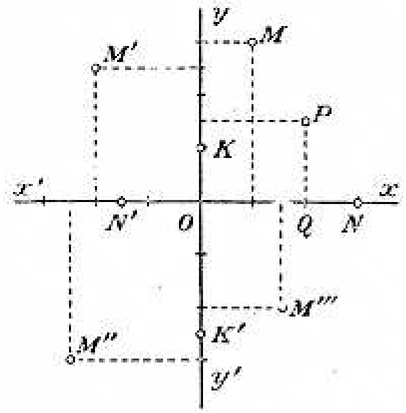
Отрезки OD, OF, ..., откладываемые на прямой xx' и выражающие значения переменного независимого числа x, называются ***абсциссами*** (OD — абсцисса точки E, OF — ***абсцисса*** точки K и т. д.); отрезки DE, FK,..., откладываемые на перпендикулярах к xx' (или на прямой yy') и выражающие значения функции y, называются ***ординатами*** (DE -ордината точки E, FK - ордината точки K и т.д.); те и другие совместно называются ***координатами*** точек E, K.

Неограниченная прямая xx' ,на которой откладываются абсциссы, называется осью абсцисс или осью x-ов (ось иксов); неограниченная прямая yy', на которой (или параллельно которой) откладываются ординаты, называется осью ординат или осью

у-ов (ось игреков); та и другая прямая совместно называются осями координат. Точка ***О*** называется началом координат .*(Определение положения точки на плоскости посредством двух указанных координат введено было французским математиком Рене Декартом (1590 г.— 1650 г.), почему координаты эти называются декартовыми.)*

Очевидно, что при данных координатных осях и при данной единице длины каждой паре чисел, принятых за координаты, соответствует на плоскости одна определенная точка.

Например, как видно из чертежа , следующим парам чисел (1, 3), (—2, $2^{1}/_{2}$), (—$2^{1}/_{2}$,—3), ($1^{1}/_{2}$, —2) (принято из двух чисел, поставленных в скобках, первое число принимать за абсциссу, а второе — за ординату) соответствуют точки: ***М, М' М", М'''***. И, наоборот, каждой точке плоскости соответствует определенная пара чисел, которую можно принять за координаты этой точки.



Например, если возьмем какую-нибудь точку ***Р***, то, опустив из нее на ось ***х*** - ов перпендикуляр ***PQ*** и измерив принятой единицей отрезки ***OQ*** и ***PQ***, мы получим абсциссу и ординату этой точки (на нашем чертеже у точки ***Р*** абсцисса оказывается + 2 и ордината + $^{1}/_{2}$). Если возьмем точку на оси ***х*** - ов, то ордината ее, очевидно, будет нуль, а абсцисса—положительное или отрицательное число, измеряющее ее расстояние от точки ***О***; таковы, например, точки ***N*** (3,0) и ***N'*** (—$1^{1}/_{2}$, 0). Если точка взята на оси **у**-ов, то ее абсцисса равна нулю, а ордината есть число, измеряющее ее расстояние от **О**; таковы, например, точки ***К*** (0, +1) и ***К'*** (0,—$2^{1}/_{2}$).

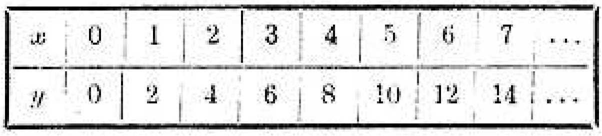
У начала координат абсцисса и ордината, очевидно, равны нулю.

Покажем теперь, как, пользуясь такими координатами, можно наглядно изобразить изменение данной функции при помощи ее графика. Начнем с самой простой функции.

Глава вторая.

График пропорциональной зависимости (прямой и обратной).

109. График пропорциональной зависимости. Как мы видели (отдел2§ 103), пропорциональная зависимость (прямая) выражается формулой ***у = kx***, в которой ***k*** есть постоянное число (коэффициент пропорциональности). Предположим, что ***k*** = **2** и мы желаем графически изобразить функцию: ***у=2х.*** Для этого дадим переменному числу ***х*** какие-нибудь частные значения, например такие: ***х*** = 0, 1, 2, 3,... и вычислим соответствующие значения функции ***у***. Для ясности расположим те и другие в такой таблице:



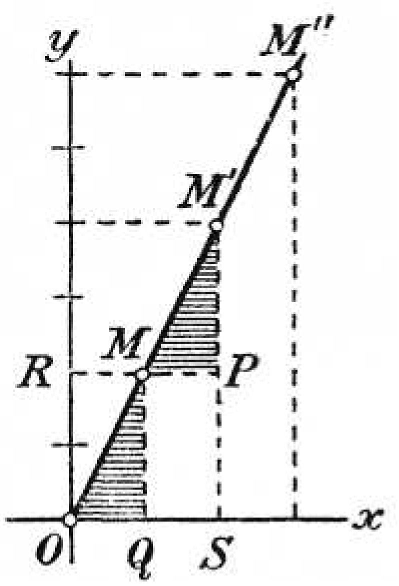
x	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y	0	2	4	6	8	10	12	14	...

Конечно, мы не можем поместить в таблице всевозможные значения ***х*** и ***у***, так как всех значений, очевидно, бесчисленное множество. Однако мы легко можем сообразить, что если ***x*** изменяется, положим, от 2 до 3 непрерывно (т. е. переходя через все возможные числа, заключенные между 2 и 3), то ***y*** будет изменяться тоже непрерывно (переходя через все возможные числа, заключенные между 4 и 6). Например, при таком изменении числа ***x*** функция ***y*** может сделаться равной **4,1**; для этого нужно только, чтобы число ***x*** сделалось равным 4,1 : 2, т. е. **2,05**, что непременно произойдет при непрерывном изменении ***x*** от 2 до 3. Таким образом, хотя наша таблица содержит только некоторые значения ***x*** и ***y***, мы из нее все-таки видим, что когда ***x*** получит какое-нибудь значение, промежуточное между указанными в таблице, то и у получит значение, промежуточное между указанными в таблице.

Теперь, начертив координатные оси и выбрав единицу длины (положим ***OQ***), построим точки ***O, M, M', M''***,..., координатами которых служат значения ***x*** и ***y***, помещенные в нашей таблице.

Так, ***O*** будет точка, имеющая координаты ***x*** = 0, ***y*** = 0, точка ***M*** имеет координаты ***x = 1, y= 2***, и т. д. Сколько бы мы таких точек ни построили, все они должны лежать на одной и той же прямой. Для доказательства этого возьмем какие-нибудь 3 соседних точки, например ***O, M*** и **M'**, и, соединив прямыми точку ***O*** с ***M*** и затем точку ***M*** с ***M'*** покажем, что прямая ***MM'*** составляет продолжение прямой ***OM***.

Для этой цели проведем ***MP*** (продолжение ***MR***) и сравним между собою 2 прямоугольных тр-ка (покрытые штрихами).



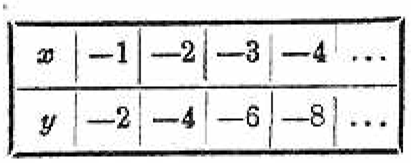
У них ***OQ*** = ***MP*** = **l** и ***MQ = M'P*** = **2**, и потому тр-ки равны, и, следовательно, /_ ***M'MP***= /_ ***MOQ***; поэтому прямая ***MM'*** составляет продолжение прямой ***OM***. Значит, три точки ***O, M*** и ***M'*** лежат на одной прямой. Все сказанное об этих трех точках может быть повторено о всяких других трех соседних точках; значит, все точки должны лежать на одной прямой.

Чтобы сделать доказательство общим, можем рассуждать так. Назначим для ***x*** два произвольных числа: ***x = a*** и ***x = b***; тогда для ***y*** получим два соответствующих значения: ***y = ka*** и ***y = kb***.

Пусть ***OQ = a***, ***OS = b***, ***QM=ka*** и ***SM' = kb***. Проведя прямые ***OM*** и ***OM'***, мы получим два тр-ка ***OQM*** и ***OQM'***, которые подобны, так как они содержат по равному углу (прямому), лежащему между пропорциональными сторонами (***OQ :OS = a*** и ***QM : SM' = ka : kb = a:b***). Вследствие этого /_***MOQ = /_ M'OS***, и потому точки ***O, M*** и ***M'*** лежат на одной прямой. Таким образом, всякие две точки (***M и M'***), удовлетворяющие формуле ***y = kx***, оказываются лежащими на прямой, проходящей через ***O***.

Итак, ***график пропорциональной зависимости*** (***y = kx***) ***есть прямая, проходящая через начало координат и через точку (M), у которой абсцисса есть 1, а ордината равна коэффициенту пропорциональности*** (в нашем примере она равна 2).

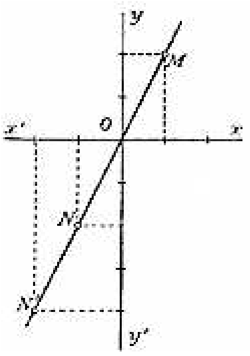
110. Замечание. Если в функции ***y=2x*** мы будем давать числу ***x*** отрицательные значения, например такие:



x	-1	-2	-3	-4	...
y	-2	-4	-6	-8	...

то и для ***y*** получим отрицательные значения.

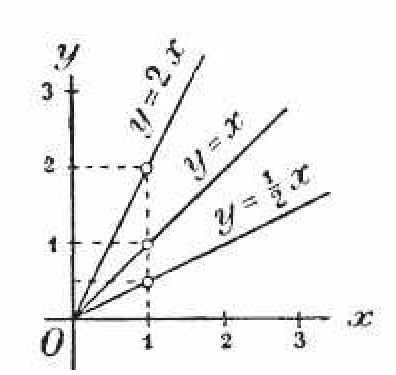
Тогда график функции будет прямая ***ON'***, расположенная в угле ***x'Oy'*** и составляющая продолжение прямой ***OM***, построенной нами раньше.



111. Изменение положения прямой в зависимости от коэффициента пропорциональности. Построим еще на одном и том же чертеже прямые, выражающие функции:

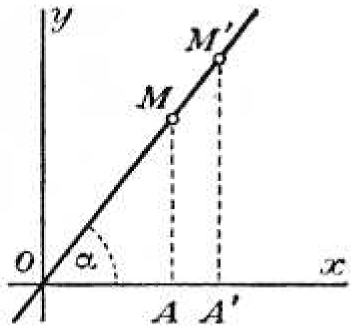
$$y = {}^{1}/_{2}\,x\,; \qquad y = x\,; \qquad y = 2x,$$

у которых коэффициенты положительные и притом возрастают.



Из чертежа мы видим, что по мере возрастания коэффициента пропорциональности прямая отклоняется все более и более от оси ***x***- ов, приближаясь к оси ***y***-ов. Таким образом, коэффициент ***k*** в функции ***y = kx*** характеризует собою угол, составленный прямою с полуосью ***Ox***; поэтому число ***k*** называется также угловым коэффициентом прямой, выражающей графически функцию ***y = kx***.

Так как из этой функции видно, что $k = {}^{y}/_{x}$,то можно сказать, что угловой коэффициент равен отношению какого-нибудь значения функции (какой-нибудь ординаты) к соответствующему значению переменного независимого (к соответствующей абсциссе), так что если функция изображается прямою ***OM*** , то

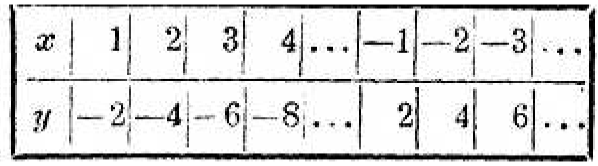


$$k = \frac{MA}{OA} = \frac{M'A'}{OA'} = \ldots = \operatorname{tg} \alpha.$$

(Как известно из геометрии, в прямоугольном тр-ке отношение одного катета к другому катету равняется тангенсу угла ***α***, противолежащего первому катету.)

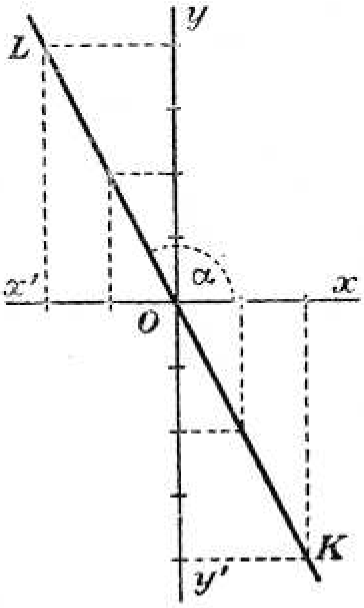
Полезно заметить, что если ***k* =1**, т. е. если функция имеет вид: ***y* = *x***, то прямая, изображающая ее, есть биссектриса прямого угла ***xOy*** (тогда тр-к ***OAM***, равнобедренный, и /_ ***α*** = 45°). Если ***k* = 0**, т. е. если функция имеет вид: ***y* = 0**, то прямая сливается с осью ***Ox***.

Положим теперь, что коэффициент ***k*** будет отрицательное число, например ***y* = — 2*x***. Тогда положительным значениям ***x*** будут соответствовать отрицательные значения ***y***, и наоборот:



x	1	2	3	4…	—1	—2	—3	…
y	—2	—4	—6	—8…	2	4	6	…

Тогда мы получим прямую ***KL***, расположенную в углах ***x'Oy*** и ***xOy'***.



В этом случае угол, образованный прямой с полуосью ***Ox***, будет тупой ***LOx***, и тангенс его равен —2.

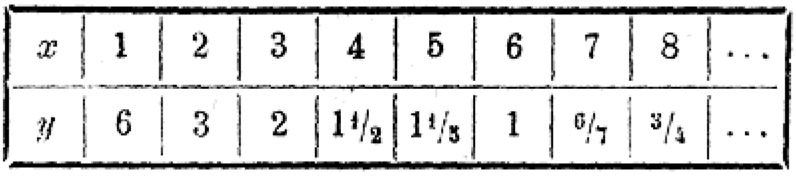
Значит, когда коэффициент ***k*** положительный, тогда прямая подымается вверх (от точки ***O*** вправо), когда же коэффициент отрицательный, прямая опускается вниз.

112. **График обратной пропорциональности.** Такая пропорциональность выражается, как мы видели (отдел2 § 105), формулой:

$$y = {}^{k}/_{x}\text{, или } yx = k$$

Построим график частного случая, когда ***k*** = 6 , т. е, когда функция будет: $y = {}^{6}/_{x}$.

Составим таблицу значений этой функции, например такую:

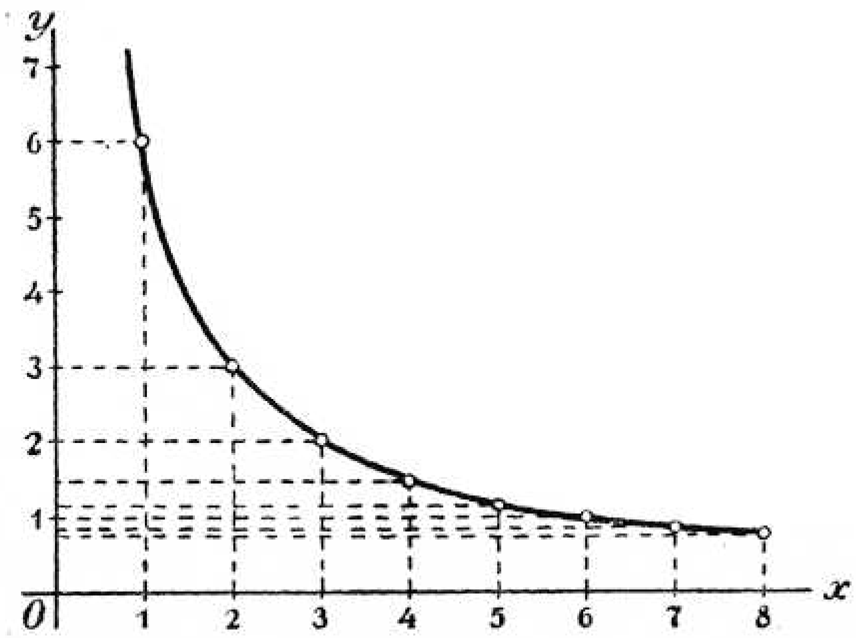


x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	6	3	2	$1\,{}^1/_2$	$1\,{}^1/_5$	1	${}^6/_7$	${}^3/_4$	...

По поводу этой таблицы мы и здесь можем сделать такое же замечание, какое делали раньше, когда говорили о графике функции $y = 2x$, а именно: если x будет переходить через все возможные значения, промежуточные между указанными в таблице, например через значения, заключающиеся между 1 и 2, то и y будет получать промежуточные значения, заключающиеся между **6** и **3**. Например, y может при этом сделаться равным $5^1/_2$; для этого надо только, чтобы число x получило значение, при котором ${}^6/_x = 5^1/_2$, т. е. чтобы

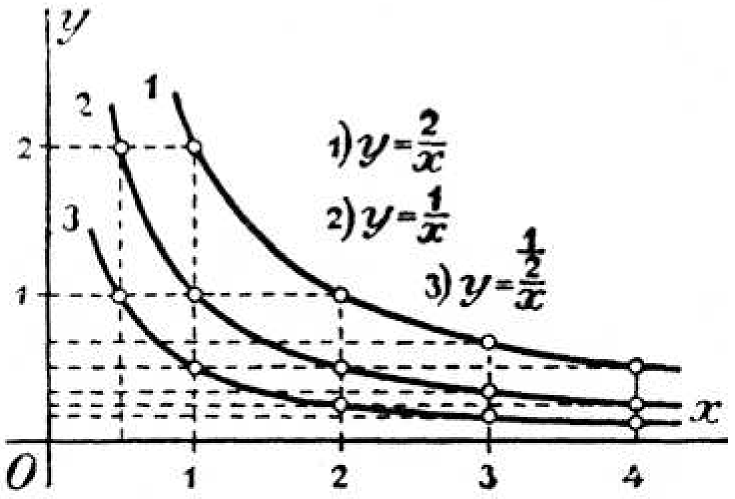
$x = 6 : 5^1/_2, = 6 : {}^{11}/_2 = {}^{12}/_{11} = 1^1/_{11}$ что, конечно, произойдет при непрерывном изменении x от 1 до 2.

Нанеся значения, указанные в таблице, на чертеж и обведя все полученные на графике точки непрерывной кривой (от руки или помощью особой чертежной линейки, называемой лекалом), мы получим график обратной пропорциональной зависимости $y = {}^6/_x$.



Обратим внимание на следующие особенности этого графика: при неограниченном увеличении абсциссы x (x = 9, 10, 11, 12,...), ордината кривой все уменьшается, приближаясь к нулю, так что кривая, по мере ее продолжения направо, все ближе и ближе подходит к оси x-ов, но, однако, никогда ее достигнуть не может (дробь ${}^6/_x$ никогда не может сделаться равной нулю). Равным образом, если для x будем брать дроби ${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^1/_8$ и т.д. все приближающиеся к нулю, то y будет все более и более возрастать (y=12, 24, 48,...), так что ветвь кривой, при продолжении ее налево, неограниченно подымается вверх, приближаясь в то же время все более и более к оси y-ов, но достигнуть ее никогда не может (при $x = 0$ дробь ${}^6/_x$ перестает существовать).

Чертеж , сделанный в более крупных единицах, чем предыдущий чертеж, представляет три графика функции $y = {}^{k}/_{x}$ при $k = 2, 1, {}^{1}/_{2}$.Они имеют те же особенности, как и график предыдущего чертежа, отличаясь друг от друга только большею или меньшею вдавленностью к вершине прямого угла.



Вообще, график функции $y = {}^{k}/_{x}$ есть так называемая гипербола, со свойствами которой мы ознакомимся впоследствии. Заметим, что для таких чертежей всего удобнее брать так называемую канвовую (сетчатую) бумагу, которая равноотстоящими горизонтальными и вертикальными прямыми разделена на малые квадратики (например на квадратные миллиметры; тогда бумага называется миллиметровою). Прямые ***Ox*** и ***Oy*** надо брать на этой бумаге так, чтобы они совпадали с какими-либо ее прямыми. За единицу длины тогда берут одно или несколько делений бумаги (например на миллиметровой бумаге — миллиметр или сантиметр).

Глава третья.

График двучлена первой степени.

113. Задача. Длина железного стержня при температуре 0° составляет 1 метр; определить, какая длина l окажется у этого стержня, когда он будет нагрет до t°, если известно, что о каждым градусом нагревания длина стержня увеличивается на 0,000012 той длины, которую стержень имеет при 0°.

При нагревании на один градус длина стержня, равная при 0° одному метру (= 100 см), должна увеличиться на 100 • 0,000012 см, т. е. 0,0012 см. Удлинение при нагревании на t° должно быть в t раз более, чем при нагревании на один градус; поэтому все удлинение будет 0,0012t см. Приложив это удлинение к начальной длине стержня (при 0°), т. е. к 100 см, получим длину при температуре t

$$l = 100 + 0{,}0012t \quad (\text{см}).$$

Если температуру t, до которой нагрет стержень, будем рассматривать как переменную величину, то длину l мы можем рассматривать как функцию температуры. Обозначая, по общепринятому, переменную независимую величину через x, а функцию буквою y, мы можем зависимость между длиною стержня и его температурой выразить такою формулой:

$$y = 100 + 0{,}0012\,x.$$

114. Двучлен первой степени. Алгебраическое выражение, представляющее собою двучлен, в котором один член содержит переменное число (в первой степени), а другой член есть число постоянное, называется двучленом первой степени. В приведенной выше задаче длина стержня выражается двучленом первой степени относительно температуры. Функции такого рода часто встречаются при решении многих задач и вопросов. Общий вид двучлена первой степени может быть выражен так:

$$y = ax + b,$$

где буквы ***a*** и ***b*** обозначают постоянные числа, положительные или отрицательные (иногда и нуль), а ***x*** — переменное число, способное принимать всевозможные численные значения; буква ***y*** означает величину самого двучлена, соответствующую взятой величине ***x***.

Корнем двучлена называется то значение переменного числа ***x***, при котором двучлен обращается в нуль. Чтобы найти такое значение, надо приравнять двучлен нулю и решить получившееся от этого уравнение.

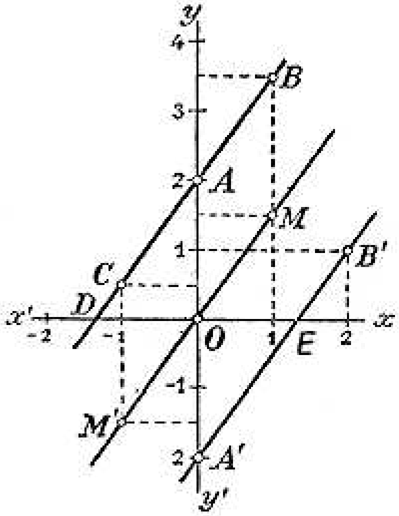
Так, корень двучлена $1^1/_2\, x + 2$ получится, если решим уравнение $1^1/_2\, x + 2 = 0$:

$$1^1/_2\, x = —2; \qquad x = —2 : 1^1/_2 = —^4/_3 = —1^1/_3.$$

115. График двучлена первой степени. Возьмем какой-нибудь частный случай двучлена, например:

$$y = 1^1/_2\, x + 2$$

Отбросим пока число 2 и возьмем более простую функцию $y = 1^1/_2\, x$. Функция эта выражает пропорциональную зависимость между ***y*** и ***x*** и потому графически изобразится, как мы знаем (§ 109), прямою, проходящею через начало координат и через точку ***M***, у которой абсцисса есть 1, а ордината $1^1/_2$.



Если переменному числу ***x*** будем давать не только положительные значения, но и отрицательные, то прямая эта продолжится вниз, проходя через точку ***M'***, у которой абсцисса есть — 1 и ордината — $1^1/_2$. Если теперь восстановим отброшенное прежде число + 2, т. е. возьмем функцию $y = 1^1/_2\, x + 2$, то увидим, что все ординаты этой функции будут более соответственных ординат функции $y = 1^1/_2\, x$ на 2 единицы. Значит, график функции $y = 1^1/_2\, x + 2$ мы получим из графика функции $y = 1^1/_2\, x$ если прямую линию ***MM'*** перенесем параллельно самой себе вверх на 2 единицы. Для этого отложим на оси ***Oy*** отрезок ***OA*** = 2 и через точку ***A*** проведем прямую, параллельную ***MM'***. Эта прямая и будет служить графиком функции $y = 1^1/_2\, x + 2$. Абсцисса ***OD*** точки, в которой эта прямая пересекается с осью ***x***-ов, равна корню двучлена, так как при этой абсциссе ордината ***y*** (т.е. величина самого двучлена) равна нулю (на нашем чертеже ***OD*** = —$1^1/_3$). Если возьмем функцию

$$y = 1^1/_2\,x — 2\ ,$$

то отрезок ***OA*** пришлось бы отложить вниз от точки ***O***, так как тогда все ординаты функции $y = 1^1/_2\,x$ пришлоопь бы уменьшить на 2 единицы. Мы получили бы тогда прямую ***A'B'***, параллельную ***MM'*** и отсекающую от оси ***y***-ов отрезок ***OA'*** = — 2. Корень этого двучлена равен абсциссе ***OE*** точки, в которой прямая ***A'B'*** пересекается с осью ***x***-ов (на чертеже ***OE*** = +$1^1/_3$).

Если в функции ***y = ax + b*** коэффициент ***a*** будет число отрицательное (например $y = —1^1/_2\,x + 2$), то вспомогательная прямая, выражающая график функции $y = —1^1/_2\,x$, пройдет через углы ***x'Oy*** и ***xOy'***, сообразно чему изменится и направление прямой ***BC***.

Таким образом, ***график двучлена y = ax + b есть прямая линия, параллельная прямой, выражающей функцию y = ax, и отсекающая от оси y - ов отрезок, равный b***.

Вследствие того, что график функции ***y = ax + b*** есть прямая линия, сама эта функция называется линейной.

Для краткости речи в дальнейшем изложении вместо того, чтобы говорить: „прямая, выражающая функцию ***y = ax + b***", мы будем говорить короче: „прямая ***y = ax + b***".

Угол, образуемый прямою ***y = ax + b*** с осью ***x***-ов, равен, конечно, углу, составляемому с осью ***x***-ов прямою ***y = ax***; следовательно, этот угол зависит только от величины коэффициента ***a***, и поэтому коэффициент этот и в общем виде двучлена ***ax + b*** называется угловым.

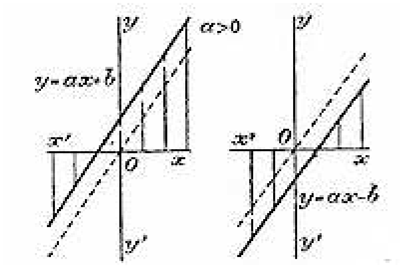
Число ***b*** в двучлене ***ax + b*** есть так называемая начальная ордината, соответствующая начальному значению ***x*** = 0; она представляет собою отрезок оси ***y*** -ов, отсекаемый прямой, выражающей двучлен.

Коэффициент, как мы видели (§ 111), равен тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси ***x***-ов прямою ***y = ax*** (и, следовательно, параллельною ей прямою ***y = ax + b***).

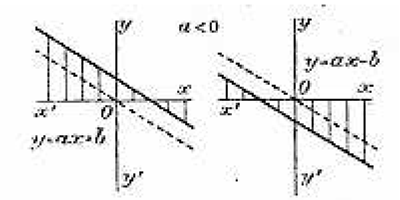
116. Изменение двучлена *y = ax + b* с изменением *x*. Прямая ***y = ax***, параллельно которой проводится прямая ***y = ax + b***, проходит через углы ***xOy*** и ***x'Oy'*** если ***a*** > 0, и через углы ***x'Oy*** и ***xOy'***, если ***a*** <0 (§§ 109, 110).

Следовательно, в первом случае прямая ***y = ax + b***, если рассматривать ее в направлении слева направо,

подымается вверх, а во втором случае она опускается вниз



черт. **a**

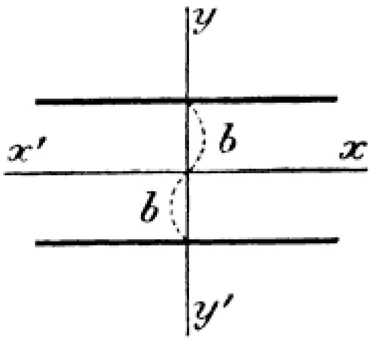


черт. **b**

Если примем во внимание, что отрицательные числа тем больше, чем меньше их абсолютные величины, то мы можем скаэать, что при возрастании абсциссы ***x*** (например, когда ***x*** переходит через ряд значений: ... — 4, — 3, —2,— 1, 0,1, 2, 3, 4...) ординаты возрастают, если ***a*** > 0 (черт.**a**), и убывают, если ***a*** < 0 (черт. **b**), причем это возрастание или убывание безгранично (конечно, если представлять себе прямые продолженными в обе стороны бесконечно) и притом равномерно, т. е. с увеличением ***x*** на одно и то же число (положим, на *m*) функция возрастает или убывает также на одно и то же число (положим, на *n*).

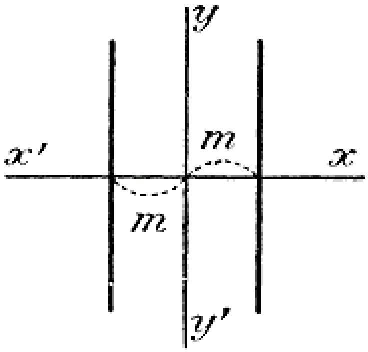
117. Замечания. I. Если угловой коэффициент ***a*** равен нулю, тогда двучлен обращается в одночлен ***y* = *b*.**

Это значит, что в графическом изображении должна получиться такая прямая, у которой все точки имеют одну и ту же ординату, равную ***b***, а абсцисса может быть какая угодно. Такая линия, очевидно, есть прямая, параллельная оси ***x***-ов и отсекающая от оси ***y***-ов отрезок, равный ***b***. Значит, при ***b*** положительном эта прямая расположится над осью ***x***-ов, а при ***b*** отрицательном — под нею ; и в том и в другом случае при изменении ***x*** функция остается постоянной (равной ***b***).



В частности, если при ***a*** = 0 еще и ***b*** = 0, т. е. если линейная функция будет ***y*** = 0, то график функции будет ось ***x***-ов (для всякой точки этой оси ордината ***y*** = 0, а абсцисса произвольная).

II. Если какая-нибудь прямая параллельна оси ***y***-ов , то тогда ординаты точек этой прямой могут иметь произвольные значения, абсциссы же для всех точек одинаковы, а именно: равны положительному или отрицательному отрезку *m*, который отсекается прямою от оси ***x***-ов.



Следовательно, такую прямую можно выразить уравнением так: $x = m$ (ордината y, не входящая в уравнение, остается произвольной). В частности, если $m = 0$, то получается уравнение $x = 0$, выражающее, что абсцисса всякой точки есть 0, а ордината какая угодно. Такая прямая есть ось **y**-ов.

118. Построение прямой $y = ax + b$ по двум точкам. Чтобы построить прямую $y = ax + b$, можно было бы сначала построить вспомогательную прямую, выражающую функцию $y = ax$, и потом провести параллельную прямую, отсекающую от оси **y**-ов отрезок b. Но проще построить прямую $y = ax + b$, найдя предварительно какие-нибудь две точки этой прямой. Положим, например, надо построить прямую:

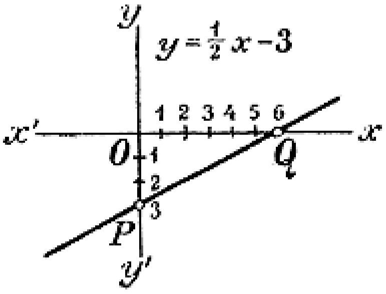
$$y = {}^1/_2\, x — 3$$

Для этого найдем координаты каких-нибудь двух точек, принадлежащих искомой прямой, например, координаты тех точек, в которых прямая пересекается с осями координат. Для нахождения их положим в данном уравнении $x = 0$ и определим соответствующее значение y, а затем положим $y = 0$ и определим x; тогда найдем:

1) если $x = 0$, то $y = — 3$;

2) если у = 0, то ${}^1/_2\, x — 3 = 0$ и $x = 6$.

Точка с абсциссой 0 и ординатой 3 есть точка **P** (черт. 32); точка с абсциссой 6 и ординатой 0 есть **Q** значит, искомый график будет прямая **PQ**, проходящая через эти две точки.



Если точки пересечения с координатными осями (или одна из них) не помещаются в пределах чертежа, то можно подыскать другие точки, которые помещались бы на чертеже.

Замечание. Для уменьшения погрешности при черчении прямой желательно, чтобы две точки, через которые проводится прямая, отстояли друг от друга по возможности дальше, тогда некоторая неточность в положении линейки (избегнуть которую очень трудно) не так много отразится на направлении проводимой прямой.

119. Графическое решение уравнения. Пусть требуется решить графическим путем уравнение:

$$3x — 1,5 = x + 3,5.$$

Укажем два способа такого решения.

Способ 1-й. Перенеся все члены в левую часть, сделаем приведение подобных членов:

$$3x — 1,5 — x — 3,5 = 0; \quad 2x — 5 = 0.$$

В таком виде уравнением требуется найти такое значение числа x, при котором двучлен $2x — 5$ обращается в нуль; другими словами, требуется найти корень этого двучлена. Для этого, как мы видели, достаточно построить график двучлена и найти на чертеже величину абсциссы той точки, в которой график пересекается с осью x-ов. График двучлена

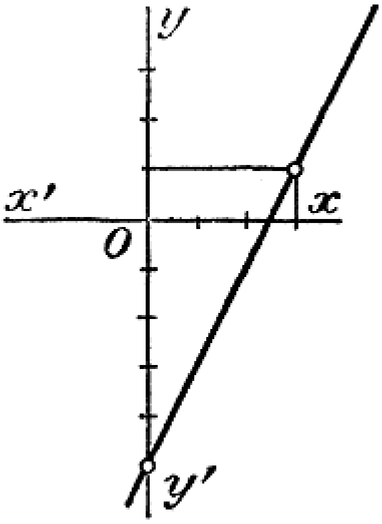
$$y = 2x — 5$$

есть прямая линия, которую мы можем построить по двум точкам, например таким:

1) $x = 0$, $y = — 5$

2) $x = 3$, $y = 1$.

На чертеже мы получили прямую, которая пересекается о осью x-ов в точке с абсциссой + $2^1/_2$; это и будет корень уравнения $2x — 5 = 0$.



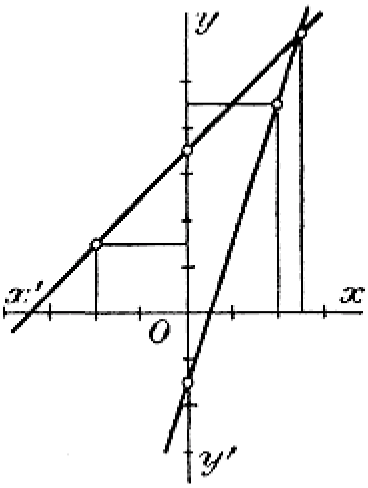
Способ 2-й. Части данного уравнения, взятые отдельно, представляют собою два двучлена:

$$y_1 = 3x — 1,5 \quad и \quad y_2 = x + 3,5$$

Уравнение требует найти такое значение числа x, при котором оба двучлена имели бы одинаковую численную величину. Для нахождения такого значения построим на одном и том же чертеже графики обоих двучленов, например по таким точкам:

$$y_1 = 3x - 1{,}5 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y_1 = -1{,}5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y_1 = 4{,}5 \end{array} \right.$$

$$y_2 = x + 3{,}5 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y_2 = 3{,}5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y_2 = 1{,}5. \end{array} \right.$$



Две построенные по этим точкам прямые пересекаются в точке, абсцисса которой составляет + $2^{1}/_{2}$;. Это и будет корень данного уравнения, так как при x = + $2^{1}/_{2}$; ординаты y_1 и y_2 равны между собою и, следовательно,

$$3x - 1{,}5 = x + 3{,}5.$$

Замечание. Графический способ решения уравнений первой степени не представляет каких-либо преимуществ с алгебраическим приемом решения, так как такие уравнения решаются весьма просто и без графиков. Но для решения уравнений более сложных графический метод иногда бывает весьма полезен (впоследствии мы увидим этому примеры).

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ. НЕРАВЕНСТВА.

Глава первая. **Пересмотр двух основных свойств уравнения.**
Глава вторая. **Решения положительные, отрицательные, нулевые и другие.**
Глава третья. **Неравенства первой степени.**

Глава первая.

Пересмотр двух основных свойств уравнения.

120. Предварительное разъяснение. Всякое уравнение, как мы знаем, есть такое равенство, у которого обе части имеют одинаковую численную величину не при всяких значениях букв входящих в это равенство, а только при некоторых, которые в таком случае называются , корнями (или решениями) уравнения. Уравнение с одним неизвестным может иметь один корень, два корня и более; например, уравнение $3x — 2 = 13$ имеет один корень (5), уравнение $x^2 + 2 = 3x$ имеет два корня (1 и 2), уравнение $(x — 1)\{x—2)(x + 1) = 0$ имеет 3 корня (1, 2 и — 1)(Вспомним, что если какой-нибудь сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю.) и т. п. Может даже случиться, что уравнение совсем не имеет корня. Таково, например, уравнение $x^2 = — 4$; какое бы положительное или отрицательное число мы ни подставили на меото x, квадрат этого числа не может равняться отрицательному числу — 4.

Два уравнения называются равносильными, если они имеют одинаковые корни(При одинаковой их кратности). Например, два уравнения

$$x^2 + 2 = 3x \quad \text{и} \quad 3x — 2 = x^2$$

равносильны, так как у них одни и те же корни, именно 1 и 2, уравнения же

$$7x = 14 \quad \text{и} \quad x^2 + 2 = 3x$$

неравносильны, так как первое имеет только один корень 2, тогда как второе, кроме этого корня, имеет еще особый корень 1.

Когда, решая какое-нибудь уравнение, мы совершаем над ним некоторые преобразования (перенесение членов, приведение подобных членов и пр.), то этими преобразованиями мы заменяем данное уравнение последовательно другими, более простыми, до тех пор, пока не получим уравнения самого простого вида: $x = a$; тогда мы говорим, что это число a и есть корень данного уравнения. Но утвержать это безошибочно мы можем только тогда, когда у нас есть уверенность, что все уравнения, полученные при преобразованиях, равносильны данному уравнению; когда мы, например, уверены, что не может быть такого случая, что данное уравнение имеет два корня, а мы нашими преобразованиями пришли к уравнению, имеющему только один корень.

Все преобразования, которые нам приходилось совершать над уравнениями, основаны на двух свойствах уравнения, указанных нами в начале алгебры (отдел 1§

39). Рассмотрим теперь эти свойства подробнее с целью определить, не может ли применение этих свойств нарушить когда-либо равносильность уравнений.

121. Первое из указанных свойств уравнений. Возьмем какое-нибудь уравнение, например такое:

$$x^2 + 2 = 3x, \qquad (1)$$

Положим, что к обеим частям этого уравнения мы прибавили какое-нибудь одно и то же число m (положительное или отрицательное, или даже нуль); тогда мы получим новое уравнение:

$$x^2 + 2 + m = 3x + m \qquad (2)$$

Разъясним, что это уравнение равносильно данному. Для этого достаточно убедиться, во-первых, в том, что всякий корень уравнения (1) удовлетворяет и уравнению (2); и, во-вторых, обратно, в том, что всякий корень уравнения (2) удовлетворяет и уравнению (1).

а) Пусть уравнение (1) имеет какой-нибудь корень, например $x = 1$. Это значит, что когда в это уравнение на место x подставим 1, то выражение $x^2 + 2$ сделается равным выражению $3x$ (каждое из этих выражений обратится в число 3). Но тогда при $x = 1$ суммы $x^2 + 2 + m$ и $3x + m$ сделаются равными, так как если к равным числам (3 и 3) прибавим равные числа (m и m), то и получим равные числа ($3 + m$ и $3 + m$). Значит, корень $x = 1$ должен быть также и корнем уравнения (2). Если уравнение (1) имеет еще какой-нибудь корень, то о нем можно сказать то же самое, что сейчар мы говорили о корне $x = 1$, т. е. что он удовлетворяет и уравнению (2). Таким образом, каждый корень уравнения (1) принадлежит и уравнению (2).

б) Допустим, что уравнение (2) имеет какой-нибудь корень (например $x = 2$). Это значит, что если в это уравнение наместо x подставим **2**, то выражение $x^2 + 2 + m$ сделается равным выражению $3x + m$ (именно, каждое из этих выражений обратится в число $6 + m$). Но тогда при $x = 2$ и выражения $x^2 + 2$ и $3x$ сделаются равными, так как, если от равных чисел ($6 + m$ и $6 + m$) отнимем равные числа (m и m), то и получим равные числа. Значит, $x = 2$ есть также корень и уравнения (1). Если бы уравнение (2) имело еще какой-нибудь корень, то о нем можно было бы повторить то же самое, что мы сейчас сказали о корне $x = 2$, т. е. что и этот другой корень должен удовлетворять и уравнению (1).

Значит, всякий корень уравнения (2) должен быть и корнем уравнения (1).

Если же корни уравнений (1) и (2) одни и те же, то уравнения эти равносильны. Свойство это относится и к вычитанию из частей уравнения одного и того же числа, так как вычитание какого-нибудь числа равносильно прибавлению другого числа с противоположным знаком.

Таким образом, ***если к обеим частям уравнения прибавим, или от них вычтем, одно и то же число, то получим новое уравнение, равносильное первому***.

На этом свойстве, как мы видели (отдел1 § 41), основано перенесение членов уравнения из одной части в другую с переменою знака. Теперь мы убеждаемся, что такое перенесение никогда не может нарушить равносильности уравнений.

122. Второе свойство уравнений. Возьмем то же самое уравнение

$$x^2 + 2 = 3x,$$

и умножим обе его части на какое-нибудь число m, положительное или отрицательное, но только не на нуль. Тогда получим новое уравнение:

$$(x^2 + 2)m = 3xm,$$

Чтобы обнаружить равносильность этих двух уравнений, будем рассуждать совершенно так же, как мы рассуждали относительно первого свойства, а именно, покажем, во-первых, что всякий корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2) и, во-вторых, обратно, что всякий корень уравнения (2) удовлетворяет уравнению (1).

а) Пусть уравнение (1) имеет какой-нибудь корень, например $x = 1$. Это значит, что когда в это уравнение на место x подставим **1**, то выражение $x^2 + 2$ сделается равным выражению $3x$ (каждое из этих выражений обратится в число **3**). Но тогда при $x = 1$ и произведения $(x^2 + 2)m$ и $3xm$ сделаются равными, так как если равные числа (3 и 3) умножим на одно и то же число (m), то и получим равные числа ($3m$ и $3m$). Значит, корень $x = 1$ должен быть также и корнем уравнения (2). Так как все это можно повторить о всяком ином корне уравнения (1), то заключаем, что всякий корень уравнения (1) принадлежит и уравнению (2).

б) Обратно, пусть уравнение (2) имеет какой-нибудь корень (например $x = 2$). Это значит, что если в это уравнение на место x подставим **2**, то произведения $(x^2 + 2)m$ и $3xm$ сделаются равными (каждое из них обратится в число $6m$). Но тогда при $x = 2$ и выражения $x^2 + 2$ и $3x$ сделаются равными, так как если равные числа ($6m$ и $6m$) разделим на равные числа (m и m), то и получим равные числа (**6** и **6**). Значит, всякий корень уравнения (2) должен быть и корнем уравнения (1). Таким образом уравнения (1) и (2) имеют одни и те же корни, т. е. они равносильны.

Если бы число m было нуль, то после умножения мы не получили бы равносильного уравнения. Например, уравнение $x^2 + 2 = 3x$ имеет 2 корня: 1 и 2, когда же умножим обе его части на 0, то получим новое уравнение: $(x^2 + 2) \cdot 0 = 3x \cdot 0$, которое имеет бесчисленное множество произвольных корней, так как произведение всякого числа на нуль равно нулю. Если, например, положим, что $x = 10$, то найдем: $(10^2 + 2) \cdot 0 = 3 \cdot 10 \cdot 0$, т. е. $102 \cdot 0 = 30 \cdot 0$ или $0 = 0$; приняв $x = 20$, получим: $(20^2+2) \cdot 0 = 3 \cdot 20 \cdot 0$, т. е. $402 \cdot 0 = 60 \cdot 0$, или $0 = 0$, и т.д.

Значит, от умножения частей уравнения на 0 уравнение перестает существовать, обращаясь в очевидное тождество: 0 = 0.

Деление обеих частей уравнения на число, отличное от нуля, также ведет к равносильному уравнению, так как деление есть то же умножение, только на обратное число. Что же касается деления на нуль, то такое деление невозможно (отдел 1 § 33).

Таким образом, ***если обе части уравнения умножим, или разделим, на одно и то же число, отличное от нуля, то получим новое уравнение равносильное первому.***

123. Умножение или деление частей уравнения на одно и то же алгебраическое выражение. Иногда случается, что мы умножаем (или делим) части уравнения на одно и то же алгебраическое выражение. В этом случае надо задаться вопросом, не может ли это выражение при некоторых значениях букв обратиться в нуль. Если случится, что такие значения букв существуют, то при этих значениях нельзя умножать (или делить) части уравнения на наше алгебраическое выражение. Если мы об этом исключении забудем, то можем иногда впасть в ошибку. Приведем резкий пример такой ошибки.

Пусть нам дано равенство: $a = b$. Преобразуем это равенство таким образом: умножим обе его части на a, предполагая, что a (следовательно, и **Ь**) не равно 0. Тогда получим:

$$a^2 = ab.$$

Вычтем из обеих частей этого равенства по b^2 получим:

$$a^2 — b^2 = ab — b^2$$

что можно переписать так:

$$(a + b)(a — b) = b(a — b).$$

Разделив теперь обе части равенства на $a — b$, получим:

$$a + b = b, \text{ т. е. } 2b = b$$

(так как $a = b$) и, следовательно (по разделении обеих частей на b), $2 = 1$,. Этот нелепый вывод получился от того, что мы разделили обе части равенства на $a — b$, не обратив внимания на то, что эта разность при нашем задании ($a = b$) есть нуль, а на нуль делить невозможно.

124. Посторонние корни. Умножать обе части уравнения на одно и то же алгебраическое выражение приходится, между прочим, тогда, когда мы решаем уравнение, содержащее дроби, в знаменатели которых входит неизвестное. Пусть, например, надо решить уравнение:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

Общий знаменатель всех дробей есть, очевидно, $(x — 2)^2$. Приведя все члены к этому знаменателю:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2},$$

отбросим его, т. е., другими словами умножим все членыы на $(x — 2)^2$:

$$x^2 + 2 = x — 2 + 2x + 2$$

т. е.

$$x^2 + 2 = 3x;. \qquad (2)$$

Мы получили уравнение второй степени. Как решаются такие уравнения, мы увидим впоследствии; но полученное нами уравнение настолько просто, что мы легко можем сообразить, что оно имеет два корня: 1 и 2. Если это уравнение (2) равносильно данному уравнению (1), то тогда и уравнение (1) должно иметь те же корни 1 и 2. Но заранее ручаться за равносильность этих двух уравнений мы не можем, так как для перехода от уравнения (1) к уравнению (2) нам пришлось обе части первого уравнения умножить на алгебраическое выражение $(x — 2)^2$, которое при $x = 2$ обращается в нуль, а при умножении на нуль равносильность уравнений может нарушиться. Значит, надо испытать значение $x = 2$. Подставив это значение в данное уравнение, находим, что оно принимает невозможный вид:

$$^4/_0 + {}^2/_0 = {}^1/_0 + {}^6/_0$$

(деление на нуль невозможно).

Таким образом, корень $x = 2$ является посторонним для данного уравнения.

Мы видим таким образом, что если в данном уравнения имеются дроби, знаменатели которых содержат неизвестное, и мы освободились от этих знаменателей, умножив обе части уравнения на общий знаменатель, то, найдя корни полученного уравнения, мы должны еще подстановкой испытать их, с целью определить, нет ли среди корней посторонних.

Замечаиие. При делении частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее неизвестное, мы можем иногда потерять корень, именно то значение неизвестного (одно или несколько), при котором это выражение обращается в нуль. Пусть, например, дано уравнение:

$$x^2 — 1 = (5 — x)(x — 1).$$

Разложив его левую часть на два множителя, мы можем уравнение представить так:

$$(x — 1)(x + 1) = (5 — x)(x — 1).$$

Легко сообразить, что это уравнение имеет два корня: $x = 1$ и $x = 2$. Если же разделим обе части уравнения на $x—1$, то получим новое уравнение: $x + 1 = 5 — x$, которое имеет только один корень $x = 2$. Значит, от деления на $x — 1$ мы потеряла корень $x =1$, именно тот, который обращает в нуль разность $x — 1$.

Глава вторая.

Решения положительные, отрицательные, нулевые и другие.

125. Общий вид уравнения первой степени с одним неизвестным. Положим, что мы упростили уравнение о одним неизвестным, выполнив следующие преобразования: раскрыли скобки; освободились от знаменателей; перенесли неизвестные члены в левую часть уравнения, а известные — в правую и сделали приведение подобных членов. Если после этого в левой части окажется только член с неизвестным x в первой степени, то такое уравнение называется уравнением первой степени с одним неизвестным. Значит, общий вид такого уравнения есть следующий:

$$ax = b,$$

где ***a*** и ***b*** могут быть числами и положительными, и отрицательными, и равными нулю.

Рассмотрим, какого рода решения получает это уравнение при различных численных значениях букв ***a*** и ***b***.

126. Положительное решение. Такое решение получается тогда, когда числа ***a*** и ***b*** оба положительны или оба отрицательны.
Пусть, напр., $3x = 6$ или $—3x = —6$. Тогда мы получим (разделив обе части уравнения на коэффициент при неизвестном):

$$x = {}^{6}/_{3} = 2 \quad \text{или} \quad x = {}^{—6}/_{—3} = 2$$

Положительное решение, удовлетворяя уравнению, вместе с тем удовлетворяет и той задаче, из условий которой это уравнение выведено, если только в уравнении выражены все условия данной задачи. Но иногда может случиться, что не все условия задачи выражены в уравнении; тогда положительное решение, удовлетворяя уравнению, может иногда и не удовлетворить задаче. Приведем этому пример.

Задача. Рабочий кружок, состоящий из 20 человек взрослых и подростков, устроил сбор на покупку книг, для библиотеки, причем каждый взрослый внес по 3 руб., а каждый подросток по 1 руб. Сколько было в этом кружке взрослых и сколько подростков, если весь сбор составил 55 руб.?

Обозначим число взрослых буквой x ; тогда число подростков будет $20— x$, и сбор со взрослых окажется $3x$ руб., а с подростков $20 — x$ руб. Согласно условию задачи получим уравнение:

$$3x + (20 — x) = 55, \text{ откуда}$$

$$x = 17\ {}^{1}/_{2}$$

Это положительное решение, конечно, удовлетворяет уравнению, но не удовлетворяет задаче, так как по смыслу ее искомое число должно быть целым. Различие между уравнением и задачею произошло здесь от того, что уравнение не содержит в себе подразумеваемого в задаче требования, чтобы искомое число было целым. Предложенная задача оказывается невозможной.

127. Отрицательное решение. Такое решение получается из уравнения $ax = b$ тогда, когда числа ***a*** и ***b*** имеют противоположные знаки. Пусть, напр., $5x = — 15$, или $— 5x = 15$; тогда $x = {}^{—15}/_{5} = — 3$ или $x = {}^{15}/_{—5} = — 3$

Отрицательное решение надо понимать в смысле противоположном тому, в каком понимается положительное решение; напр., если положительное решение означало бы прибыль, выигрыш, время в будущем и пр., то отрицательное решение должно означать убыток, проигрыш, время в прошедшем и т. п. Если же случится, что по смыслу задачи неизвестное число x нельзя понимать в двух противоположных смыслах, то тогда отрицательное решение означает просто невозможность задачи.

Задача. Какое число надо приложить к числителю и знаменателю дроби ${}^{13}/_{17}$, чтобы получить дробь, равную ${}^{3}/_{4}$?

Обозначив искомое число буквой x, получим уравнение:

$$\frac{13+x}{17+x}=\frac{3}{4}$$

Так как это уравнение представляет собой пропорцию, то

$(13 + x) \cdot 4 = (17 + x) \cdot 4$; значит: $52 + 4x = 51 + 3x$, откуда:

$4x — 3x = 51 — 52 = — 1$, т. е. $x = — 1$.

Но приложить — 1 это все равно, что отнять 1. Значит, получившееся отрицательное решение дает ответ на такую задачу: какое число надо отнять от числителя и знаменателя дроби $^{13}/_{17}$, чтобы получить дробь, равную $^{3}/_{4}$. В нашем примере надо отнять по 1.

128. Нулевое решение. Положим, что в уравнении $ax = b$ число b окажется нулем, а коэффициент a будет какое-нибудь число, отличное от нуля. Пусть, напр., уравнение будет: $4x = 0$. Значит, уравнение требует, чтобы произведение $4x$ равнялось нулю. Но произведение равняется нулю только тогда, когда какой-нибудь сомножитель равен нулю; следовательно, сомножитель х должен равняться нулю. И из формулы $x = {}^{0}/_{4}$ видно, что $x = 0$.

Нулевое решение, удовлетворяя уравнению, вообще удовлетворяет и задаче.

Задача. Какое число надо приложить к числителю и знаменателю дроби $^{13}/_{26}$, чтобы получить $^{1}/_{2}$?

Обозначив искомое число буквой x, мы получим уравнение

$$\frac{13+x}{26+x}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$26 + 2x = 26 + x; \qquad x = 0.$$

Это значит, что данная дробь сама равна $^{1}/_{2}$

129. Случай, когда уравнение не имеет корня. Пусть в уравнении $ax = b$, число a окажется нулем, а число b не равно нулю; напр. $0 \cdot x = 10$. Такое равенство невозможно, так как какое бы число мы ни взяли для x, произведение $0 \cdot x$ равно нулю, а не 10.

Если бы мы, не заметив, что $a = 0$, разделили обе части уравнения на a, то получили бы для x такую формулу: $x = {}^{b}/_{a}$.

Обнаружив затем, что $a = 0$, мы из этой формулы нашли бы:

$$x = {}^{b}/_{0}.$$

Так как такое равенство не имеет смысла (деление на нуль невозможно), то мы пришли бы к заключению, что уравнение при этих условиях не имеет корня, и, следовательно, задача, из условий которой составлено это уравнение, невозможна.

130. Как можно понимать равенство: $x = {}^{b}/_{0}$. Если в уравнении $ax = b$ коэффициент a не равен нулю, а только близок к 0, то для x получается дробь: $x = {}^{b}/_{a}$. Зададимся вопросом, как изменяется величина этой дроби, если знаменатель ее все более и более приближается к нулю, а числитель остается неизменным. Предположим сначала, что числа a и b оба положительные. Возьмем для знаменателя a такие, напр., уменьшающиеся значения:

$$a=\frac{1}{10};\ a=\frac{1}{100};\ a=\frac{1}{1\,000};\ a=\frac{1}{10\,000};\ \text{и т. д.}$$

Тогда дробь — получит такие возрастающие выражения:

$$\frac{b}{{}^{1}/_{10}}=10b;\qquad \frac{b}{{}^{1}/_{100}}=100b;\quad \frac{b}{{}^{1}/_{1\,000}}=1000b;\ \text{и т. д.}$$

Отсюда видим, что при неограниченном уменьшении знаменателя a дробь- может превзойти любое данное число, как бы велико оно ни было (лишь бы только числитель b оставался без изменения).

Вспомним, что это свойство дроби мы уже видели раньше (отдел 3 § 112), когда говорили о графике функции: $y = {}^{6}/_{x}$, выражающей обратную пропорциональную зависимость. Там мы видели , что когда абсцисса x уменьшается, приближаясь к нулю (напр., переходя через значения: ${}^{1}/_{2}$; ${}^{1}/_{4}$; ${}^{1}/_{8}$; ${}^{1}/_{16}$; и т. д.), то ордината y, равная дроби ${}^{6}/_{x}$, увеличивается неограниченно, так что кривая (гипербола), по мере приближения ее к оси y-ов, подымается вверх беспредельно.

Если теперь допустим, что числитель a, или знаменатель b, или тот и другой — числа отрицательные, то сказанное сейчас может быть повторено и о такой дроби, но только надо тогда говорить не о величине самой дроби, а об абсолютной величине ее.

Таким образом, ***если в дроби знаменатель неограниченно приближается к нулю, а числитель остается без изменения, то абсолютная величина дроби неограниченно увеличивается.***

Иногда для краткости речи условно говорят, что при $a = 0$ уравнение $ax = b$ имеет бесконечное решение (бесконечный корень). Фразу эту нельзя понимать буквально, так как уравнение в этом случае совсем не имеет корня; фраза эта есть только краткое выражение следующего предложения: ***если в уравнении ax = b коэффициент a неограниченно приближается к нулю, а число b остается неизменным, то уравнение получает такое решение (положительное или отрицательное), которого абсолютная величина неограниченно возрастает.***

В том же смысле употребляется иногда краткая запись, вроде следующей:

$$\frac{m}{0}=\pm\infty$$

(читается: m, деленное на нуль, равно плюс-минус бесконечности). Запись эта означает только то свойство дроби, что если знаменатель ее стремится к нулю, а числитель остается без изменения, то абсолютная величина дроби неограниченно увеличивается (или, как иногда говорят: стремится к бесконечности), причем сама дробь остается или положительной, или отрицательной (смотря по тому, имеет ли знаменатель, стремящийся к нулю, одинаковый знак с числителем или противоположный).

Подобным же образом мы можем убедиться еще в следующем свойстве: ***если абсолютная величина знаменателя дроби неограниченно увеличивается, а числитель остается неизменным, то величина дроби неограниченно приближается к нулю.*** Свойство это сокращенно выражают таким условным равенством (которое тоже нельзя понимать буквально):

$$\frac{m}{\pm\infty} = 0$$

Это свойство дроби мы также видели на графике функции $y = {}^{6}/_{x}$; если абсцисса x этого графика возрастает беспредельно, то дробь уменьшается, неограниченно приближаясь к нулю, так что гипербола, по мере продолжения ее направо, все ближе и ближе придвигается к оси x - ов (никогда ее не достигая).

131. Неопределенное решение. Если в уравнении $ax = b$ оба числа a и b окажутся нулями, то уравнение обращается в тождество: $0 \cdot x = 0$, верное при всяком значении x. Значит, в этом случае уравнение становится неопределенным, т. е. оно допускает бесчисленное множество произвольных решений.

Если бы мы, не заметив, что $a = 0$, разделили обе части уравнения на a, то для x получили бы дробь ${}^{b}/_{a}$, которая при $b = 0$ и при $a = 0$ обращается в частное ${}^{0}/_{0}$. Такое частное, по определению деления, может равняться любому числу (отдел 1 § 33); значит, и в этом случае мы убедились бы, что уравнение допускает бесчисленное множество решений.

Задача. Какое число надо приложить к числителю и знаменателю дроби ${}^{a}/_{b}$ чтобы эта дробь сделалась равной числу m?

Обозначив искомое число буквой x, получим такое уравнение:

$$\frac{a+x}{b+x} = m,$$

откуда

$$a + x = bm + mx; \quad x - mx = bm - a;$$
$$(1 - m)x = bm - a; \quad x = \frac{bm - a}{1 - m}$$

Допустим, что числа a, b и m заданы такими, что числитель и знаменатель дроби, выведенной нами для x, обратятся в нули, т. е., что $bm = a$ и $1 = m$. Тогда для x получается выражение ${}^{0}/_{0}$ и, следовательно, уравнение и задача становятся неопределенными. И действительно, в этом случае $a = b$ и дробь равна **1**, какое бы число x мы ни прибавили к числителю и знаменателю.

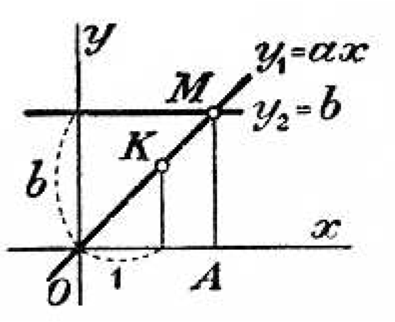
132. Графическое истолкование решения уравнения $ax = b$.

Из двух способов графического решения уравнения, указанных нами раньше (отдел

3 § 119), возьмем второй. Обозначим левую часть уравнения буквою y_1 и правую часть буквою y_2 и построим на одном и том же чертеже графики двух функций:

$$y_1 = ax \quad \text{и} \quad y_2 = b.$$

График первой функции есть прямая, проходящая через начало координат и через точку ***К (1, а)***, график второй функции есть прямая, параллельная оси ***x*** - ов и отсекающая от оси ***y***-ов отрезок ***b***

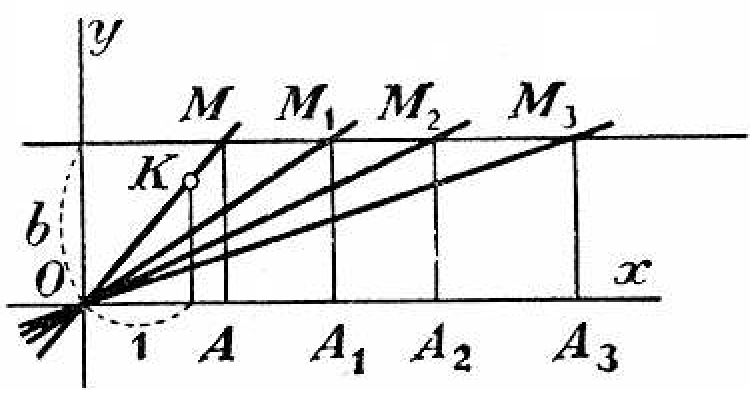


(на нашем чертеже мы изобразили случай, когда $a > 0$ и $b > 0$; предоставляем самим читателям сделать чертежи для случаев, когда:

1) $a > 0$, но $b < 0$;
2) $a < 0$, но $b > 0$ и
3) $a < 0$ и $b < 0$).

Пересечение этих двух прямых определит некоторую точку ***M***, абсцисса которой ***OA*** и будет корень уравнения $ax = b$, так как при этой абсциссе ордината прямой $y_1 = ax$ равна ординате прямой $y_2 = b$, и, следовательно, $ax = b$.

Пользуясь таким графическим изображением, мы можем наглядно истолковать все случаи решения уравнения $ax = b$. Ограничимся рассмотрением двух случаев: 1) „бесконечного" решения и 2) неопределенного решения.



а) Бесконечное решение. Уменьшая численную величину коэффициента ***a***, мы заставляем прямую $y = ax$ все более и более приближаться к оси ***x*** - ов. Тогда точка ***M***, в которой прямая $y = b$ пересекается с прямой $y = ax$, все более и более удаляется направо, переходя через положения M_1 M_2, M_3 и т. д., причем абсцисса ***OA*** точки пересечения беспредельно увеличивается, переходя через значения OA_1 OA_2, OA_3 и т. д. Значит, когда ***a*** неограниченно уменьшается, приближаясь к нулю, корень уравнения $ax = b$ беспредельно возрастает. Таким образом:

$$x = \frac{b}{0} = \infty$$

(На чертеже мы брали случай, когда $a > 0$ и $b > 0$; в других случаях мы могли бы получить: $x = {}^{b}/_{0} = — \infty$).

б) Неопределенное решение получаетоя, как мы видели (§ 131), при $a = b = 0$. Чтобы истолковать этот случай графически, вообразим, что на нашем чертеже величина b уменьшается, приближаясь к нулю; тогда прямая $y_2 = b$, оставаясь параллельною оси x-ов, будет все более и более приближаться к этой оси и при $b = 0$ сольется с нею. С другой стороны, прямая $y_1 = ax$ при $a = 0$ обратится тоже в ось x-ов, и тогда две прямые $y_2 = b$ и $y_1 = ax$ совпадут с осью x-ов, и, следовательно, каждую точку этой оси можно считать за точку пересечения; значит, величина корня остается неопределенной.

133. Буквенные уравнения. Нет надобности, чтобы неизвестное всегда обозначалось буквою x; оно может быть обозначено и какою угодно другою буквою. Возьмем, напр., формулу:

$$s = {}^{1}/_{2}\, bh$$

выражающую площадь s треугольника, у которого основание равно b линейных единиц и высота равна h таких же единиц. Формула эта представляет собой уравнение, в котором каждое из чисел s, b и h может быть принято за неизвестное.

Пусть, напр., предложена такая задача: найти основание треугольника, у которого высота равна h каких-нибудь линейных единиц, а площадь составляет s соответствующих квадратных единиц. Тогда в нашей формуле число b должно считаться неизвестным, а числа s и h известными. Конечно, мы можем неизвестное основание обозначить буквою x и написать уравнение так:

$$s = {}^{1}/_{2}\, hx$$

откуда

$$x = s : {}^{1}/_{2}\, h = 2s : h = {}^{2s}/_{h}$$

Но можно, не заменяя b на x, прямо из уравнения: $s = {}^{1}/_{2}\, bh$ определить b в зависимости от s и h :

$$s = {}^{1}/_{2}\, bh ; \quad 2s = bh ; \quad b = {}^{2s}/_{h}$$

Вообще надо привыкнуть решать не только численные уравнения, в которых данные числа выражены цифрами, а неизвестное обозначено буквой x , но и буквенные уравнения, в которых данные числа и неизвестное обозначены какими угодно буквами. Возьмем для примера еще формулу, известную из физики (см. задачу отдел 3 § 113):

$$l_t = l_0 + l_0\, at$$

в которой l_0 означает длину какого-нибудь стержня при 0°, l_t означает длину этого стержня при температуре t и a —так называемый коэффициент расширения вещества, из которого сделан стержень, т. е. число, показывающее, на какую долю длины при 0° увеличивается длина стержня при нагревании на каждый градус. В эту формулу входят 4 величины: ***l_0*, *l_t* , *a*** и ***t;*** каждую из них можно принять за неизвестное, которое можно определить из формулы в зависимости от остальных трех величин. Так, из формулы находим:

$$l_0 at = l_t - l_0;\ a = \frac{l_t - l_0}{l_0 t};\ t = \frac{l_t - l_0}{l_0 a};$$
$$l_t = l_0 (1 + at);\ l_0 = \frac{l_t}{1 + at}$$

Глава третья.

Неравенства первой степени.

134. Определение понятий „больше" и „меньше". Когда мы говорим, что **10** больше **7**, а **7** меньше **10**, то мы разумеем при этом, что число **10** включает в себе как часть число **7**, и что, следовательно, от **10** можно отделить (вычесть) **7**, тогда как от **7** нельзя отделить **10**; другими словами, мы хотим сказать, что разность **10—7** есть некоторое положительное число, тогда как разность **7—10** есть отрицательное число.

Условимся распространить такое понимание о большем и меньшем и на числа относительные, а именно условимся, что *относительное цисло **a** считается большим другою относительного числа **b** в том случае, когда разность **a—b** число положительное, и **a** считается меньшим **b**, когда разность **a—b** число отрицательное*.

При таком соглашении мы должны считать, что:

а) ***Всякое положительное число больше всякого отрицательного***;

напр., **+ 3 > — 5**, потому что разность (+3) — (— 5), равная сумме 3 + 5, есть число положительное.

б) ***Всякое положительное число больше нуля*** по той же причине;

напр., **+ 2 > 0** так как разность (+2) — 0 = + 2. *

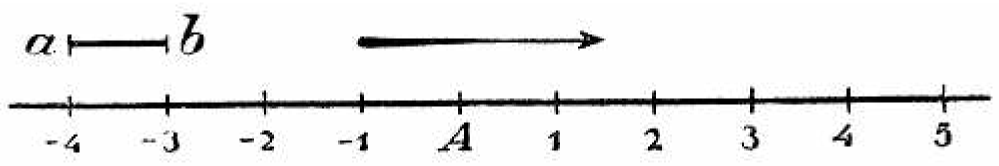
в) ***Всякое отрицательное число меньше нуля, так как разность между отрицательным числом и нулем всегда отрицательна;***

напр., **— 3 < 0**, так как (—3) — 0 = — 3.

г) ***Из двух отрицательных чисел то больше, у которою абсолютная величина меньше;*** напр., **—7 > — 9**, так как разность (— 7) — (— 9) = (— 7) + 9 = + 2, т. е. она есть положительное число.

Замечания. **1**. Если желают кратко выразить, что число ***a*** положительное, то пишут: ***a* > *0***; если же желают показать, что число ***a*** отрицательное, то пишут: ***a*<*0***.

2. Для ясного представления сравнительной величины относительных чисел всего лучше обратиться к наглядному изображению их на числовой прямой (отдел1 § 15). Выбрав произвольную единицу длины (***ab***), вообразим, что на неограниченной прямой вправо от какой-нибудь ее точки ***A***, принятой за начало, отложены отрезки, изображающие положительные числа + 1, +2, +3... (и промежуточные), а влево от той же точки отложены отрезки, изображающие отрицательные числа — 1, —2, —3... (и промежуточные).



Тогда, двигаясь по этой прямой слева направо (по направлению стрелки), мы будем постоянно переходить от чисел меньших к большим, а двигаясь в обратном направлении, будем постоянно переходить от чисел больших к меньшим.

135. Свойства неравенств. Два числа или два алгебраических выражения, соединенные между собою знаками > или <, составляют неравенство. Как и равенство, неравенство состоит из двух частей: левой и правой. Так, если возьмем неравенство:

$$3 + 8 > 10 - 2,$$

то левая часть его будет **3 + 8**, а правая **10 — 2.**

Обозначим левую часть неравенства одною буквою ***a***, а правую часть другою буквою ***b***. Тогда мы можем свойства неравенств высказать так:

а) Если $a > b$, то $b < a$. Действительно, если $a > b$, то это значит, что разность $a - b$ положительное число; но тогда разность $b - a$ есть число отрицательное, и потому $b < a$.

б) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Действительно, если $a > b$ и $b > c$, то это значит, что обе разности: $a - b$ и $b - c$ положительные числа; но тогда и сумма этих разностей положительное число, а эта сумма равна:

$$(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$$

Если же $a - c > 0$, то это значит, что $a > c$.

в) Если $a > b$ и m какое-нибудь относительное число, то $a + m > b + m$ Действительно, если $a > b$, то это значит, что разность $a - b$ положительное число; но тогда и разность $(a + m) - (b + m)$ есть также положительное число, так как эта разность равна

$$(a + m) - (b + m) = a + m - b - m = a - b.$$

Примеры.

$$+\left\{\begin{array}{l} -8 > -10 \\ +3 \quad +3 \end{array}\right. \qquad\qquad +\left\{\begin{array}{l} -8 > -10 \\ -3 \quad -3 \end{array}\right.$$
$$\overline{-5 > -7} \qquad\qquad\qquad \overline{-11 > -13}$$

Так как вычитание какого-нибудь числа равносильно прибавлению того же числа, но с противоположным знаком, то если $a > b$, то и $a - m > b - m$. Таким образом, ***если к обеим частям неравенства прибавим (или вычтем) одно и то же число,***

то знак неравенства не изменится (т. е. большее останется большим).

г) Если $a > b$ и m положительное число, то $am > bm$. Действительно, если разность $a — b$ положительное число, то и разность $am — bm$ положительное число, так как эта разность равна $(a — b)\, m$, а произведение положительного числа на положительное есть положительное число.

Примеры.

$$\begin{array}{rcl} -9 & > & -12 \\ 3 & & 3 \\ \hline -27 & > & -36 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -9 & > & -12 \\ {}^{1}/_{3} & & {}^{1}/_{3} \\ \hline -3 & > & -4 \end{array}$$

Так как деление на какое-нибудь число равносильно умножению на обратное число, то если $a > b$ и m положительное число, то и $a \cdot {}^{1}/_{m} > b \cdot {}^{1}/_{m}$, т. е. $a : m > b : m$.

Таким образом, ***если обе части неравенства умножим (или разделим) на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.***

д) Если $a > b$ и m число отрицательное, то $am < bm$. Действительно, если разность $a — b$ положительное число, то разность $am — bm$ будет отрицательное число, так как эта разность равна произведению положительного числа $a — b$ на отрицательное число m.

Примеры.

Таким образом, ***если обе части неравенства умножим (или разделим) на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.***

136. Решение неравенства 1-й степени с одним неизвестным.

Задача. Найти число, четверть которого, увеличенная на 10, превосходит ${}^{2}/_{3}$ числа, уменьшенного на 5.

Обозначив искомое число буквою x, мы получим неравенство:

$$\frac{1}{4}x + 10 > \frac{2}{3}x - 5.$$

Неравенство это уподобляется уравнению 1-й степени с одним неизвестным. Решить неравенство, содержащее неизвестное, значит найти такое число или такие числа, которые, будучи подставлены в неравенства на место неизвестного, обращают его в очевидное тождественное неравенство. Решение неравенства первой степени выполняется так же, как и решение уравнения, так как две основные истины, на которых основано решение уравнений (§§ 121, 122), применимы и к неравенствам, с единственным исключением, что при умножении (или делении) обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число знак неравенства должен быть изменен на противоположный.

Чтобы решить наше неравенство, освободим его сначала от знаменателей. Так как общий знаменатель 12, то умножим обе части неравенства на 12, от чего знак неравенства не изменится:

$$3x + 120 > 8x - 60.$$

Теперь перенесем неизвестные в одну часть неравенства, а известные в другую (отняв от обеих частей неравенства по ***120*** и по ***8x***):

$$3x - 8x > -60 - 120, \quad \text{т. е.} \quad -5x > -180.$$

Теперь разделим обе части на **— 5**, отчего знак неравенства изменится на противоположный:

$$x < \frac{-180}{-5}, \text{ т. е. } x < 36.$$

(Можно было бы также сказать: обе части неравенства ***— 5x > —180*** умножим на **— 1**, отчего знак неравенства изменится на противоположный: ***5x < 180***, и теперь разделим на **5**.**)**

Замечание. Более подробные сведения о неравенствах см. во 2-й части, § 404 и след.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

Глава первая. **Система двух уравнений с двумя неизвестными.**
Глава вторая. **Система трех уравнений с тремя неизвестными.**
Глава третья. **Некоторые особые случаи систем уравнений.**

Глава первая.

Система двух уравнений с двумя неизвестными.

137. Задача. Из опыта найдено, что слиток из серебра и меди весом в 148 кг теряет в воде весу $14^2/_3$ кг. Определить, сколько в нем серебра и сколько меди, если известно, что в воде 21 кг серебра теряют 2 кг, а 9 кг меди теряют 1 кг.

Положим, что в данном слитке содержится серебра x кг, а меди y кг. Тогда одно уравнение будет: $x + y = 148$. Для составления другого уравнения примем во внимание, что если 21 кг серебра теряют в воде 2 кг весу, то это значит, что 1 кг серебра теряет в воде $^2/_{21}$ кг. Тогда x кг должны терять в воде $^2/_{21}\,x$ кг весу. Подобно этому, если 9 кг меди теряют в воде 1 кг, то это значит, что 1 кг меди теряет $^1/_9$ кг; следовательно, y кг меди теряют $^1/_9\,y$ кг. Поэтому второе уравнение будет: $^2/_{21}\,x + {}^1/_9\,y = 14^2/_3$ Мы получили таким образом два уравнения с 2 неизвестными:

$$x + y = 148 \qquad \text{и} \qquad {}^2/_{21}\,x + {}^1/_9\,y = 14^2/_3 = {}^{44}/_3$$

Второе уравнение можно упростить, освободив его от дробей. Для этого приведем все дроби к одному знаменателю:

$$^6/_{63}\,x + {}^7/_{63}\,y = {}^{924}/_{63}$$

Теперь умножим обе части уравнения на 63; получим равносильное уравнение:

$$x + y = 924$$

Мы имеем теперь два уравнения:

$$x + y = 148 \qquad \text{и} \qquad 6x + 7y = 924$$

Мы можем решить эти два уравнения несколькими способами. Напр, так: из первого уравнения определим x в зависимости от y (другими словами, определим x как функцию от y):

$$x = 148 — y.$$

Так как во втором уравнении буквы x и y означают те же числа, что и в первом уравнении, то мы можем во второе уравнение подставить вместо x разность $148 — y$.

$$6\,(148 — y) + 7y = 924$$

Решим это уравнение с одним неизвестным:

$$888 — 6y + 7y = 924; y = 924 — 888 = 36.$$

Тогда $x = 148 — 36 = 112.$

Таким образом, в данном слитке содержится **112** кг серебра и **36** кг меди.

138. Нормальный вид уравнения первой степени с двумя неизвестными. Возьмем такой пример уравнения с 2 неизвестными:

$$2 (2x + 3y — 5) = {}^5/_8 (x + 3) + {}^3/_4 (y — 4).$$

С целью упростить это уравнение, сделаем в нем тот же ряд преобразований, какой был указан раньше для уравнения с 1 неизвестным, а именно.

1) Раскроем скобки: $4x + 6y — 10 = {}^5/_8 x + {}^{15}/_8 + {}^3/_4 y — 3$

2) Освободимся от знаменателей, умножив все члены на **8**:

$$32x + 48y — 80 = 5x + 15 + 6 y — 24$$

3) Перенесем неизвестные члены в одну часть уравнения, а известные в другую:

$$32x + 48y —5x — 6 y = 15 — 24 + 80$$

4) Сделаем приведение подобных членов:

$$27x + 42y = 71.$$

Таким образом, данное уравнение после указанных преобразований оказывается такого вида, при котором в левой части уравнения находятся только два члена: один с неизвестным x (в первой степени) и другой с неизвестным y (в первой степени), правая же часть уравнения состоит только из одного члена, не содержащего неизвестных. Коэффициенты при x и y могут быть или оба положительные (как во взятом нами примере), или оба отрицательные (этот случай, впрочем, можно свести на предыдущий, умножив все члены уравнения на — 1), или один положительный, а другой отрицательный; член, стоящий в правой части, может быть или положительным числом (как в настоящем примере), или отрицательным и даже нулем. Обозначив коэффициенты при x и y буквами a и b и член, не содержащий неизвестных, буквою c, мы можем уравнение с 2 не известными 1-й степени в общем виде представить так:

$$ax + by = c.$$

Такой вид уравнения называется нормальным видом уравнения 1-й степени с 2 неизвестными.

139. Неопределенность одного уравнения с 2 неизвестными. Одно уравнение с 2 неизвестными имеет бесчисленное множество корней. Действительно, если для одного какого-нибудь неизвестного мы назначим произвольное число и это число подставим в уравнение, то тогда мы получим уравнение только с одним другим неизвестным; из этого уравнения можно найти это другое неизвестное. Так, если в уравнении $3x— 2y = — 6$ мы примем, что $y = 2$, то уравнение будет $3x — 4 = —6$, откуда найдем: $3x = — 2$ и $x = — {}^2/_3$. Значит, если $y = 2$, то $x = — {}^2/_3$.

Теперь назначим для ***y*** какое-нибудь другое число, напр., ***y = 1***. Тогда получим ***3x— 2 = — 6***, ***3x*** = ***— 4***, ***x*** = **—1^{1}/3**. Значит, если ***y = 1***, то ***.x*** = **—1^{1}/3** . Таким образом, мы можем найти сколько угодно пар решений, и, следовательно, уравнение окажется неопределенным.

Это же можно показать и графически. Из уравнения:

$$3x - 2y = -6 \qquad (1)$$

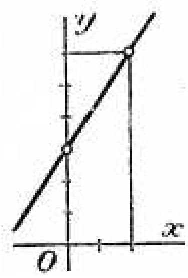
определим ***y*** как функцию от ***x*** :

$$y = \frac{3x + 6}{2} = 1^{1}/_{2}\ x + 3. \qquad \textbf{(2)}$$

Надо привыкнуть быстро и безошибочно из данного уравнения определять одно неизвестное как функцию другого неизвестного. Так, чтобы из нашего уравнения определить ***y*** как функцию от ***x***, надо мысленно перенести член ***—2y*** направо, а член ***—6*** налево, затем части уравнения переставить и разделить их на **2**; писать надо прямо результат этих преобразований.

Функция эта есть двучлен 1-й степени, а такой двучлен изображается в координатных осях в виде прямой линии, которую мы можем построить по двум точкам (отдел3 § 118), напр. таким:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$



Координаты каждой точки этой прямой удовлетворяют уравнению (2) и, следовательно, удовлетворяют и уравнению (1); а так как на прямой бесчисленное множество точек, то уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений.

140. Система уравнений. Принято говорить, что несколько уравнений образуют систему, если во всех этих уравнениях каждая из букв ***x, y,*** . . означает одно и то же число для всехуравнений.

Если, напр., два уравнения:

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2 \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

рассматриваются при том условии, что буква ***x*** означает одно и то же число в обоих уравнениях, равным образом и буква ***y***, то такие уравнения образуют систему. Это бывает всякий раз в том случае, когда уравнения составлены из условий одной и той же задачи.

Укажем три способа решения системы 2 уравнений 1-й степени с 2 неизвестными.

141. Способ подстановки. Этот способ мы уже применяли1 раньше, когда решали задачу о слитке из серебра и меди (§ 137). Возьмем теперь более сложный пример:

$$8x - 5y = -16; \quad 10x + 3y = 17$$

(оба уравнения мы привели к нормальному виду).

Из одного уравнения, напр, из первого, определим одно какое-нибудь неизвестное, напр, ***x***, как функцию другого неизвестного:

$$x = \frac{5y - 16}{8}$$

Так как второе уравнение должно удовлетворяться теми же значениями, как и первое, то мы можем подставить в него вместо ***x*** найденное выражение, от чего получим уравнение с одним неизвестным ***y***:

$$10 \cdot \frac{5y - 16}{8} + 3y = 17$$

Решим это уравнение:

$$\frac{5(5y - 16)}{4} + 3y = 17; \quad 25y - 80 + 12y = 68; \quad 37y = 148; \quad y = 4;$$

тогда:

$$x = \frac{5y - 16}{8} = \frac{5 \cdot 4 - 16}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Мы могли бы определить из одного уравнения ***y*** как функцию от ***x*** и полученное выражение подставить на место ***y*** в другое уравнение; тогда мы получили бы уравнение с неизвестным ***x***.

Способ этот особенно удобен тогда, когда коэффициент при каком-нибудь неизвестном равен 1; тогда всего лучше определить это неизвестное как функцию другого неизвестного (не придется делить на коэффициент), и т. д.

Напр.:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим:

$$y = 22 - 4x.$$

Тогда первое уравнение дает:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11; \quad 3x - 44 + 8x = 11; \ 11x = 44 + 11 = 55.$$

$$x = {}^{55}/_{11} = 5; \ y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Правило. ***Чтобы решить систему двух уравнений с 2 неизвестными способом подстановки, надо определить из какого-нибудь уравнения одно неизвестное как функцию другого неизвестного и полученное выражение подставить в другое***

уравнение; от этого получается уравнение с одним неизвестным. Решив его, находят это неизвестное. Подставив найденное число в выражение, выведенное раньше для первого неизвестного, находят и это другое неизвестное.

142. Способ сложения или вычитания. Предположим сначала, что в данной системе уравнений (приведенных предварительно к нормальному виду) коэффициенты при каком-нибудь неизвестном, напр, при ***y***, будут одинаковы. При этом могут представиться два случая:

1) знаки перед такими коэффициентами разные и

2) знаки одинаковые. Рассмотрим эти два случая параллельно. Пусть, напр., даны две системы:

$$\begin{array}{c|c} \textbf{1 система:} & \textbf{2 система:} \\ \begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases} & \begin{cases} 5x + 8y = 31 \\ 3x + 8y = 25. \end{cases} \end{array}$$

Если сложим почленно уравнения первой системы и вычтем почленно уравнения второй системы, то неизвестное y исключится:

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases} \\ \hline 12x \qquad = 60 \end{array} & \begin{array}{l} \begin{cases} 5x + 8y = 31 \\ -3x \pm 8y = -25 \end{cases} \\ \hline 2x \qquad\qquad = 6 \end{array} \end{array}$$

Откуда: ***x* = 5** ***x* =3**

Подставив в одно из данных уравнений вместо ***x*** найденное для него число, найдем ***y***:

$$\begin{array}{c|c} 7\cdot5 - 2y = 27 & 5\cdot3 + 8y = 31 \\ y = 4 & y = 2 \end{array}$$

Возьмем теперь систему, в которой коэффициенты различны, напр. такую:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \\ -5x + 8y = 10. \end{cases}$$

Мы можем тогда предварительно уравнять коэффициенты при каком-нибудь одном неизвестном, напр, при ***x***. Для этого найдем кратное (лучше всего наименьшее) коэффициентов 7 и 5 (это будет 35) и умножим обе части каждого уравнения на соответствующий дополнительный множитель (как это делается при приведении дробей к общему знаменателю):

$$\begin{array}{c|c} \begin{cases} 7x + 6y = 29 \ (\text{на } 5) \\ -5x + 8y = 10 \ (\text{на } 7) \end{cases} & \begin{cases} 35x + 30y = 145 \\ -35x + 56y = 70. \end{cases} \end{array}$$

После этого остается только сложить или вычесть преобразованные уравнения. В нашем примере знаки перед коэффициентами ***x*** разные; поэтому уравнения надо сложить:

$$\begin{array}{r} 35x + 30y = 145 \\ -\,35x + 56y = 70 \\ \hline 86y = 215;\quad y = \dfrac{215}{86} = 2^1/_2. \end{array}$$

Теперь первое уравнение дает:

$$7x + 6 \bullet 2^{1}/_{2} = 29;\quad 7x + 15 = 29;\quad 7x = 14;\quad x = 2.$$

Правило. ***Чтобы решить систему двух уравнений с 2 неизвестными способом сложения или вычитания , надо сначала уравнять в обоих уравнениях коэффициенты при каком-нибудь одном неизвестном, а потом сложить оба уравнения, если знаки перед этими коэффициентами разные, или вычесть уравнения, если знаки одинаковые.***

143. Графическое решение. Пусть дана система:

$$8x - 5y = -16;\quad 10x + 3y = 17.$$

Из каждого уравнения определим ***y*** как функцию от ***x*** :

$$1)\ y = \frac{8x + 16}{5} = 1^3/_5 x + 3^1/_5;$$

$$2)\ y = \frac{17 - 10x}{3} = 5^2/_3 - 3^1/_3 x.$$

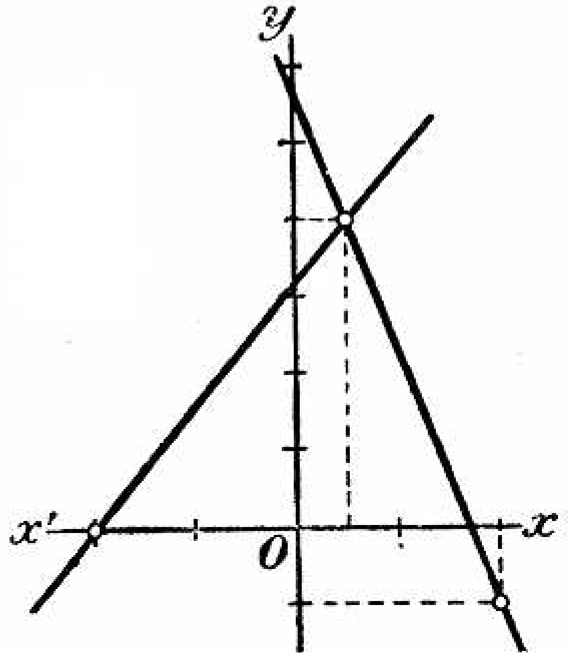
Графики этих функций должны быть прямые линии. Построим на одном чертеже каждую из них по двум точкам, напр, по таким:

из уравнения.......$y = 1^3/_5\, x + 3^1/_5$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3^1/_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

из уравнения.......$y = 5^2/_3 - 3^1/_3\, x$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5^2/_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$



На чертеже видно, что две прямые пересекаются в точке, абсцисса которой равна $^1/_2$, а ордината **4**. Эти значения ***x*** и ***y***, удовлетворяя обоим уравнениям, и будут решениями данной системы.

Замечания. 1) Если бы случилось, что прямые,выражающие данные уравнения, оказались параллельными и, следовательно, не существовало бы точки их пересечения, то это значило бы, что уравнения не имеют корней.

2) Может иногда случиться, что 2 прямые сливаются в одну; тогда координаты всякой точки этой прямой удовлетворяют данным уравнениям, и, значит, система неопределенна.

3) В конце 2-й части этой книги указаны общие формулы для решения системы двух уравнений с 2 неизвестными первой степени (§ 396 и след.).

Глава вторая.

Система трех уравнений с тремя неизвестными.

144. Нормальный вид уравнения первой степени с тремя неизвестными. Если в уравнении 1-й степени с 3 неизвестными ***x, y*** и ***z*** сделаны те же преобразования, какие были нами раньше указаны для уравнения с 1 и 2 неизвестными, то мы приведем уравнение к такому виду (называемому нормальным), при котором в левой части уравнения находятся только три члена: один с ***x***, другой с ***y*** и третий с ***z***, а в правой части будет один член, не содержащий неизвестных.

Таково, напр., уравнение:

$$5x - 3y - 4z = -12.$$

Общий вид его есть следующий:

$$ax + by + cz = d,$$

где ***a, b, c*** и ***d*** какие-нибудь относительные числа.

145. Неопределенность двух и одного уравнения с тремя неизвестными. Положим, нам дана система 2 уравнений с 3 неизвестными:

$$5x - 3y + z = 2; \qquad 2x + y - z = 6.$$

Назначим одному неизвестному, напр. z, какое-нибудь произвольное число, положим 1, и подставим это число на место z :

Мы получили таким образом систему 2 уравнений с 2 неизвестными. Решив ее каким-нибудь способом, найдем: $x = 2, y = 3$; значит, данная система с 3 неизвестными удовлетворяется при $x = 2$, $y = 3$ и $z =1$. Дадим теперь неизвестному z какое-нибудь иное значение, напр. $z = 0$, и подставим это значение в данные уравнения:

$$5x - 3y = 2; \qquad 2x + y = 6.$$

Мы снова получим систему 2 уравнений с 2 неизвестными.

Решив ее каким-нибудь способом, найдем:

$$x = {}^{20}/_{11} = 1\,{}^{9}/_{11} \qquad y = 2\,{}^{4}/_{11}$$

Значит, данная система удовлетворяется при $x = 1\,{}^{9}/_{11}$ $y = 2\,{}^{4}/_{11}$ и $z = 0$. Назначив для z еще какое-нибудь (третье) значение, мы снова получим систему 2 уравнений с 2 неизвестными, из которой найдем новые значения для x и y. Так как для z мы можем назначать сколько угодно различных чисел, то и для x и y можем получить сколько угодно значений (соответствующих взятым значениям z). Значит, 2 уравнения с 3 неизвестными допускают бесчисленное множество решений; другими словами, такая система неопределенна.

Еще большая неопределенность будет, если имеется всего 1 уравнение с 3 неизвестными. Тогда можно будет для каких-нибудь 2 неизвестных назначить произвольные числа; третье же неизвестное найдется из данного уравнения, если подставить в него значения, взятые произвольно для двух неизвестных.

146. Система 3 уравнений с 3 неизвестными. Для того, чтобы можно было найти определенные численные значения для трех неизвестных x, y и z, необходимо, чтобы была задана система 3 уравнений. Такая система может быть решена способом подстановки, а также и способом сложения или вычитания уравнений. Покажем применение этих способов на следующем примере (каждое уравнение предварительно приведено к нормальному виду):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 7x + 4y - 8z = 3 \\ 5x - 3y - 4z = -12 \end{cases}$$

147. Способ подстановки. Из какого-нибудь уравнения, напр, из первого, определим одно неизвестное, напр, x, как функцию от двух остальных неизвестных:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}$$

Так как во всех уравнениях x означает одно и то же число, то мы можем подставить найденное выражение на место x в остальные уравнения:

$$7 \cdot \frac{7+2y-5z}{3} + 4y - 8z = 3.$$

$$5 \cdot \frac{7+2y-5z}{3} - 3y - 4z = -12.$$

Мы приходим таким образом к системе 2 уравнений с 2 неизвестными ***y*** и ***z***. Решив эту систему по какому-нибудь из способов, указанных раньше, найдем численные значения для ***y*** и ***г***. В нашем примере это будут значения: ***y = 3, z = 2***; подставив эти числа в выражение, выведенное нами для ***x***, найдем и это неизвестное:

$$x = \frac{7 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{3} = 1$$

Таким образом, предложенная система имеет решение ***x = 1, y = 3, z = 2*** (в чем можно убедиться поверкою).

148. Способ сложения или вычитания. Из 3 данных уравнений возьмем какие-нибудь два, напр. 1-е и 2-е, и, уравняв в них коэффициенты перед одним неизвестным, напр, перед ***z***, исключим из них это неизвестное способом сложения или вычитания; от этого получим одно уравнение с 2 неизвестными ***x*** и ***y***. Потом, возьмем какие-нибудь два других уравнения из 3 данных, напр. 1-е и 3-е (или 2-е и 3-е), и тем же способом исключим из них то же неизвестное т. е. ***z*** ; от этого получим еще одно уравнение с ***x*** и ***y***:

$$\begin{array}{l|l}
1)\ 3x - 2y + 5z = 7\ (\text{на } 8) & 24x - 16y + 40z = 56 \\
2)\ 7x + 4y - 8z = 3\ (\text{на } 5) & 35x + 20y - 40z = 15 \\
\cline{2-2}
 & 59x + 4y = 71
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
1)\ 3x - 2y + 5z = 7\ (\text{на } 4) & 12x - 8y + 20z = 28 \\
3)\ 5x - 3y - 4z = -12 (\text{на } 5) & 25x - 15y - 20z = -60 \\
\cline{2-2}
 & 37x - 23y = -32.
\end{array}$$

Решим получившиеся два уравнения: ***x = 1, y = 3***. Вставим эти числа в одно из трех данных уравнений, напр, в первое:

3 • 1 — 2 • 3 + 5z = 7;   5z = 7 —3 + 6 = 10;   z =2.

Замечание. Теми же двумя способами мы можем привести систему 4 уравнений с 4 неизвестными к системе 3 уравнений с 3 неизвестными (а эту систему —к системе 2 уравнений с 2 неизвестными и т. д.). Вообще систему ***m*** уравнений с ***m*** неизвестными мы можем привести к системе ***m* — 1** уравнений с ***m* — 1** неизвестными (а эту систему к системе ***m* — 2** уравнений с ***m* — 2** неизвестными и т. д.).

Глава третья.

Некоторые особые случаи систем уравнений.

149. Случай, когда не все неизвестные входят в каждое из данных уравнений; напр.:

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5 \\ 4v - 5x = 6 \\ 2y + 3z = 6 \\ 3y + 2v = 4. \end{cases}$$

В этом случае система решается быстрее, чем обыкновенно, так как в некоторых уравнениях уже исключены те или другие неизвестные. Надо только сообразить, какие неизвестные и из каких уравнений следует исключить, чтобы возможно скорее дойти до одного уравнения с одним неизвестным. В нашем примере, исключив ***z*** из 1-го и 3-го уравнений и ***v*** из 2-го и 1-го, получим 2 уравнения с ***x*** и ***y***:

$$-\begin{cases} 10x - y + 3z = 5 \\ 2y + 3z = 6 \end{cases} \qquad -\begin{cases} 4v - 5x = 6 \\ 4v + 6y = 8 \end{cases}$$
$$\overline{10x - 3y \quad = -1} \qquad \overline{-5x - 6y = -2.}$$

Решив эти уравнения, найдем: $x = 0,\ \ y = {}^{1}/_{3}$.

Теперь вставим эти числа во 2-е и 3-е уравнения; тогда получим:

$$v = {}^{3}/_{2}\ ; \qquad z = {}^{16}/_{9} = 1\,{}^{7}/_{9}$$

150. Случай, когда неизвестные входят в виде дробей: $^{1}/_{x}$; $^{1}/_{y}$ . . . Пусть дана, напр., система:

$$-\begin{cases} 10x - y + 3z = 5 \\ 2y + 3z = 6 \end{cases} \qquad -\begin{cases} 4v - 5x = 6 \\ 4v + 6y = 8 \end{cases}$$
$$\overline{10x - 3y \quad = -1} \qquad \overline{-5x - 6y = -2.}$$

Всего проще такую систему можно решить посредством введения вспомогательных неизвестных. Положим, что $^{1}/_{x} = x'$, $^{1}/_{y} = y'$ $^{1}/_{z} = z'$, . Тогда мы получим такую систему с неизвестными ***x ', y'*** и ***z'***

$$\begin{cases} x' + y' - z' = {}^{7}/_{6} \\ x' - y' - z' = -{}^{5}/_{6} \\ y' - x' - z' = {}^{1}/_{6}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем:

$$x' = {}^{1}/_{2},\ y' = 1,\ z' = {}^{1}/_{3},$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$$

Отсюда окончательно находим: $x = 2,\ y = 1,\ z = 3$

Возьмем еще другой пример:

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13 \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5^1/_2 \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{z}=3^1/_2 \end{array}\right.$$

Дроби ${}^3/_x$; ${}^2/_y$ и т. п. можно рассматривать как произведения: **$3 \bullet {}^1/_x$** ; **$2 \bullet {}^1/_y$** и т. д. Поэтому, если положим, что **${}^1/_x = x'$**, **${}^1/_y = y'$**, и **${}^1/_z = z'$** , то система изобразится так:

$$\begin{array}{r} 3x'+2y'-4z'=-13 \\ 6x'-3y'-z'=5^1/_2 \\ -5x'+7y'+2z'=3^1/_2 \end{array}$$

Из этих уравнений находим:

$$x' = 2,\ y' = {}^1/_2,\ z' = 5\ ;$$

значит:

$$ {}^1/_x = 2, \quad {}^1/_y = {}^1/_2\ , \quad {}^1/_z = 5$$

откуда:

$$x = {}^1/_2\ , \quad y = 2\ , \quad z = {}^1/_5\ ;$$

151. Случай, когда полезно все данные уравнения сложить.

Пусть имеем, напр., систему:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{array}\right.$$

Сложив все три уравнения, найдем:

$$2(x+y+z)=a+b+c;\ x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Вычтя из последнего уравнения каждое из данных, получим:

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a;\ x=\frac{a+b+c}{2}-b;\ y=\frac{a+b+c}{2}-c$$

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ.

СТЕПЕНИ И КОРНИ.

Глава первая. **Возвышение в квадрат одночленных алгебраических выражений.**
Глава вторая. **Возвышение в квадрат многочлена.**
Глава третья. **Графическое изображение функций. $y = x^2$ и $y = ax^2$**
Глава четвертая. **Возвышение в куб и в другие степени одночленных алгебраических выражений.**
Глава пятая.**Графическое изображение функций: $y = x^3$ и $y = ax^3$.**
Глава шестая. **Основные свойства извлечения корня.**

Глава первая.

Возвышение в квадрат одночленных алгебраических выражений.

152. Определение степени. Напомним, что произведение двух одинаковых чисел ***aa*** называется второю степенью (или квадратом) числа ***a***, произведение трех одинаковых чисел ***aaa*** называется третьей степенью (или кубом) числа ***a***; вообще произведение ***n*** одинаковых чисел ***aa... a*** называется ***n***-ю степенью числа ***a***. Действие, посредством которого находится степень данного числа, называется возвышением в степень (вторую, третью и т. д.). Повторяющийся сомножитель называется основанием степени, а число одинаковых сомножителей называется показателем степени.

Сокращенно степени обозначаются так: a^2, a^3, a^4... и т. д.

Мы сначала будем говорить о простейшем случае возвышения в степень, именно о возвышении в квадрат; а после рассмотрим возвышение и в другие степени.

153. Правило знаков при возвышении в квадрат. Из правила умножения относительных чисел следует, что:

$$(+2)^2=(+2)\ (+2) = +\ 4; \qquad (+{}^1/_3)^2=(+{}^1/_3)(+{}^1/_3) = +{}^1/_9;$$

$$(—2)^2=(—2)\ (—2) = +\ 4; \qquad (—{}^1/_3)^2=(—{}^1/_3)(—{}^1/_3) = +{}^1/_9$$

Вообще:

$$(+a)^2=(+a)\ (+a) = +a^2$$

$$(—a)^2=(—a)\ (—a) = +a^2$$

Значит, квадрат всякого относительного числа есть число положительное.

154. Возвышение в квадрат произведения, степени и дроби.

а) Пусть требуется возвысить в квадрат произведение нескольких сомножителей, напр. ***abc***. Это значит, что требуется ***abc*** умножить на ***abc***. Но чтобы умножить на произведение ***abc***, можно умножить множимое на ***a***, результат умножить на ***b*** и что получатся умножить еще на ***c*** .

Значит:

$$(abc)^2 = (abc)\,(abc) = (abc)\,abc = abcabc$$

(мы отбросили последние скобки, так как от этого смысл выражения не изменяется). Теперь, пользуясь сочетательным свойством умножения (отдел1§ 34, б), сгруппируем сомножители так:

$$(aa)\,(bb)\,(cc),$$

что можно сокращенно написать: $a^2b^2c^2$.

Значит, ***чтобы возвысить произведение в квадрат, можно возвысить в квадрат каждый сомножитель отдельно***
(Для сокращения речи правило это, как и последующее, выражено не полно; надо было бы еще добавить: „и полученные результаты перемножить". Добавление ото само собой подразумевается..)

Таким образом:

$$\left(\tfrac{3}{4}xy\right)^2 = \tfrac{9}{16}\,x^2y^2; \quad (—\,0{,}5mn)^2 = +\,0{,}25m^2n^2; \quad \text{и т. п.}$$

б) Пусть требуется какую-нибудь степень, напр. a^3, возвысить в квадрат. Это можно выполнить так:

$$(a^3)^2 = a^3 \bullet a^3 = a^{3+3} = a^6.$$

Подобно этому: $(x^4)^2 = x^4 \bullet x^4 = x^{4+4} = x^8$

Значит, ***чтобы возвысить степень в квадрат, можно показатель степени умножить на 2***.

Таким образом, применяя эти два правила, будем, напр., иметь:

$$\left(—\,3\tfrac{3}{4}\,a\,x^2\,y^3\right)^2 = \left(—\,3\tfrac{3}{4}\right)^2 a^2\,(x^2)^2\,(y^3)^2 = \tfrac{225}{2}\,a^2\,x^4\,y^6$$

в) Пусть требуется возвысить в квадрат какую-нибудь дробь a/b. Тогда, применяя правило умножения дроби на дробь, получим:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$$

Значит, ***чтобы возвысить в квадрат дробь, можно возвысить в квадрат отдельно числитель и знаменатель.***

Пример.

$$\left(\frac{-5\,ax^2}{4b}\right)^2 = \frac{(-5ax^2)^2}{(4b)^2} = \frac{25a^2x^4}{16b^2}.$$

Глава вторая.

Возвышение в квадрат многочлена.

155. Вывод формулы. Пользуясь формулой (отдел2 глава3 § 61):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

мы можем возвысить в квадрат трехчлен $a + b + c$, рассматривая его как двучлен $(a + b) + c$:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$$

Таким образом, с прибавлением к двучлену $a + b$ третьего члена c после возвышения в квадрат прибавились 2 члена: 1) удвоенное произведение суммы первых двух членов на третий член и 2) квадрат третьего члена. Приложим теперь к трехчлену $a + b + c$ еще четвертый член d и возвысим четырехчлен $a + b + c + d$ в квадрат, принимая сумму $a + b + c$ за один член.

$$(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2$$

Подставив вместо $(a + b + c)^2$ то выражение, которое мы получили выше, найдем:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$$

Мы опять замечаем, что с прибавлением нового члена к возвышаемому многочлену в квадрате его прибавляются 2 члена: 1) удвоенное произведение суммы прежних членов на новый член и 2) квадрат нового члена. Очевидно, что такое прибавление двух членов будет идти и дальше по мере прибавления новых членов к возвышаемому многочлену. Значит:

Квадрат многочлена равен: квадрату 1-го члена, плюс удвоенное произведение 1-го члена на 2-й, плюс квадрат 2-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й, плюс квадрат 3-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых трех членов на 4-й, плюс квадрат 4-го члена, и т. д. Конечно, члены многочлена могут быть и отрицательными.

156. Замечание о знаках. В окончательном результате со знаком плюс окажутся, во-первых, квадраты всех членов многочлена и, во-вторых, те удвоенные произведения, которые произошли от умножения членов с одинаковыми знаками.

Пример.

$$\begin{aligned}(^1/_2x^2 - 4x - 3)^2 = (^1/_2x^2)^2 + 2\,(^1/_2x^2)\,(-4x) + (-4x)^2 + \\ + 2\,(^1/_2x^2 - 4x)\,(-3) + (-3)^2 = {^1/_4}x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 3x^2 + \\ + 24x + 9 = {^1/_4}x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 24x + 9.\end{aligned}$$

157. Сокращенное возвышение в квадрат целых чисел. Пользуясь формулою квадрата многочлена, можно возвышать в квадрат всякое целое число иначе, чем обыкновенным умножением. Пусть, напр., требуется возвысить в квадрат **86**. Разложим это число на разряды:

86 = 80 + 6 = 8 дес.+ 6 ед.

Теперь по формуле квадрата суммы двух чисел можем написать:

$$\textbf{(8 дес.+ 6 ед.)}^2\textbf{=(8 дес.)}^2\textbf{ + 2(8 дес.) (6 ед.) + (6 ед.)}^2\textbf{.}$$

Чтобы быстрее вычислить эту сумму, примем во внимание, что квадрат десятков составляет сотни (но могут быть и тысячи); напр. **8 дес**. в квадрате образуют **64 сотни**, так как $\mathbf{80^2 = б400}$; произведение десятков на единицы составляет десятки (но могут быть и сотни), напр. 3 дес. • 5 ед. = 15 дес, так как 30 • 5 = 150; и квадрат единиц составляет единицы (но могут быть и десятки), напр. 9 ед. в квадрате = 81 ед. Поэтому вычисление всего удобнее расположить так:

$$\begin{array}{rl}
86^2 = 64 & \text{. . . . сотен (квадрат 8 дес.)} \\
96 & \text{. . . десятков (удв. произв. 8 дес. на 6 ед.)} \\
36 & \text{. . . единиц (квадрат 6 ед.),} \\
\hline
7396 &
\end{array}$$

т. е. мы пишем сначала квадрат первой цифры (сотни); под этим числом пишем удвоенное произведение первой цифры на вторую (десятки), наблюдая при этом, чтобы последняя цифра этого произведения стояла на одно место правее последней цифры верхнего числа; далее, снова отступив последней цифрой на одно место вправо, ставим квадрат второй цифры (единицы); и все написанные числа складываем в одну сумму. Конечно, можно было бы дополнить эти числа надлежащим количеством нулей, т. е. написать так:

$$\begin{array}{r}
86^2 = 6400 \\
960 \\
36 \\
\hline
7396,
\end{array}$$

но это бесполезно, если только будем правильно подписывать числа друг под другом, отступая каждый раз (последней цифрой) на одно место вправо.

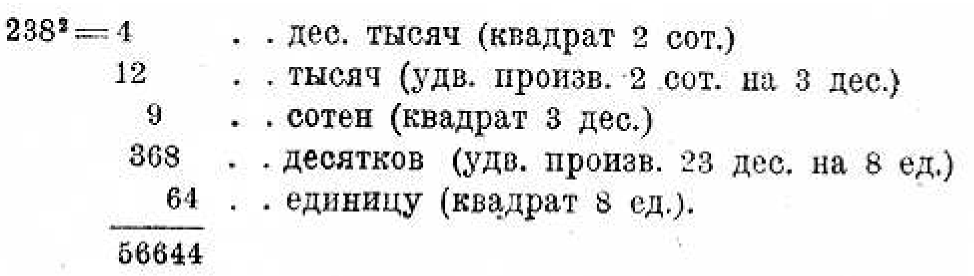
Пусть еще требуется возвысить в квадрат **238**. Так как:

238 = 2 сот. + 3 дес. + 8 ед., то

$$238^2 = (2\ \text{сот.})^2 + 2\,(2\ \text{сот.})\ (3\ \text{дес.}) + (3\ \text{дес.})^2 + 2\underbrace{(2\ \text{сот.} + 3\ \text{дес.})}_{23\ \text{дес.}}\ (8\ \text{ед.}) + (8\ \text{ед.})^2.$$

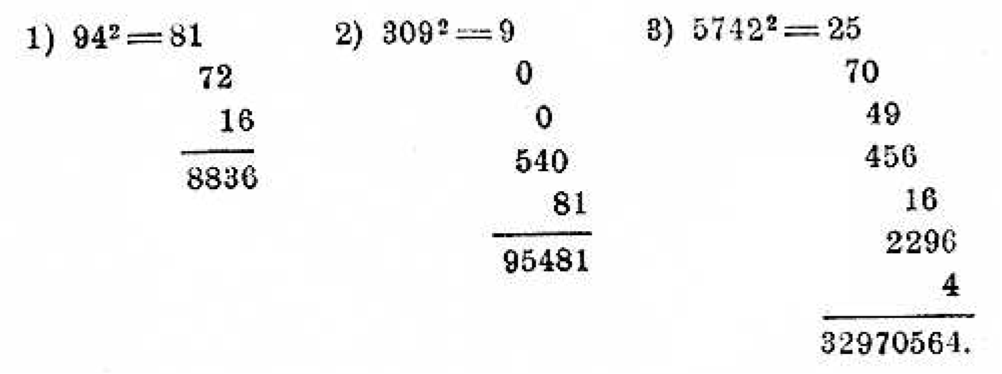
Но сотни в квадрате дают десятки тысяч (напр., 5 сот. в квадрате будет 25 дес. тысяч, так как 500^2 = 250 000), произведение сотен на десятки дает тысячи (напр. 500 • 30= 15 000) и т. д.

Значит:



$238^2 = 4$ . . дес. тысяч (квадрат 2 сот.)
12 . . тысяч (удв. произв. 2 сот. на 3 дес.)
9 . . сотен (квадрат 3 дес.)
368 . . десятков (удв. произв. 23 дес. на 8 ед.)
64 . . единицу (квадрат 8 ед.).
56644

Примеры.



1) $94^2 = 81$
72
16
8836

2) $309^2 = 9$
0
0
540
81
95481

3) $5742^2 = 25$
70
49
456
16
2296
4
32970564.

Глава третья.

Графическое изображение функций: $y = x^2$ и $y = ax^2$.

158. График функции $y = x^2$. Проследим, как при изменении возвышаемого числа x изменяется квадрат его x^2 (напр., как при изменении стороны квадрата изменяется его площадь). Для этого предварительно обратим внимание на следующие особенности функции $y = x^2$.

а) При всяком значении x функция всегда возможна и всегда получает только одно определенное значение. Напр, при $x = — 10$ функция будет $(—10)^2 = 100$, при
$x = 1000$ функция будет $1000^2 = 1\,000\,000$, и т. п.

б) Так как $(—x)^2 = x^2$, то при двух значениях x, отличающихся только знаками, получаются два одинаковые положительные значения y; напр, при $x = — 2$ и при $x = + 2$ значение y будет одно и то же, именно **4**. Отрицательных значений для **y** никогда не получается.

в) Если абсолютная величина х неограниченно увеличивается, то и y неограниченно увеличивается. Так, если для x будем давать ряд неограниченно возрастающих положительных значений: 1, 2, 3, 4... или ряд неограниченно убывающих отрица тельных значений: —1, —2, —3, —4..., то для y получим ряд неограниченно возрастающих значений: 1, 4, 9, 16, 25... Эти кратко выражают, говоря, что при $x = + \infty$ и при $x = — \infty$ функция y делается $+ \infty$.

г) Очень малому приращению переменного числа x соответствует и очень малое приращение функции y. Так, если значению $x = 2$, дадим приращение, положим, **0,1** (т. е. вместо $x = 2$ возьмем $x = 2,1$), то y вместо $2^2 = 4$ сделается равным

$$(2 + 0{,}1)^2 = = 2^2 + 2 \bullet 2 \bullet 0{,}1 + 0{,}1^2.$$

Значит, ***y*** увеличится на $\mathbf{2 \bullet 2 \bullet 0{,}1 + 0{,}1^2}$ = **0,41**. Если тому же значению ***x*** дадим еще меньшее приращение, положим, **0,01**, то у сделается равным

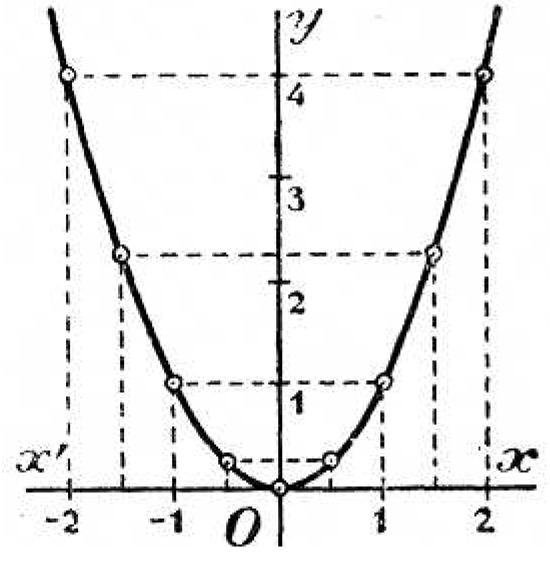
$$(2 + 0{,}01)^2 = = 2^2 + 2 \bullet 2 \bullet 0{,}01 + 0{,}01^2..$$

Значит, тогда у увеличится на $\mathbf{2 \bullet 2 \bullet 0{,}01 + 0{,}01^2}$= **0,0401**, т. е. увеличится меньше, чем прежде. Вообще, чем на меньшую дробь мы увеличим ***x***, тем на меньшее число увеличится ***y***. Таким образом, если представим себе, что ***x*** увеличивается (положим от значения 2) непрерывно, переходя через все значения, большие 2, то ***y*** будет увеличиваться тоже непрерывно, переходя через все значения, большие 4.

Заметив все эти свойства, составим таблицу значений функции $y = x^2$, напр., такую:

x	$-\infty$	. . .	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	. . .	$+\infty$
y	$+\infty$	. . .	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	. . .	$+\infty$

Изобразим теперь эти значения на чертеже в виде точек, абсциссы которых будут выписанные значения ***x***, а ординаты соответствующие значения ***y*** (на чертеже за единицу длины мы приняли сантиметр); полученные точки обведем кривою. Кривая эта называется параболой.



Рассмотрим некоторые ее свойства.

а) Парабола есть кривая непрерывная, так как при не прерывном изменении абсциссы ***x*** (как в положительном направлении, так и в отрицательном) ордината, как мы видели сейчас, изменяется тоже непрерывно.

б) Вся кривая расположена по одну сторону от оси ***x***-ов, именно по ту сторону, по какую лежат положительные значения ординат.

в) Парабола подразделяется осью ***y***-ов на две части (ветви). Точка ***O***, в которой эти ветви сходятся, называется вершиною параболы. Эта точка есть единственная общая у параболы и оси *x*-ов; значит, в этой точке парабола касается оси *x*-ов.

г) Обе ветви бесконечны, так как *x* и *y* могут увеличиваться беспредельно. Ветви поднимаются от оси *x*-ов неограниченно вверх, удаляясь в то же время неограниченно от оси *y*-ов вправо и влево.

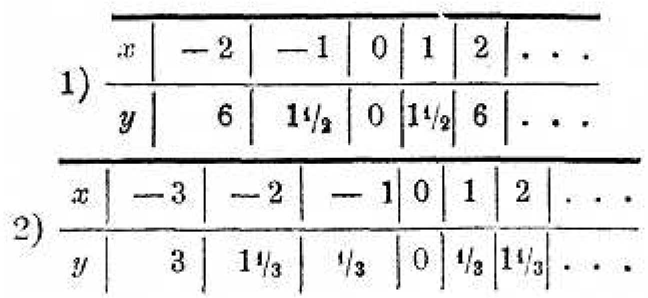
д) Ось *y*-ов служит для параболы осью симметрии, так что, перегнув чертеж по этой оси так, чтобы левая половина чертежа упала на правую, мы увидим, что обе ветви совместятся; напр, точка с абсциссой — 2 и с ординатой 4 совместится с точкой, имеющей абоциссу +2 и ту же ординату 4.

е) При $x = 0$ ордината тоже равна 0. Значит, при $x = 0$ функция имеет наименьшее значение из всех возможных. Наибольшего значения функция не имеет, так как ординаты кривой увеличиваются беспредельно.

159. График функции вида $y = ax^2$. Предположим сначала, что *a* есть число положительное. Возьмем, напр., такие 2 функции:

$$1)\ y = 1\,{}^1/_2\,x^2; \qquad 2)\ y = {}^1/_3\,x^2$$

Составим таблицы значений этих функции, напр., такие:



1)

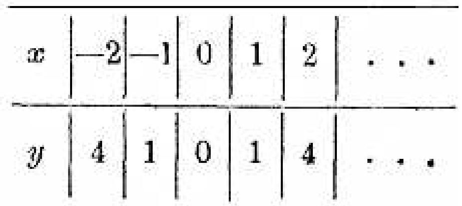
x	-2	-1	0	1	2	. . .
y	6	$1^1/_2$	0	$1^1/_2$	6	. . .

2)

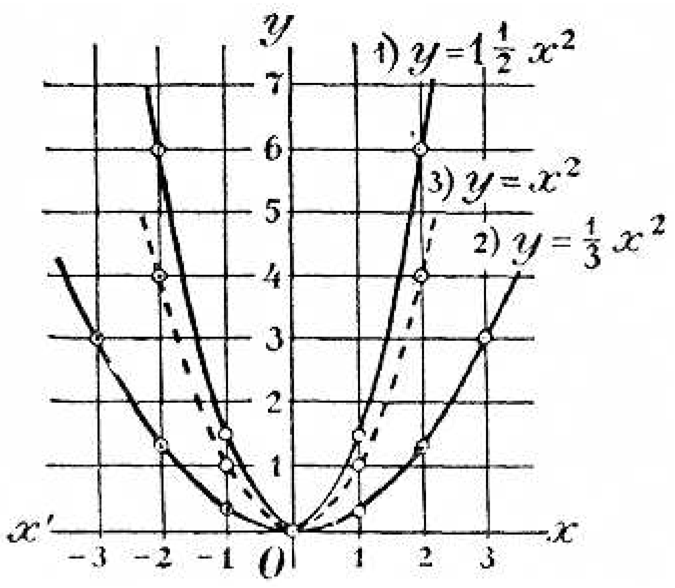
x	-3	-2	-1	0	1	2	. . .
y	3	$1^1/_3$	$^1/_3$	0	$^1/_3$	$1^1/_3$	. . .

Нанесем все эти значения на чертеж и проведем кривые. Для сравнения мы поместили на том же чертеже (прерывистой линией) еще график функции:

$$3)\ y = x^2$$

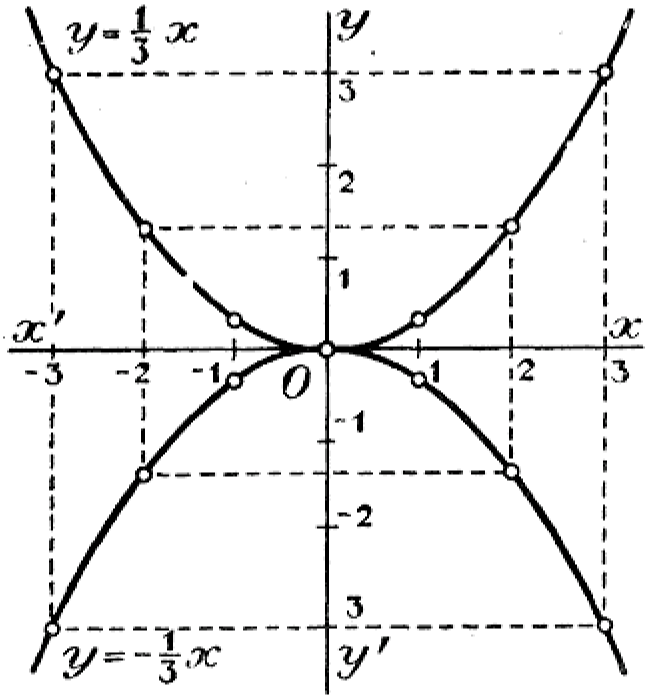


x	-2	-1	0	1	2	. . .
y	4	1	0	1	4	. . .



Из чертежа видно, что при одной и той же абсциссе ордината 1-й кривой в $1\,{}^{1}/_{2}$, раза больше, а ордината 2-й кривой в **3** раза меньше, чем ордината 3-й кривой. Вследствие этого все такие кривые имеют общий характер: бесконечные непрерывные ветви, ось симметрии и пр., только при $a > 1$ ветви кривой более приподняты вверх, а при $a < 1$ они более отогнуты книзу, чем у кривой $y= x^2$. Все такие кривые называются параболамми.

Предположим теперь, что коэффициент a будет число отрицательное. Пусть, напр., $y = -\,{}^{1}/_{3}\,x^{2}$. Сравнивая эту функцию с такой: $y = +\,{}^{1}/_{3}\,x^{2}$ замечаем, что при одном и том же значении x обе функции имеют одну и ту же абсолютную величину, но противоположны по знаку. Поэтому на чертеже для функции $y = -\,{}^{1}/_{3}\,x^{2}$ получится такая же парабола, как и для функции $y = {}^{1}/_{3}\,x^{2}$ только расположенная под осью x-ов симметрично с параболой $y = {}^{1}/_{3}\,x^{2}$. В этом случае все значения функции отрицательны, кроме одного, равного нулю при $x = 0$; это последнее значение является наибольшим из всех.



Замечание. Если зависимость между двумя переменными величинами ***y*** и ***x*** выражается равенством: $y = ax^2$, где ***а*** какое-нибудь постоянное число, то можно сказать, что величина ***y*** пропорциональна квадрату величины ***x***, так как с увеличением или уменьшением ***x*** в 2 раза, в 3 раза и т. д. величина ***y*** увеличивается или уменьшается в 4 раза, в 9 раз, в 16 раз и т. д. Напр, площадь круга равна πR^2, где **R** есть радиус круга и π постоянное число (равное приблизительно 3,14); поэтому можно сказать, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса..

Глава четвертая.

Возвышение в куб и в другие степени одночленных алгебраических выражений.

160. Правило знаков при возвышении в степень. Из правила умножения относительных чисел следует, что

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125;$$

$$(-{}^1/_2)^4 = (-{}^1/_2)(-{}^1/_2)(-{}^1/_2)(-{}^1/_2) = +{}^1/_{16};$$

$$(-1)^5 = (-1)(-1)(-l)(-1)(-1) = -l;$$

$$(-1)^6 = (-1)(-1)(-l)(-1)(-1)(-1) = +l; \text{ и т. п.}$$

Значит, ***от возвышения отрицательного числа в степень с четным показателем получается положительное число, а от возвышения его в степень с нечетным показателем получается отрицательное число.***

161. Возвышение в степень произведения, степени и дроби. При возвышении произведения степени и дроби в какую-нибудь степень мы можем поступать так же, как и при возвышении в квадрат (§ 154). Так:

$$(abc)^3 = (abc)(abc)(abc) = abc \cdot abc \cdot abc = (aaa)(bbb)(ccc) = a^3b^3c^3;$$

Глава пятая.

Графическое изображение функций: $y = x^3$ и $y = ax^3$.

162. График функции $y = x^3$. Рассмотрим, как при изменении возвышаемого числа изменяется куб его (напр., как при изменении ребра куба изменяется его объем). Для этого предварительно укажем следующие особенности функции $y = x^3$ (напоминающие свойства функции $y = x^2$, рассмотренные нами раньше, § 158):

а) При всяком значении x функция $y = x^3$ возможна и имеет единственное значение; так, $(+ 5)^3 = +125$ и никакому другому числу куб числа + 5 равняться не может. Подобно этому $(— 0,1)^3 = — 0,001$ и никакому другому числу куб числа —0,1 равняться не может.

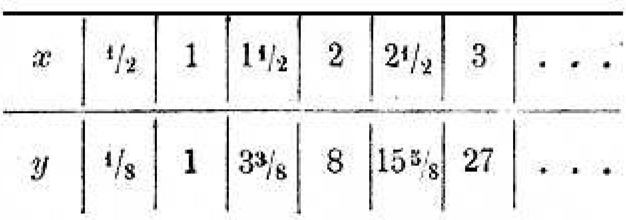
б) При двух значениях x, отличающихся только знаками, функция x^3 получает значения, также отличающиеся друг от друга только знаками; так, при x = **2** функция x^3 равна **8,** а при x = — **2** она равна **—8**.

в) При возрастании x функция x^3 возрастает и притом быстрее, чем x, и даже быстрее, чем x^2 ; так при

x = **— 2, —1, 0, +1, + 2, +3, + 4**... x^3 будет = **—8, — 1, 0, +1, + 8, +27, + 64**...

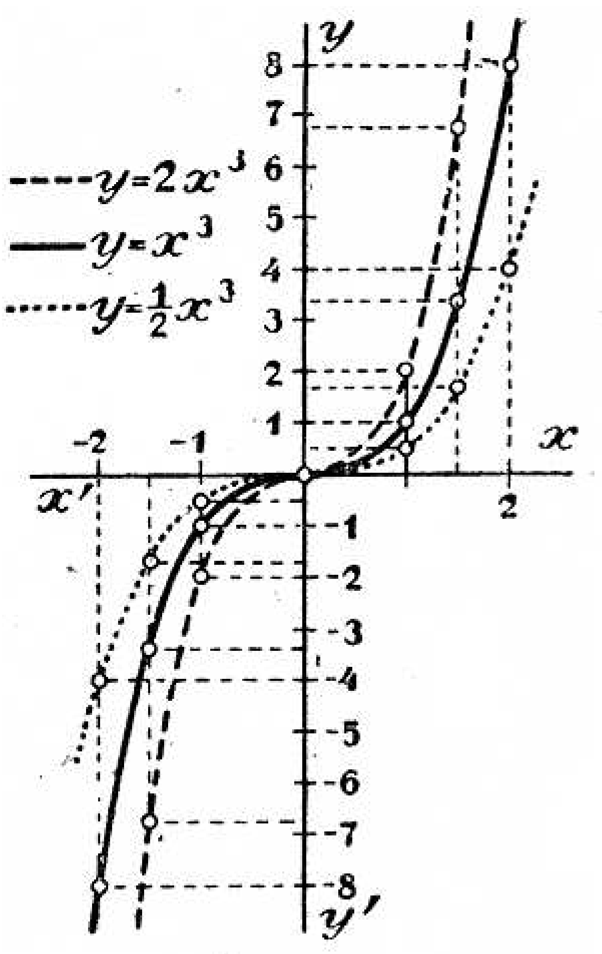
г) Очень малому приращению переменного числа x соответствует и очень малое приращение функции x^3. Так, если значение x = **2** увеличим на дробь **0,01**, т. е. если вместо x = **2** возьмем x = **2,01**, то функция y будет не 2^3 (т. е. не **8**), а $2{,}01^3$, что составит **8,120601**. Значит, функция эта увеличится тогда на **0,120601**. Если значение x = **2** увеличим еще меньше, напр, на **0,001**, то x^3 сделается равным $2{,}001^3$, что составит **8,012006001**, и, значит, y увеличится только на **0,012006001**. Мы видим, таким образом, что если приращение переменного числа x будет все меньше и меньше, то и приращение x^3 будет все меньше и меньше.

Заметив это свойство функции $y = x^3$, начертим ее график. Для этого предварительно составим таблицу значений этой функции, напр., такую:



x	$^1/_2$	1	$1^1/_2$	2	$2^1/_2$	3	. . .
y	$^1/_8$	1	$3^3/_8$	8	$15^5/_8$	27	. . .

Для отрицательных значений x получатся для y те же часла, которые указаны в этой таблице, только со знаком —. Построим теперь точки, соответствующие взятым значениям x и y . Вследствие того, что ординаты y растут значительно быстрее абсцисс, удобнее на чертеже взять для ординат единицу длины меньшую, чем для абсцисс. Напр, для ординат взять $^1/_2$ см, а для абсцисс 1 см (как у нас на чертеже). Тогда, конечно, кривая окажется сжатою в вертикальном направлении. На построенном графике все свойства функции $y = x^3$, которые мы сейчас указали, представляются вполне наглядными.



163. График функции $y = ax^3$. Возьмем такие две функции:

$$1)\ y = {}^1/_2\, x^3; \qquad 2)\ y = 2\, x^3$$

Если сравним эти функции с более простой: $y = x^3$, то заметим, что при одном и том же значении x первая функция получает значения вдвое меньшие, а вторая вдвое большие, чем функция $y = ax^3$, во всем остальном эти три функции сходны между собой. Графики их изображены для сравнения на одном и том же чертеже. Кривые эти называются параболами 3-й степени.

Глава шестая.

Основные свойства извлечения корня.

164. Задачи.

а) Найти сторону квадрата, которого площадь равнялась бы площади прямоугольника с основанием 16 см и с высотою 4 см.

Обозначив сторону искомого квадрата буквою x (см), получим такое уравнение:

$$x^2 = 16 \cdot 4, \quad \text{т. е.} \quad x^2 = 64.$$

Мы видим таким образом, что x есть такое число, которое, будучи возвышено во вторую степень, дает в результате 64. Такое число называется корнем второй степени из 64. Оно равно + 8 или — 8, так как $(+ 8)^2 = 64$ и $(— 8)^2 = 64$. Отрицательное число — 8 для нашей задачи не годится, так как сторона квадрата должна выразиться обыкновенным арифметическим числом.

б) Свинцовый кусок, весящий 1 кг 375 г (1375 г), имеет форму куба. Как велико ребро этого куба, если известно, что 1 куб. см свинца весит 11 граммов?

Пусть длина ребра куба будет x см. Тогда его объем будет равен x^3 куб. см, а вес его окажется 11 x^3 г.

Значит:

$$11x^3 = 1375; \quad x^3 = 1375 : 11 = 125.$$

Мы видим таким образом, что x есть такое число, которое, будучи возвышено в третью степень, составляет **125**. Такое число называется корнем третьей степени из 125. Оно, как нетрудно догадаться, равно 5, так как $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Значит, ребро куба, о котором говорится в задаче, имеет длину в 5 см.

165. Определение корня. Корнем второй степени (или квадратным) из числа a называется такое число, которого квадрат равняется a. Так, квадратный корень из 49 есть 7, а также и — 7, так как $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$. Корнем третьей степени (кубичным) из числа a называется такое число, которого куб равняется a. Так, кубичный корень из —125 есть — 5, так как $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.

Вообще корнем n-ой степени из числа a называется такое число, которого n -ая степень равна a.

Число n, означающее, какой степени находится корень, называется показателем корня.

Корень обозначается знаком $\sqrt{\ }$ (знак радикала, т. е. знак корня). Латинское слово *radix* означает корень. Знак $\sqrt{\ }$ впервые введен в XV столетии.. Под горизонтальной чертой его пишут то число, из которого корень отыскивается (подкоренное число), а над отверстием угла ставят показатель корня. Так:

корень кубичный из 27 обозначается..... $\sqrt[3]{27}$;

корень четвертой степени из 32 обозначается ... $\sqrt[3]{32}$.

Показатель квадратного корня принято не писать вовсе, напр.

вместо $\sqrt[2]{16}$ пишут $\sqrt{16}$.

Действие, посредством которого отыскивается корень, называется извлечением корня; оно обратно возвышению в степень, так как посредством этого действия отыскивается то, что дано при возвышении в степень, именно основание стенени, а дано то, что при возвышении в степень отыскивается, именно сама степень. Поэтому правильность извлечения корня мы можем всегда поверять возвышением в степень. Напр., чтобы проверить

равенство: $\sqrt[3]{125} = 5$, достаточно 5 возвысить в куб: получив подкоренное число 125, мы заключаем, что корень кубичный из 125 извлечен правильно.

166. Арифметический корень. Корень называется арифметическим, если он извлекается из положительного числа и сам представляет собою положительное число. Напр., арифметический квадратный корень из 49 есть 7, тогда как число — 7, которое тоже есть квадратный корень из 49, нельзя назвать арифметическим.

Укажем следующие два свойства арифметического корня.

а) Пусть требуется найти арифметический $\sqrt{49}$. Такой корень будет 7, так как $7^2 = 49$. Зададимся вопросом, нельзя ли подыскать какое-нибудь другое положительное число ***x***, которое тоже было бы $\sqrt{49}$. Предположим, что такое число существует. Тогда оно должно быть либо меньше 7, либо больше 7. Если допустим, что $x < 7$, то тогда и $x^2 < 49$ (с уменьшением множимого и множителя произведение уменьшается); если же допустим, что $x > 7$, то тогда и $x^2 > 49$. Значит, никакое положительное число, ни меньшее 7, ни большее 7, не может равняться $\sqrt{49}$. Таким образом арифметический корень данной степени из данного числа может быть только один.

К другому заключению мы пришли бы, если бы говорили не о положительном значении корня, а о каком-нибудь; так, $\sqrt{49}$ равен и числу 7, и числу — 7, так как и $7^2 = 49$ и $(— 7)^2 = 49$.

б) Возьмем какие-нибудь два неравные положительные числа, напр. 49 и 56. Из того, что 49 < 56, мы можем заключить, что и $\sqrt{49} < \sqrt{56}$ (если только знаком $\sqrt{\ }$ будем обозначать арифметический квадратный корень). Действительно: 7 < 8. Подобно этому из того, что 64 < l25, мы можем заключить, что и $\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{125}$

Действительно: $\sqrt[3]{64} = 4$ и $\sqrt[3]{125} = 5$ и 4 < 5. Вообще ***меньшему положительному числу соответствует и меньший арифметическии корень*** (той же степени).

167. Алгебраический корень. Корень называется алгебраическим, если не требуется, чтобы он извлекался из положительного числа и чтобы сам был положительный. Таким образом, если под выражением $\sqrt[n]{a}$ разумеется алгебраический корень ***n*** -й степени, то это значит, что число ***a*** может быть и положительное и отрицательное, и самый корень может быть и положительным и отрицательным.

Укажем следующие 4 свойства алгебраического корня.

а) ***Корень нечетном степеци из положительного числа есть положительное число***.

Так, $\sqrt[3]{8}$ должен быть числом положительным (он равен 2), так как отрицательное число, возвышенное в степень с нечетным показателем, дает отрицательное число.

б) ***Корень нечетной степени из отрицательною числа есть отрицательное число.***

Так, $\sqrt[3]{—8}$ должен быть отрицательным числом (он равен —2), так как положительное число, возвышенное в какую бы то ни было степень, дает положительное число, а не отрицательное.

в) ***Корень четной степени из положительного числа имеет два значения с противоположными знаками и с одинаковой абсолютной величиной.***

Так, $\sqrt{+4} = +2$ и $\sqrt{+4} = —2$, потому что $(+2)^2 = +4$ и $(—2)^2 = +4$; точно так же

$\sqrt[4]{+81} = +3$ и $\sqrt[4]{+81} = -3$, потомуу что обе степени $(+3)^4$ и $(-3)^4$ равны одному и тому же числу. Двойное значение корня обозначается обыкновенно постановкою двух знаков перед абсолютной величиной корня; так пишут:

$$\sqrt{4} = \pm 2; \qquad \sqrt{a^2} = \pm a;$$

г) ***Корень четной степени из отрицательного числа не может равняться никакому ни положительному, ни отрицательному числу***, так как и то и другое после возвышения в степень с четным показателем дает положительное число, а не отрицательное. Напр., $\sqrt{-9}$ не равен ни +3, ни —3 и никакому иному числу.

Корень четной степени из отрицательного числа принято называть мнимым числом; относительные же числа называются вещественными, или действительными, числами.

168. Извлечение корня из произведения, из степени и из дроби.

а) Пусть надо извлечь квадратный корень из произведения abc. Если бы требовалось произведение возвысить в квадрат, то, как мы видели (§ 154), можно возвысить в квадрат каждый сомножитель отдельно. Так как извлечение корня есть действие, обратное возвышению в степень, то надо ожидать, что и для извлечения корня из произведения можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно, т. е. что

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{b} \bullet \sqrt{c}\,.$$

Чтобы убедиться в верности этого равенства, возвысим правую часть его в квадрат (по теореме: чтобы возвысить в степень произведение...):

$$(\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2$$

Но, согласно определению корня,

$$(\sqrt{a})^2 = a,\ (\sqrt{b})^2 = b,\ (\sqrt{c})^2 = c$$

Следовательно

$$(\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c})^2 = abc.$$

Если же квадрат произведения $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c}$ равен abc, то это значит, что произведение это равно квадратному корню из abc.

Подобно этому:

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{c}\,,$$

так как

$$(\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{c})^3 = (\sqrt[3]{a})^3\ (\sqrt[3]{b})^3\ (\sqrt[3]{c})^3 = abc$$

Значит, ***чтобы извлечь корень из произведения, достаточно извлечь его из каждого сомножители отдельно.***

б) Легко убедиться поверкою, что следующие равенства верны:

$\sqrt{a^4} = a^2$, потому что $(a^2)^2 = a^4$;

$\sqrt[3]{x^{12}} = x^4$, „ „ $(x^4)^3 = x^{12}$; и т. п.

Значит, ***чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, можно разделить показатель степени на показатель корня.***

в) Верны будут также и следующие равенства:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}, \text{ потому что } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}, \quad „ \quad „ \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Значит, ***чтобы извлечь корень из дроби, можно изелень сю из числителя и знаменателя отоельно.***

Заметим, что в этих истинах предполагается, что речь идет о корнях арифметических.

Примеры.

1) $\sqrt{9a^4b^6} = \sqrt{9}\ \sqrt{a^4}\ \sqrt{b^6} = 3a^2b^3$;

2) $\sqrt[3]{125a^6x^9} = \sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{a^6}\ \sqrt[3]{x^9} = 5a^2x^3$

Замечание Если искомый корень четной степени и предполагается алгебраический, то перед найденным результатом надо поставить двойной знак ± Так,

$$\sqrt{9x^4} = \pm 3x^2.$$

169. Простейшие преобразования радикалов,

а) Вынесение множителей за знак радикала. Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых из них можно извлечь корень, то такие множители, по извлечении из них корня, могут быть написаны перед знаком радикала (могут быть вынесены за знак радикала).

Примеры.

1) $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2a} = \sqrt{a^2}\ \sqrt{a} = a\sqrt{a}$.

2) $\sqrt{24a^4x^3} = \sqrt{4 \cdot 6a^4x^2x} = 2a^2x\sqrt{6x}$

3) $\sqrt[3]{16x^4} = \sqrt[3]{8 \cdot 2x^3x} = 2x\sqrt[3]{2x}$

б) Подведение множителей под знак радикала. Иногда бывает полезно, наоборот, подвести под знак радикала множители, стоящие перед ним; для этого достаточно возвысить такие множители в степень, показатель которой равен показателю радикала, а затем написать множителями под знаком радикала.

Примеры.

1) $a^2\sqrt{a} = \sqrt{(a^2)^2 a} = \sqrt{a^4 a} = \sqrt{a^5}$.

2) $2x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(2x)^3 x} = \sqrt[3]{8x^3 x} = \sqrt[3]{8x^4}$.

в) Освобождение подкоренного выражения от знаменателей. Покажем это на следующих примерах:

1) $\sqrt{\frac{3x}{5}}$. Преобразуем дробь так, чтобы из знаменателя можно было извлечь квадратный корень. Для этого умножим оба члена дроби на 5:

$$\sqrt{\frac{3x}{5}} = \sqrt{\frac{3x\cdot 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{15x}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{15x}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15x}.$$

2) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$ Умножим оба члена дроби на **2**, на ***a*** и на ***x***, т. е. на **2*ax***:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2ax}{4a^2x^4}} = \frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}} = \frac{\sqrt{6ax}}{2ax^2} = \frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}.$$

Замечание. Если требуется извлечь корень из алгебраической суммы, то было бы ошибочно извлечь его из каждого слагаемого отдельно. Напр. $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, тогда как
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$; значит, действие извлечения корня по отношению к сложению (и вычитанию) *не обладает распределительным свойством* (как и возвышение в степень, отдел 2 глава 3 § 61, замечание).

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ЧИСЕЛ.

Глава первая. **Извлечение из данного целого числа наибольшего целого квадратного корня.**
Глава вторая. **Извлечение приближенных квадратных корней из целых и дробных чисел**
Глава третья. **График функции $x = \sqrt{y}$.**

Глава первая.

Извлечение из данного целого числа наибольшего целого квадратного корня.

170. Предварительные замечания.

а) Так как мы будем говорить об извлечении только квадратного корня, то для сокращения речи в этой главе мы вместо „квадратный" корень будем говорить просто „корень".

б) Если возвысим в квадрат числа натурального ряда: 1,2,3,4,5 . . . , то получим такую таблицу квадратов: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,121,144. .,

Очевидно, имеется очень много целых чисел, которые в этой таблице не находятся; из таких чисел, конечно, нельзя извлечь целый корень. Поэтому, если требуется извлечь корень из какого-нибудь целого числа, напр. требуется найти $\sqrt{4082}$, то мы условимся это требование понимать так: извлечь целый корень из 4082, если это возможно; если же нельзя, то мы должны найти наибольшее целое число, квадрат которого заключается в 4082 (такое число есть 63, так как 63^2 = 39б9, а 64^2 = 4090).

в) Если данное число меньше 100, то корень из него находится по таблице умножения; так, $\sqrt{60}$ будет 7, так как семью 7 равно 49, что меньше 60, а восемью 8 составляет 64, что больше 60.

171. Извлечение корня из числа, меньшего 10000, но большего 100. Пусть надо найти $\sqrt{4082}$. Так как это число меньше 10 000, то корень из него меньше $\sqrt{l0\ 000} = 100$. С другой стороны, данное число больше 100; значит, корень из него больше (или равен 10) . (Если бы, напр., требовалось найти $\sqrt{120}$, то хотя число 120 > 100, однако $\sqrt{120}$ равен 10, т.к. $11^2 = 121$.) Но всякое число, которое больше 10, но меньше 100, имеет 2 цифры; значит, искомый корень есть сумма:

десятки + единицы,

и поэтому квадрат его должен равняться сумме:

$$(\text{дес.})^2 + 2 \bullet(\text{дес.}) \bullet (\text{ед.}) + (\text{ед.})^2.$$

Сумма эта должна быть наибольшим квадратом, заключающимся в 4082.

$$\begin{array}{l}\sqrt{40'82}=6\\ \underline{36}\\ \;\;48'2\end{array}$$

Так как (десятки)^2 составляют сотни, то квадрат десятков надо искать в сотнях данного числа. Сотен в данном числе 40 (мы находим их число, отделив запятой две цифры справа). Но в 40 заключается несколько целых квадратов: 36,25,16,.. и др.

Возьмем из них наибольший, 36, и допустим,что квадрат десятков корня будет равен именно этому наибольшему квадрату. Тогда число десятков в корне должно быть 6. Проверим теперь, что это всегда должно быть так, т. е. всегда число десятков корня равно наибольшему целому корню из числа сотен подкоренного числа.

Действительно, в нашем примере число десятков корня не может быть больше 6, так как (7 дес.)^2 = 49 сотен, что превосходит 4082. Но оно не может быть и меньше 6, так как 5 дес. (с единицами) меньше 6 дес, а между тем (6 дес.)^2 = 36 сотен, что меньше 4082.
А так как мы ищем наибольший целый корень, то мы не должны брать для корня 5 дес, когда и 6 десятков оказывается не много.

Итак, мы нашли число десятков корня, именно 6. Пишем эту цифру направо от знака =, запомнив, что она означает десятки корня. Возвысив ее в квадрат, получим 36 сотен. Вычитаем эти 36 сотен из 40 сотен подкоренного числа и сносим две остальные цифры данного числа. В остатке 482 должны содержаться 2 • (6 дес.) • (ед.) + (ед.)2. Произведение (6 дес.) • (ед.) должно составлять десятки; поэтому удвоенное произведение десятков на единицы надо искать в десятках остатка, т. е. в 48 (мы получим число их, отделив в остатке 48'2 одну цифру справа). Удвоенные десятки корня составляют 12. Значит, если 12 умножим на единицы корня (которые пока неизвестны), то мы должны получить число, содержащееся в 48. Поэтому мы разделим 48 на 12.

Для этого налево от остатка проводим вертикальную черту и за нею (отступив от черты на одно место влево для цели, которая сейчас обнаружится) напишем удвоенную первую цифру корня, т. е. 12, и на нее разделим 48. В частном получим 4.

Однако, заранее нельзя ручаться, что цифру 4 можно принять за единицы корня, так как мы сейчас разделили на 12 все число десятков остатка, тогда как некоторая часть из них может и не принадлежать удвоенному произведению десятков на единицы, а входит в состав квадрата единиц. Поэтому цифра 4 может оказаться велика. Надо ее испытать. Она, очевидно, годится в том случае, если сумма 2 • (6 дес.) • 4 + 4^2 окажется не больше остатка 482.

Сумму это мы можем вычислить сразу таким простым приемом: за вертикальной чертой к удвоенной цифре корня (к 12) приписываем справа цифру 4 (поэтому-то мы и отступили от черты на одно место) и на нее же умножим полученное число (124 на 4).Действительно, производя это умножение, мы умножаем 4 на 4, значит, находим квадрат единиц корня; затем мы умножаем 12 десятков на 4, значит находим удвоенное произведение десятков корня на единицы.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{40'82}=6} \\ & 36 \\ \hline 124 & 48'2 \\ 4 & 49\,6 \end{array}$$

В результате получаем сразу сумму того и другого. Полученное произведение оказалось 496, что больше остатка 482; значит, цифра 4 велика. Тогда испытаем таким же образом следующую меньшую цифру 3.

Для этого сотрем цифру 4 и произведение 496 и вместо цифры 4 поставим 3 и умножим 123 на 3. Произведение 369 оказалось меньше остатка 492; значит, цифра 3 годится (если бы случилось, что и эта цифра велика, тогда надо было бы испытать следующую меньшую цифру 2). Пишем цифру 3 в корне направо от цифры десятков.Последний остаток 113 показывает избыток данного числа над наибольшим целым квадратом, заключающимся в нем.

$$\sqrt{40'82}=63$$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 123 & 48'2 \\ 3 & 36\,9 \\ \hline & 11\,3 \end{array}$$

Для поверки мы возвысили в квадрат 63 и к результату приложили 113; так как в сумме получилось данное число 4082, то действие сделано верно.

$$\begin{array}{rr} 63^2= & 36 \\ & 36 \\ & 9 \\ \hline & 3969 \\ + & 113 \\ \hline & 4082 \end{array}$$

Примеры.

1) $\sqrt{12'25}=35$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 65 & 32'5 \\ 5 & 32\,5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

2) $\sqrt{86'55}=93$

$$\begin{array}{r|l} & 81 \\ \hline 183 & 55'5 \\ 3 & 54\,9 \\ \hline & 6 \end{array}$$

3) $\sqrt{16'05}=40$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ \hline 8 & 0'5 \end{array}$$

4) $\sqrt{8'72}=29$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 49 & 47'2 \\ 9 & 44\,1 \\ \hline & 3\,1 \end{array}$$

5) $\sqrt{64'00}=80$

$$\begin{array}{l} 64 \\ \hline 00 \end{array}$$

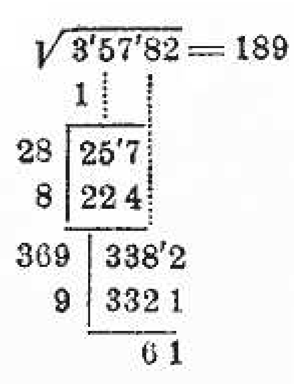
В примере 4-м при делении 47 десятков остатка на 4, мы получаем в частном 11. Но так как цифра единиц корня не может быть двузначным числом 11 или 10, то надо прямо испытать цифру 9.

В примере 5-м после вычитания из первой грани квадрата 8 остаток оказывается 0, и следующая грань тоже состоит из нулей. Это показывает, что искомый корень состоит только из 8 десятков, и потому на место единиц надо поставить нуль.

172. Извлечение корня из числа, большего 10000. Пусть требуется найти $\sqrt{35782}$. Так как подкоренное число превосходит 10 000, то корень из него больше $\sqrt{10000}$ = 100 и, следовательно, он состоит из 3 цифр или более. Из скольких бы цифр он ни состоял, мы можем его всегда рассматривать как сумму только десятков и единиц. Если, напр., корень оказался бы 482, то мы можем его считать за сумму 48 дес. + 2 ед. Тогда квадрат корня будет состоять из 3 слагаемых:

$$(\text{дес.})^2 + 2 \bullet (\text{дес.})\ (\text{ед.}) + (\text{ед.})^2.$$

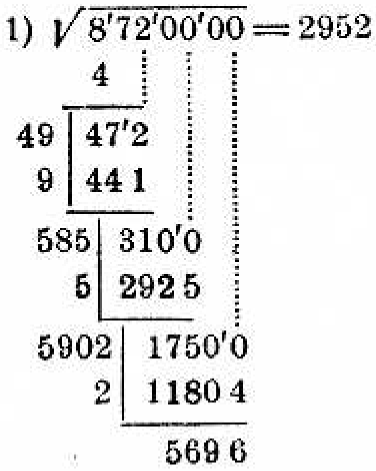
Теперь мы можем рассуждать совершенно так же, как и при нахождении $\sqrt{4082}$ (в предыдущем параграфе). Разница будет только та, что для нахождения десятков корня из 4082 мы должны были извлечь корень из 40, и это можно было сделать по таблице умножения; теперь же для получения десятков $\sqrt{35782}$ нам придется извлечь корень из 357, что по таблице умножения нельзя выполнить. Но мы можем найти $\sqrt{357}$ тем приемом, который был описан в предыдущем параграфе, так как число 357 < 10 000. Наибольший целый корень из 357 оказывается 18. Значит, в $\sqrt{3'57'82}$ должно быть 18 десятков. Чтобы найти единицы, надо из 3'57'82 вычесть квадрат 18 десятков, для чего достаточно вычесть квадрат 18 из 357 сотен и к остатку снести 2 последние цифры подкоренного числа. Остаток от вычитания квадрата 18 из 357 у нас уже есть: это 33. Значит, для получения остатка от вычитания квадрата 18 дес. из 3'57'82, достаточно к 33 приписать справа цифры 82.

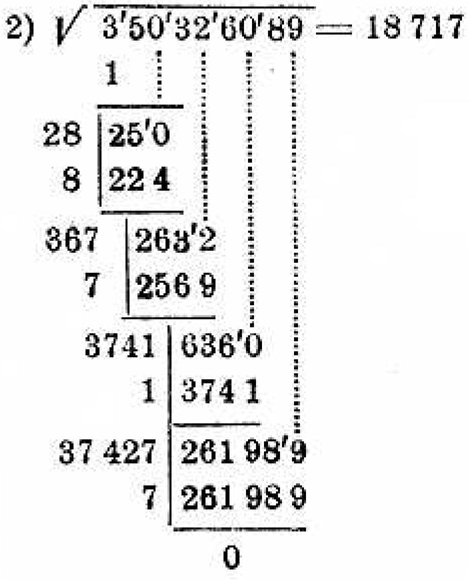


Далее поступаем так, как мы поступали при нахождении $\sqrt{4082}$, а именно: налево от остатка 3382 проводим вертикальную черту и за нею пишем (отступив от черты на одно место) удвоенное число найденных десятков корня, т. е. 36 (дважды 18). В остатке отделяем одну цифру справа и делим число десятков остатка, т. е. 338, на 36. В частном получаем 9. Эту цифру испытываем, для чего ее приписываем к 36 справа и на нее же умножаем. Произведение оказалось 3321, что меньше остатка. Значит, цифра 9 годится, пишем ее в корне.

Вообще, чтобы извлечь квадратный корень из какого угодно целого числа, надо сначала извлечь корень из числа его сотен; если это число более 100, то придется искать корень из числа сотен этих сотен, т. е. из десятков тысяч данного числа; если и это число более 100, придется извлекать корень из числа сотен десятков тысяч, т. е. из миллионов данного числа, и т. д.

Примеры.





$$3)\ \sqrt{9'51'10'56} = 3084$$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 608 & 511'0 \\ 8 & 486\,4 \\ \hline 6164 & 2465'6 \\ 4 & 2465\,6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

В последнем примере, найдя первую цифру и вычтя квадрат ее, получаем в остатке 0. Сносим следующие 2 цифры 51. Отделив десятки, мы получаем 5 дес, тогда как удвоенная найденная цифра корня есть 6. Значит, от деления 5 на 6 мы получаем 0. Ставим в корне 0 на втором месте и к остатку сносим следующие 2 цифры; получаем 5110. Далее продолжаем как обыкновенно.

$$4)\ \sqrt{81'00'00} = 900$$

$$\begin{array}{c} 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

В этом примере искомый корень состоит только из 9 сотен, и потому на месте десятков и на месте единиц надо поставить нули.

Правило. ***Чтобы, извлечь квадратный корень из данною целого числа, разбивают его, от правой руки к левой, на грани, по 2 цифры в каждой, кроме последней, в которой может быть и одна цифра.***

Чтобы найти первую цифру корня, извлекают квадратный корень из первой грани.

Чтобы найти вторую цифру, из первой грани вычитают квадрат первой цифры корня, к остатку сносят вторую грань и число десятков получившегося числа делят на удвоенную первую цифру корня; полученное целое число подвергают испытанию.

Испытание это производится так: за вертикальной чертой (налево от остатка) пишут удвоенное ранее найденное число корня и к нему, с правой стороны, приписывают испытуемую цифру, получившееся, после этой приписки число умножают на испытуемую цифру. Если после умножения получится число, большее остатка, то испытуемая цифра не годится и надо испытать следующую меньшую цифру.

Следующие, цифры корня находятся по тому же приему.

Если после снесения грани число десятков получившегося числа окажется меньше делителя, т. е. меньше удвоенной найденной части корня, то в корне ставят 0, сносят следующую грань и продолжают действие дальше.

173. Число цифр корня. Из рассмотрения процесса нахождения корня следует, что в корне столько цифр, сколько в подкоренном числе заключается граней по 2 цифры каждая (в левой грани может быть и одна цифра).

Глава вторая.

Извлечение приближенных квадратных корней из целых и дробных чисел.

Извлечение квадратного корня из многочленов см. в дополнениях ко 2-й части § 399 и след.

174. Признаки точного квадратного корня. Точным квадратным корнем из данного числа называется такое число, квадрат которого в точности равняется данному числу. Укажем некоторые признаки, по которым можно судить, извлекается ли из данного числа точный корень, или нет:

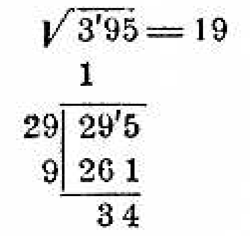
а) Если из данного целого числа не извлекается точный целый корень (получается при извлечении остаток), то из такого числа нельзя найти и дробный точный корень, так как всякая дробь, не равная целому числу, будучи умножена сама на себя, дает в произведении тоже дробь, а не целое число.

б) Так как корень из дроби равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя, то точный корень из несократимой дроби не может быть найден в том случае, если его нельзя извлечь из числителя или из знаменателя. Напр, из дробей $^{4}/_{5}$, $^{8}/_{9}$ и $^{11}/_{15}$ нельзя извлечь точный корень, так как в первой дроби нельзя его извлечь из знаменателя, во второй — из числителя и в третьей — ни из числителя, ни из знаменателя.

Из таких чисел, из которых нельзя извлечь точный корень, можно извлекать лишь приближенные корни.

175. Приближенный корень с точностью до 1. Приближенным квадратным корнем с точностью до 1 из данного числа (целого или дробного — все равно) называется такое целое число, которое удовлетворяет следующим двум требованиям:

1) квадрат этого числа не больше данного числа; 2) но квадрат этого числа увеличенного на 1, больше данного числа. Другими словами, приближенным квадратным корнем с точностью до 1 называется наибольший целый квадратный корень из данного числа, т. е.тот корень, который мы научились находить в предыдущей главе. Корень этот называется приближенным с точностью до 1, потому что для получения точного корня к этому приближенному корню надо было бы добавить еще некоторую дробь, меньшую 1, так что если вместо неизвестного точного корня мы возьмем этот приближенный, то сделаем ошибку, меньшую 1.


$\sqrt{3'95} = 19$
1
29 | 29'5
9 | 26 1
34

Положим, требуется найти приближенный квадратный корень с точностью до 1 из 395,74. Тогда, не обращая внимания на дробь, извлечем корень только из целого числа. Полученный корень 19 будет искомый, так как

$$19^2 < 395,74, \quad \text{а} \quad 20^2 > 395,74.$$

Правило. ***Чтобы извлечь приближенный квадратный корень с точностью до 1, надо извлечь наибольший целый корень из целой части данного числа.***

Найденное по этому правилу число есть приближенный корень с недостатком, так как в нем недостает до точного корня некоторой дроби (меньшей 1). Если этот корень увеличим на 1, то получим другое число, в котором есть некоторый избыток над точным корнем, и избыток этот меньше 1. Этот увеличенный на 1 корень можно назвать тоже приближенным корнем с точностью до 1, но с избытком. (Названия: „с недостатком" или „с избытком" в некоторых математических книгах заменены другими равносильными: „по недостатку" или „по избытку".)

176. Приближенный корень с точностью до $^{1}/_{10}$. Пусть требуется найти $\sqrt{2,35104}$ с точностью до $^{1}/_{10}$. Это значит, что требуется найти такую десятичную дробь, которая состояла бы из целых единиц и десятых долей и которая удовлетворяла бы двум следующим требованиям:

1) квадрат этой дроби не превосходит 2,35104, но 2) если увеличим ее на $^1/_{10}$, то квадрат этой увеличенной дроби превосходит 2,35104.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{2{,}35'\boxed{104}} = 1{,}5} \\ & 1 \\ \hline 25 & 13'5 \\ 5 & 12\,5 \\ \hline & 1\,0 \end{array}$$

Чтобы найти такую дробь, мы сначала найдем приближенный корень с точностью до 1, т. е. извлечем корень только из целого числа 2. Получим 1 (и в остатке 1). Пишем в корне цифру1 и ставим после нее запятую. Теперь будем искать цифру десятых. Для этого сносим к остатку 1 цифры 35, стоящие направо от запятой, и продолжаем извлечениетак, как будто мы извлекали корень из целого числа 235. Полученную цифру 5 пишем в корне на месте десятых. Остальные цифры подкоренного числа (104) нам не нужны. Что полученное число 1,5 будет действительно приближенный корень с точностью до $^1/_{10}$ видно из следующего. Если бы мы находили наибольший целый корень из 235 с точностью до 1, то получили бы 15. Значит:

$$15^2 \leq 235, \text{ но } 16^2 > 235.$$

Разделив все эти числа на 100, получим:

$$\frac{15^2}{100} \leqslant 2{,}35; \qquad \frac{16^2}{100} > 2{,}35;$$

т. е.

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leqslant 2{,}35; \qquad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2{,}35;$$

или

$$1{,}5^2 \leqslant 2{,}35; \qquad 1{,}6^2 > 2{,}35.$$

Значит, число 1,5 есть та десятичная дробь, которую мы назвали приближенным корнем с точностью до $^1/_{10}$.

Найдем еще этим приемом следующие приближенные корни с точностью до 0,1:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{57{,}40} = 7{,}5} \\ & 49 \\ \hline 145 & 84'0 \\ 5 & 72\,5 \\ \hline & 1\,15 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{0{,}30} = 0{,}5 \\ \underline{25} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{0{,}03'\boxed{8}} = 0{,}1 \\ \underline{1} \\ 2 \end{array}$$

177. Приближенный квадратный корень с точностью до $^1/_{100}$ до $^1/_{1000}$ и т. д.

Пусть требуется найти с точностью до $^1/_{100}$ приближенный $\sqrt{248}$. Это значит: найти такую десятичную дробь, которая состояла бы из целых, десятых и сотых долей и которая удовлетворяла бы двум требованиям:

1) квадрат ее не превосходит 248, но 2) если увеличим эту дробь на $^1/_{100}$ то квадрат этой увеличенной дроби превосходит 248.

$$\sqrt{2'48',00'00} = 15{,}74$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 25 & 14'8 \\ 5 & 12\,5 \\ \hline 307 & 23\,0'0 \\ 7 & 21\,4\,9 \\ \hline 3\,144 & 1\,510'0 \\ 4 & 1\,257\,6 \\ \hline & 252\,4 \end{array}$$

Такую дробь мы найдем в такой последовательности: сначала отыщем целое число, потом цифру десятых, затем и цифру сотых. Корень из целого числа будет 15 целых. Чтобы получить цифру десятых, надо как мы видели, снести к остатку 23 еще 2 цифры, стоящие направо от запятой. В нашем примере этих цифр нет вовсе, ставим на их место нули. Приписав их к остатку и продолжая действие так, как будто находим корень из целого числа 24 800, мы найдем цифру десятых 7. Остается найти цифру сотых. Для этого приписываем к остатку 151 еще 2 нуля и продолжаем извлечение, как будто мы находим корень из целого числа 2 480 000. Получаем 15,74. Что это число действительно есть приближенный корень из 248 с точностью до $^1/_{100}$ видно из следующего. Если бы мы находили наибольший целый квадратный корень из целого числа 2 480 000, то получили бы 1574; значит:

$$1574^2 \leq 2\,480\,000, \text{ но } 1575^2 > 2\,480\,000.$$

Разделив все числа на 10 000 (= 100^2), получим:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000; \qquad \frac{1575^2}{100^2} > 248{,}0000,$$

т.е.

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leqslant 248{,}0000; \qquad \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248{,}0000,$$

или

$$15{,}74^2 \leqslant 248; \qquad 15{,}75^2 > 248.$$

Значит, 15,74 есть та десятичная дробь, которую мы назвали приближенным корнем с точностью до $^1/_{100}$ из 248.

Применяя этот прием к нахождению приближенного корня с точностью до $^1/_{1000}$ до $^1/_{10000}$ и т. д. найдем следующее.

Правило. ***Чтобы извлечь из данного целою числа или из данной десятичной дроби***

приближенный корень с точностью до $^1/_{10}$ до $^1/_{100}$ до $^1/_{100}$ и т. д., находят сначала приближенный корень с точностью до 1, извлекая корень из целого числа (если его нет, пишут о корне 0 целых).

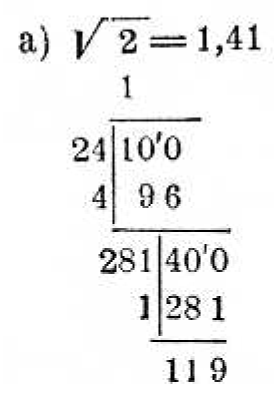
Потом находят цифру десятых. Для этого к остатку сносят ,2 цифры подкоренного числа, стоящие направо от запятой (если их нет, приписывают к остатку два нуля), и продолжают извлечение так, как это делается при извлечении корня из целого числа. Полученную цифру пишут в корне на месте десятых.

Затем находят цифру сотых. Для этого к остатку сносят снова две цифры, стоящие направо от тех, которые были только что снесены, и т. д.

Таким образом, при извлечении корня из целого числа с десятичной дробью, надо делить на грани по 2 цифры в каждой, начиная от запятой, как влево (в целой части числа), так и вправо, (в дробной части).

Примеры.

1) Найти до $^1/_{100}$ корни: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{0,3}$;



а) $\sqrt{2} = 1,41$

1

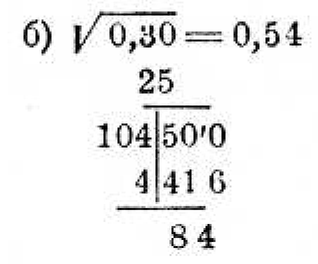
24 | 10′0

4 | 9 6

281 | 40′0

1 | 28 1

11 9



б) $\sqrt{0,30} = 0,54$

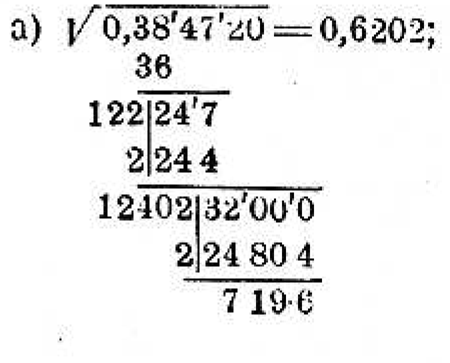
25

104 | 50′0

4 | 41 6

8 4

2) Извлечь до $^1/_{10000}$: а) $\sqrt{0,38472}$; б) $\sqrt{^3/_7}$.



а) $\sqrt{0,38'47'20} = 0,6202$;

36

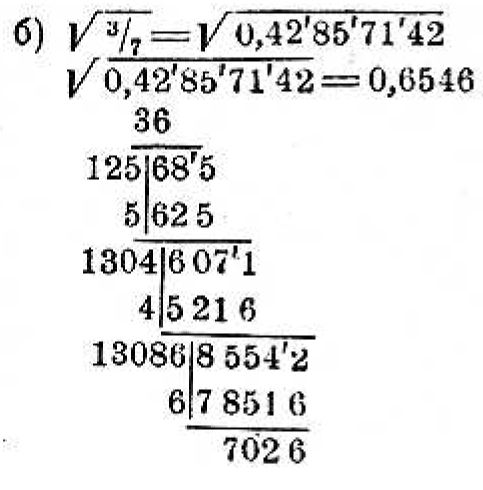
122 | 24′7

2 | 24 4

12402 | 32′00′0

2 | 24 80 4

7 19·6



б) $\sqrt{^3/_7} = \sqrt{0,42'85'71'42}$

$\sqrt{0,42'85'71'42} = 0,6546$

36

125 | 68′5

5 | 62 5

1304 | 6 07′1

4 | 5 21 6

13086 | 8 554′2

6 | 7 851 6

702 6

В последнем примере мы обратили дробь $^3/_7$ в десятичную, вычислив 8 десятичных знаков, чтобы образовались 4 грани, потребные для нахождения 4 десятичных знаков корня.

178. Описание таблицы квадратных корней. В конце этой книги приложена таблица квадратных корней, вычисленных с четырьмя цифрами. По этой таблице можно быстро находить квадратный корень из целого числа (или десятичной дроби), которое выражено не более, чем четырьмя цифрами. Прежде чем объяснить, как эта таблица устроена, заметим, что первую значащую цифру искомого корня мы всегда можем найти без помощи таблиц по одному взгляду на подкоренное число; мы легко также определим, какой десятичный разряд означает первая цифра корня и, следовательно, где в корне, когда найдем его цифры, надо поставить запятую. Приведем несколько примеров:

1) $\sqrt{5'27{,}3}$**.** Первая цифра будет 2, так как левая грань подкоренного числа есть 5; а корень из 5 равен 2. Кроме того, так как в целой части подкоренного числа всех граней только 2, то в целой части искомого корня должно быть 2 цифры и, следовательно, первая его цифра 2 должна означать десятки.

2) $\sqrt{9{,}041}$. Очевидно, в этом корне первая цифра будет 3 простые единицы.

3) $\sqrt{0{,}00'83'4}$. Первая значащая цифра есть 9, так как грань, из которой пришлось бы извлекать корень для получения первой значащей цифры, есть 83, а корень из 83 равен 9. Так как в искомом числе не будет ни целых, ни десятых, то первая цифра 9 должна означать сотые.

4) $\sqrt{0{,}73'85}$. Первая значащая цифра есть 8 десятых.

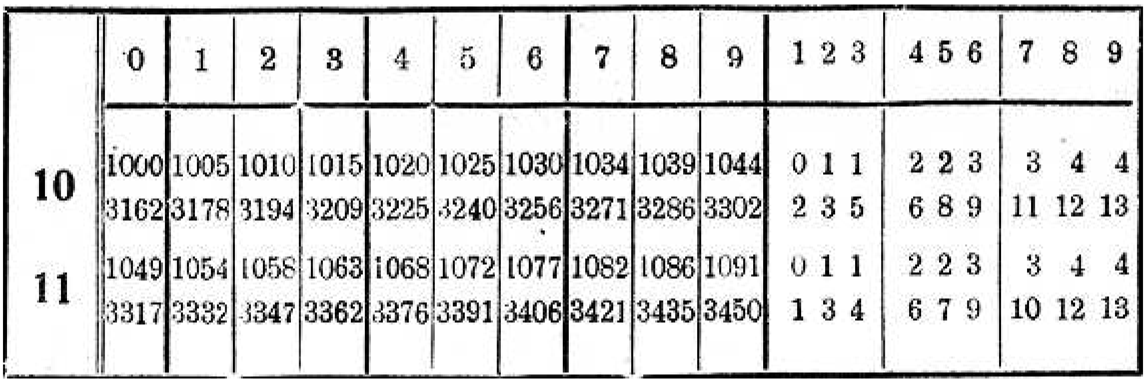
5) $\sqrt{0{,}00'00'35'7}$. Первая значащая цифра будет 5 тысячных.

Сделаем еще одно замечание. Положим, что требуется извлечь корень из такого числа, которое, после отбрасывания в нем занятой, изображается рядом таких цифр: 5681. Корень этот может быть один из слелуюших:

$$\sqrt{\underline{\underline{5681}}};\ \sqrt{\underline{\underline{568{,}1}}};\ \sqrt{\underline{56{,}81}};\ \sqrt{\underline{\underline{5{,}681}}};\ \sqrt{\underline{0{,}5681}},\ \sqrt{\underline{\underline{0{,}05681}}};\ \text{и т. д.}$$

Если возьмем корни, подчеркнутые нами одной чертою, то все они будут выражены одним и тем же рядом цифр, именно теми цифрами, которые получаются при извлечении корня из 5681 (это будут цифры 7, 5, 3, 7). Причина этому та, что грани, на которые приходится разбивать подкоренное число при нахождении цифр корня, будут во всех этих примерах одни и те же, поэтому и цифры для каждого корня окажутся одинаковые (только положение запятой будет, конечно, различное). Точно так же во всех корнях, подчеркнутых нами двумя чертами, должны получиться одинаковые цифры, именно те, которыми выражается $\sqrt{568{,}1}$ (эти цифры будут 2, 3, 8, 3), и по той же причине. Таким образом, цифры корней из чисел, изображаемых (по отбрасывании запятой) одним и тем же рядом цифр 5681, будут двоякого (и только двоякого) рода: либо это ряд 7, 5, 3, 7, либо ряд 2, 3, 8, 3. То же самое, очевидно, может быть сказано о всяком другом ряде цифр. Поэтому, как мы сейчас увидим, в таблице каждому ряду цифр подкоренного числа соответствуют 2 ряда цифр для корней.

Теперь мы можем объяснить устройство таблицы и способ ее пользования. Для ясности объяснения мы изобразили здесь начало первой страницы таблицы.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1000	1005	1010	1015	1020	1025	1030	1034	1039	1044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3162	3178	3194	3209	3225	3240	3256	3271	3286	3302	2	3	5	6	8	9	11	12	13
11	1049	1054	1058	1063	1068	1072	1077	1082	1086	1091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3317	3332	3347	3362	3376	3391	3406	3421	3435	3450	1	3	4	6	7	9	10	12	13

Таблица эта расположена на нескольких страницах. На каждой из них в первой слева колонке помещены числа 10, 11, 12... (до 99). Эти числа выражают первые 2 цифры числа, из которого ищется квадратный корень. В верхней горизонтальной строчке (а также и в нижней) размещены числа: 0, 1, 2, 3... 9, представляющие собою 3-ю цифру данного числа, а затем далее направо помещены цифры 1, 2, 3 . . . 9, представляющие собою4-ю цифру данного числа. Во всех других горизонтальных строчках помещены по 2 четырехзначных числа, выражающие квадратные корни из соответствующих чисел.

Пусть требуется найти квадратный корень из какого-нибудь числа, целого или выраженного десятичною дробью. Прежде всего находим без помощи таблиц первую цифру корня и ее разряд. Затем отбросим в данном числе запятую, если она есть. Положим сначала, что после отбрасывания запятой останутся только 3 цифры, напр. 114. Находим в таблицах в левой крайней колонке первые 2 цифры, т. е. 11, и продвигаемся от них направо по горизонтальной строке до тех пор, пока не дойдем до вертикальной колонки, наверху (и внизу) которой стоит 3-я цифра числа, т. е. 4. В этом месте мы находим два четырехзначных числа: 1068 и 3376. Которое из этих двух чисел надо взять и где поставить в нем запятую, это определяется первою цифрою корня и ее разрядом, которые мы нашли раньше. Так, если надо найти $\sqrt{0,11'4}$, то первая цифра корня есть 3 десятых, и потому мы должны взять для корня 0,3376. Если бы требовалось найти $\sqrt{1,14}$, то первая цифра корня была бы 1, и мы взяли бы тогда 1,068.

Таким образом мы легко найдем:

$$\sqrt{5,30} = 2,302; \quad \sqrt{7'18} = 26,80; \quad \sqrt{0,91'6} = 0,9571 \text{ и т.п.}$$

Положим теперь, что требуется найти корень из числа, выраженного (по отбрасывании запятой) 4 цифрами, напр.$\sqrt{7'45,6}$. Заметив, что первая цифра корня есть 2 десятка, находим для числа 745 так, как сейчас было объяснено, цифры 2729 (это число только замечаем пальцем, но его не записываем). Потом продвигаемся от этого числа еще направо до тех пор, пока в правой части таблицы (за последнею жирною чертою) не встретим ту вертикальную колонку, которая отмечена наверху (и внизу) 4-й цифрой данного числа, т. е. цифрой 6, и находим там число 1. Это будет поправка, которую надо приложить (в уме) к ранее найденному числу 2729; получим 2730. Это число записываем и ставим в нем запятую на надлежащем месте: 27,30.

Таким путем найдем, напр:

$$\sqrt{44,37} = 6,661; \quad \sqrt{4,437} = 2,107; \quad \sqrt{0,04'437} =0,2107 \text{ и т.д.}$$

Если подкоренное число выражается только одной или двумя цифрами, то мы можем предположить, что после этих цифр стоит один или два нуля, и затем поступать так, как было объяснено для трехзначного числа. Напр.$\sqrt{2,7} =\sqrt{2,70} =1,643$; $\sqrt{0,13} = \sqrt{0,13'0} =$ 0,3606 и т.п..

Наконец, если подкоренное число выражено более, чем 4 цифрами, то из них мы возьмем только первые 4, а остальные отбросим, причем для уменьшения ошибки, если первая из отбрасцваемых цифр есть 5 или более 5, то мы увеличим на l четвертую из удержанных цифр. Так:

$$\sqrt{357,8|\underline{3\,|}} = 18,91; \quad \sqrt{0,49'35|\underline{7\,|}} = 0,7025; \text{ и т.п.}$$

Замечание. В таблицах указан приближенный квадратный корень иногда с недостатком, иногда же с избытком, а именно тот из этих приближенных корней, который ближе подходит к точному корню.

179. Извлечение квадратных корней из обыкновенных дробей. Точный квадратный корень из несократимой дроби можно извлечь лишь тогда, когда оба члена дроби точные квадраты (§ 174). В этом случае достаточно извлечь корень из числителя и знаменателя отдельно, напр.:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Приближенный квадратный корень из обыкновенной дроби с какою-нибудь десятичною точностью проще всего можно находить, если предварительно обратим обыкновенную дробь в десятичную, вычислив в этой дроби такое число десятичных знаков после запятой, которое было бы вдвое больше числа десятичных знаков в искомом корне.

Пусть, напр., надо найти $\sqrt{2^{3}/_{7}}$ с точностью до 0,01, т. е. с 2 десятичными знаками после запятой. Для этого обратим $2^{3}/_{7}$ в десятичную дробь с 4 десятичными знаками: $^{28}/_{7}$ = 2,4285... и извлечем приближенный корень из 2,4285 с точностью до 0,01.

$$\begin{array}{r|r}
 & \sqrt{2,4285} = 1,55 \\
 & 1 \\ \hline
25 & 14'2 \\
5 & 12\,5 \\ \hline
305 & 178'5 \\
5 & 152\,5 \\ \hline
 & 260
\end{array}$$

Впрочем можно поступать и иначе. Объясним это на следующем примере:

Найти приближенный $\sqrt{^{5}/_{24}}$

Сделаем знаменатель точным квадратом. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменатель 24; но в этом примере можно поступить иначе. Разложим 24 на простые множители: 24 = 2 • 2 • 2 • 3. Из этого разложения видно, что если 24 умножить на 2 и еще на 3, то тогда в произведении каждый простой множитель будет повторяться четное число раз, и, следовательно, знаменатель сделается квадратом:

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2\cdot2\cdot2\cdot3}} = \sqrt{\frac{5\cdot2\cdot3}{2^4\cdot3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2^2\cdot3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Остается вычислить $\sqrt{30}$ с какой-нибудь точностью и результат разделить на 12. При этом надо иметь в виду, что от деления на 12 уменьшится и дробь, показывающая степень точности. Так, если найдем $\sqrt{30}$ с точностью до $^{1}/_{10}$ и результат разделим на 12, то получим приближенный корень из дроби $^{5}/_{24}$ с точностью до $^{1}/_{120}$ (а именно $^{54}/_{120}$ и

$^{55}/_{120}$)

Глава третья.

График функции $x = \sqrt{y}$.

180. Обратная функция. Пусть дано какое-нибудь уравнение, определяющее y как функцию от x, напр, такое: $y = x^2$. Мы можем сказать, что оно определяет не только y как функцию от x, но и, обратно, определяет x как функцию от y, хотя и неявным образом. Чтобы сделать эту функцию явной, надо решить данное уравнение относительно x, принимая y за известное число; так, из взятого нами уравнения находим: $y = x^2$.

Алгебраическое выражение, полученное для x после решения уравнения, определяющего y как функцию от x, называется функцией, обратной той, которая определяет y.

Значит, функция , $x = \sqrt{y}$ обратна функции $y = x^2$. Если, как это принято, независимое переменное обозначим x, а зависимое y, то полученную сейчас обратную функцию можем выразить так: $y = \sqrt{x}$. Таким образом, чтобы получить функцию, обратную данной (прямой), надо из уравнения, определяющего эту данную функцию, вывести x в зависимости от y и в полученном выражении заменить y на x, а x на y.

181. График функции $y = \sqrt{x}$. Функция эта невозможна при отрицательном значении x, но ее возможно вычислить (с любою точностью) при всяком положительном значении x, причем для каждого такого значения функция получает два различных значения с одинаковой абсолютной величиной, но с противоположными знаками. Если знаком $\sqrt{}$ будем обозначать только арифметическое значение квадратного корня, то эти два значения функции можем выразить так: $y = \pm\sqrt{x}$ Для построения графика этой функции надо предварительно составить таблицу ее значений. Всего проще эту таблицу составить из таблицы значений прямой функции:

$$y = x^2.$$

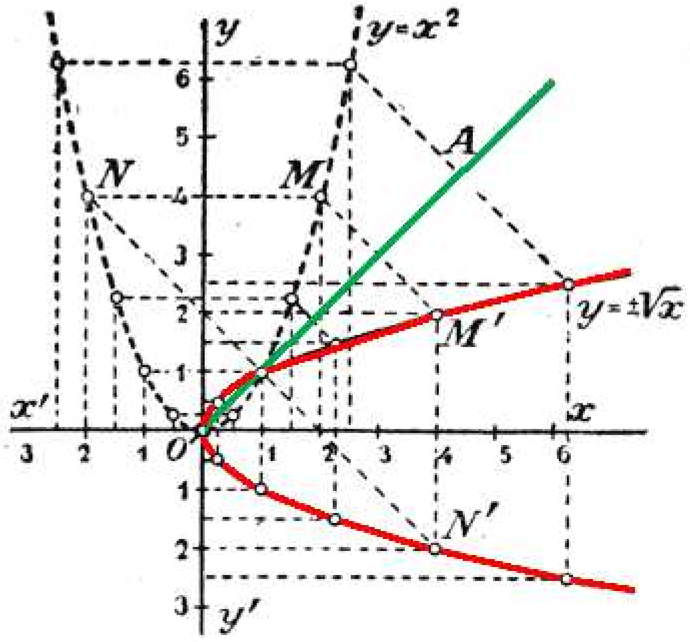
x	0	$^1/_2$	1	$1^1/_2$	2	$2^1/_2$	...	—$^1/_2$	—1	—$1^1/_2$	—2	—$2^1/_2$
y	0	$^1/_4$	1	$2^1/_4$	4	$6^1/_4$	...	$^1/_4$	1	$2^1/_4$	4	$6^1/_4$

если значения y примем за значения x, и наоборот:

$$y = \pm\sqrt{x}$$

x	0	$^1/_4$	1	$2^1/_4$	4	$6^1/_4$	...
y	0	$\pm\ ^1/_2$	$\pm$ 1	$\pm\ 1^1/_2$	$\pm$ 2	$\pm\ 2^1/_2$	...

Нанеся все эти значения на чертеже, получим следующий график .



На том же чертеже мы изобразили (прерывистой линией) и график прямой функции ***y*** **=** ***x*²**. Сравним эти два графика между собою.

182. Соотношение между графиками прямой и обратной функций. Для составления таблицы значений обратной функции ***y*** **=** ±√***x*** мы брали для ***x*** те числа, которые в таблице прямой функции ***y*** **=** ***x*²** служили значениями для ***y***, а для ***y*** брали те числа; которые в этой таблице были значениями для ***x***. Из этого следует, что оба графика одинаковы, только график прямой функции так расположен относительно оси ***y*** - ов, как график обратной функции расположен относительно оси ***x*** - ов. Вследствие этого, если мы перегнем чертеж вокруг прямой ***OA***, делящей пополам прямой угол ***xOy***, так, чтобы часть чертежа, содержащая полуось ***Oy***, упала на ту часть, которая содержит полуось ***Ox***, то ***Oy*** совместится с ***Ox***, все деления ***Oy*** совпадут с делениями ***Ox***, и точки параболы ***y*** **=** ***x*²** совместятся с соответствующими точками графика ***y*** **=** ±√***x***. Напр, точки ***M*** и ***N***, у которых ордината **4**, а абсциссы **2** и **—2**, совпадут с точками ***M'*** и ***N'***, у которых абсцисса **4**, а ординаты **2** и **—2**. Если же эти точки совпадут, то это значит, что прямые ***MM'*** и ***NN'*** перпендикулярны к *OA* и делятся этою прямою пополам. То же самое можно сказать о всех других соответствующих точках обоих графиков.

Таким образом, график обратной функции должен быть такой же, как и график прямой функции, но расположены эти графики различно, а именно симметрично друг с другом относительно биссектрисы угла ***xOy***. Можно сказать, что график обратной функции есть отображение (как в зеркале) графика прямой функции относительно биссектрисы угла ***xOy***.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ.

ДЕЙСТВИЯ НАД ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ И ВЫРАЖЕНИЯМИ.

Глава первая. **Понятие об иррациональном числе.**
Глава вторая. **Иррациональные значения радикалов.**
Глава третья.**Понятие о приближенных вычислениях.**
Глава четвертая. **Преобразование иррациональных выражений.**

Глава первая.

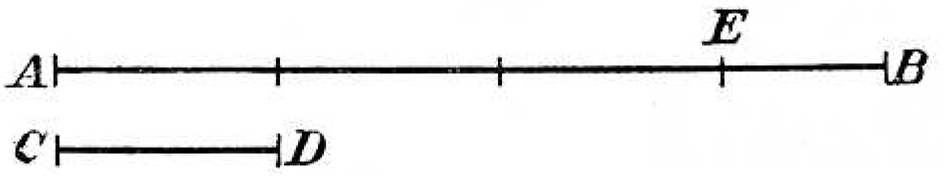
Понятие об иррациональном числе.

183. Соизмеримые и несоизмеримые с единицею значения величины.

Как известно из геометрии, общею мерою двух отрезков прямой, или двух углов, или двух дуг одинакового радиуса, вообще двух значений одной и три же величины, называется такое значение этой величины, которое в каждом из них содержится целое число раз без остатка. В геометрии же разъясняется, что могжет быть такие два отрезка, которые не имеют общей меры (напр, сторона квадрата и его диагональ).

Два значения одной и той же величины называются соизмеримыми или несоизмеримыми между собою, смотря по тому, имеют ли они общую меру, или не имеют.

184. Понятие об измерении. Пусть требуется измерить длину отрезка ***AB*** при помощи единицы длины ***CD***.



Для этого узнаем, сколько раз единица ***CD*** содержится в ***AB***. Пусть окажется, что она содержится в ***AB*** 3 раза с некоторым остатком ***EB***, меньшим ***CD***. Тогда число 3 будет приближенный результат измерения с точностью до 1 и притом с недостатком, так как***AB*** больше ***3CD***, но меньше ***4CD*** (число 4 тоже можно назвать приближенным результатом измерения с точностью до 1, но с избытком).

Желая получить более точный результат измерения, узнаем, сколько раз в остатке ***EB*** содержится какая-нибудь доля единицы ***CD***, напр. $^1/_{10}$ ***CD***. Положим, что эта доля содержится в ***EB*** более 8, но менее 9 раз. Тогда числа 3,8 и 3,9 будут приближенные результаты измерения отрезка ***AB*** с точностью до $^1/_{10}$, первое число с недостатком, второе с избытком.

Желая получить еще более точный результат измерения, узнаем, сколько раз в последнем остатке содержится $^1/_{100}$. Доля единицы ***CD***. Положим, что эта доля содержится в остатке более 5 раз, но менее 6 раз. Тогда числа 3,85 и 3,86 будут приближенные результаты измерения отрезка ***AB*** с точностью до $^1/_{100}$ единицы.

Можно продолжать такое измерение все далее и далее до тех пор, пока или не окажется никакого остатка, или остаток сделается столь малым, что им можно пренебречь; в первом случае мы получим точный результат измерения, во втором случае—приближенный с точностью до той доли единицы,посредством которой измеряли в последний раз.

Если отрезок ***AB*** несоизмерим с единицею длины ***CD***, то точного результата измерения мы никогда получить не можем. Действительно, если допустим, что таким результатом была бы какая-нибудь дробь, напр. $^{59}/_{27}$, то тогда $^{1}/_{27}$ доля ***CD*** служила бы общею мерою для ***AB*** И ***CD***, а несоизмеримые отрезки общей меры не имеют.

Если же отрезок **AB** соизмерим с ***CD***, то мы могли бы получить точный результат измерения, если бы предварительно нашли общую меру для ***AB*** и ***CD*** и узнали, сколько раз она содержится в ***AB*** и ***CD***. Если, положим, общая мера в ***AB*** содержится 23 раза, а в ***CD*** 11 раз, то ***AB*** = $^{23}/_{11}$ единицы ***CD***. Но если, не отыскивая общей меры, мы производим измерение произвольно взятыми долями единицы, то и в этом случае можем часто не получить точного результата измерения.

Измерение чаще всего производится посредством десятичных долей единицы; тогда результат измерения выражается десятичною дробью. Когда измеряемый отрезок соизмерим о единицею длины, то десятичная дробь может получиться или конечная (если общею мерою служит какая-нибудь десятичная доля единицы), или бесконечная (когда общая мера есть такая доля единицы, которая не обращается в точную десятичную дробь). Если же измеряемый отрезок несоизмерим с единицею длины, то точного результата измерения быть не может, и потому десятичная дробь должна оказаться бесконечной (если измерение продолжается все дальше и дальше без конца).

Полезно заметить, что есть существенная разница между той бесконечной десятичной дробью, которая может получиться от измерения соизмеримого отрезка, и тою, которая происходит от измерения несоизмеримого отрезка. Первая дробь должна быть периодической, вторая непериодической1).

185. Иррациональные числа. Числа целые, дробные, десятичные конечные и десятичные периодические носят общее название рациональных чисел; десятичные бесконечные дроби непериодические называются иррациональными числами2). Первые служат мерою величин, соизмеримых с единицею, вторые—мерою величин, несоизмеримых с единицею.

Иррациональное число считается известным (или данным), если указан способ, посредством которого можно находить любое число его десятичных знаков.

Два иррациональных числа (как и два рациональных) считаются равными, если они произошли от измерения одною и тою же единицею двух равных величин; из двух неравных чисел то считается большим, которое произошло от измерения большей величины. Две равные величины, конечно, должны содержать в себе одинаковое число целых единиц, одинаковое число десятых долей, одинаковое число сотых долей и т. п., поэтому равные иррациональные числа должны быть выражены одинаковыми цифрами3). Большая же величина должна содержать в себе большее число целых или — при равенстве целых—большее число десятых, или — при равенстве целых и десятых — большее число, сотых и т. д. Напр., число 2,745037... больше числа 2,745029..., так как в первом 6-я цифра выражает число большее, чем 6-я цифра во втором, при тождественности всех предыдущих цифр.

Иррациональные числа могут быть положительными и отрицательными, смотря по тому, измеряют ли они величины, считаемые положительными, или величины, считаемые отрицательными.

186. Приближенные значения иррационального числа. Пусть нам дано какое-нибудь иррациональное число α 4), т. е. пусть указан способ, посредством которого мы можем получить сколько угодно цифр числа α (этим способом может быть, напр., то правило, посредством которого мы находим приближенные квадратные корни с точностью до $^1/_{10}$ до $^1/_{100}$ до $^1/_{1000}$ и т. д.). Положим, мы нашли такие 5 цифр числа α:

$$\alpha = 1{,}4142...$$

Возьмем из этих цифр несколько первых, напр, цифры 1,41, а остальные отбросим. Тогда мы получим приближенное значение числа α, причем это значение будет с недостатком, так как $1{,}41 < \alpha$. Если последнюю из удержанных нами цифр увеличим на 1, т. е. вместо 1,41 возьмем 1,42, то получим тоже приближенное значение числа α, но с избытком. Обыкновенно из двух приближенных значений, из которых одно с недостатком, другое с избытком, берут значение с недостатком, если первая из отброшенных цифр менее 5, и значение с избытком, если эта цифра больше 5.

187. Определение действий над иррациональными числами. Пусть α и β будут какие-нибудь данные положительные иррациональные числа. Если эти числа даны, то это значит, что мы можем найти их приближенные значения с любою точностью. Пусть, напр., приближенные значения чисел α и β, взятые с недостатком, будут такие (мы берем приближенные значения $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$):

	до 0,1	до 0,01	до 0,001	до 0,0001
для числа α **.....**	1,7	1,73	1,732	1,7320
для числа β **.....**	1,4	1,41	1,414	1,4142

(Соответствующие приближенные значения с избытком получаются из этих чисел посредством усиления последнего десятичного знака на 1.)

Тогда: **а)** сложить α и β значит найти число, которое было бы

больше каждой из сумм:	и меньше каждой из сумм:
1,7 + 1,1 . . . . =3,1	1,8+1,6. . . . =3,3
1,73 + 1,41 . . . =3,14	1,74+1,42. . . =3,16
1,732+1,414 . . . =3,146	1,733 + 1,415 . . =3,146
1,7320+1,4142 . . =3,1462	1,7321 + 1,4143 . . =3,1464

т. е. ***сложить числа α и β — значит найти такое третье число, которое было бы больше суммы любых приближенных их значении, взятых с недостатком, но меньше суммы любых приближенных значении, взятых с избытком.***

б) Беря приближенные значения чисел α и β, указанные сейчас, мы можем сказать, что произведение $\alpha\beta$ есть число, которое

больше каждого из произв.:	и меньше каждого из произв.:

1,7•1,4. . . . . =2,38	1,8•1,5. . . . . =2,70
1,73 • 1,41. . . . . . . =2,4393	1,74 • 1,42. . . . . . . =2,4708
1,732•1,114. . . . . . =2,449048	1,733•1,415. . . . . . =2,452195
1,7320 • 1,1142. . . =2,44939440	1,7321 • .1,4143 . . . =2,44970903

т. е. перемножить числа α и β — значит найти такое третье число, которое было бы больше произведения их любых приближенных значений, взятых с недостатком, но меньше произведения их любых приближенных значений, взятых с избытком.

в) ***Возвысить иррациональное число α во вторую, третью, четвертую и т. д. степени — значит найти произведение, составленное из двух, трех, четырех и т. д. сомножителей, равных α.***

г) Обратные действия определяются для иррациональных чисел так же, как и для рациональных; так, вычесть из числа ***α*** число ***β*** значит найти такое число ***x***, чтобы сумма $\beta + x$ равнялась ***α***, и т. п.

Если одно из чисел ***α*** или ***β*** будет рациональное, то в указанных определениях прямых действий вместо приближенных значений такого числа можно брать точное число.

Произведение иррационального числа на нуль принимается, как и для чисел рациональных, равным нулю.

Действия над отрицательными иррациональными числам и производятся согласно правилам, данным для рациональных отрицательных чисел.

При более обстоятельном рассмотрении можно установить, что ***действия над иррациональными числами обладают теми же свойствами, какие принадлежат действиям над числами рациональными***; напр., сумма и произведение обладают свойствами переместительным и сочетательным; произведение и деление, кроме того, обладают еще распределительным свойством. Свойства, выражаемые неравенствами, также сохраняются у чисел иррациональных; так, если $\alpha > \beta$, то $\alpha + \gamma > \beta$, $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (если $\gamma > 0$) и $\alpha\gamma < \beta\gamma$ (если $\gamma < 0$) и т. п.

Глава вторая.

Иррациональные значения радикалов.

188. Приближенные корни любой степени. Мы уже говорили (отдел 7 глава 2 §§ 175-177), что такое приближенные квадратные корни с точностью до 1, до $^1/_{10}$ и т.д. и как эти корни находятся. Сказанное тогда о квадратном корне может быть применено к корню всякой другой степени. Напр., приближенным $\sqrt[3]{2}$ с точностью до $^1/_{100}$ называется такая десятичная дробь, состоящая из целых, десятых и сотых, куб которой меньше 2, но если увеличим ее на $^1/_{100}$ и эту увеличенную дробь возвысим в куб, то получим больше 2.

Мы не будем выводить правил для нахождения точных и приближенных корней кубичных и других более высоких степеней; ограничимся только указанием следующего простого приема для нахождения таких корней. Пусть требуется найти $\sqrt[3]{2}$. Приближенные корни с точностью до 1 будут, очевидно, числа 1 (с недостатком) и 2 (с избытком). Чтобы найти цифру десятых долей искомого корня, найдем в ряду:

1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2

два рядом стоящих числа таких, чтобы куб левого числа был меньше 2, а куб- правого больше 2. Для этого возьмем из чисел нашего ряда среднее 1,5 и возвысим его в куб. Мы найдем: $1,5^3$ = 3,375, что больше 2. Так как числа, стоящие направо от 1,5 дают при возвышении в куб еще больше, то мы можем отбросить всю правую половину ряда и испытать только числа:

1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Возьмем среднее из них 1,2 и возшсим в куб. Получим 1,728, что меньше 2. Значит, испытанию подлежат теперь только числа 1,3 и 1,4. Возвысив в куб число 1,3, получим 2,197, что больше 2. Мы получили таким образом два числа 1,2 и 1,3, которые разнятся между собою на 0,1 и между кубами которых заключается число 2. Это и будут приближенные кубичные корни из 2 с точностью до $^1/_{10}$ с недостатком и с избытком. Если желаем найти цифру сотых, мы должны испытать следующие числа:

1,21; 1,22; 1,23;.......1,29.

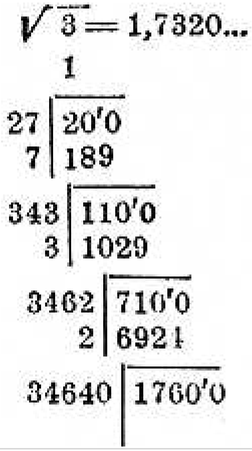
Взяв в этом ряду среднее число 1,25 и возвысив его в куб, найдем: $1,25^3$= 1,953125, что меньше 2. Значит, теперь надо испытать только числа: 1,26; 1,27; 1,28; 1,29. Так как $1,25^3$ очень мало разнится от 2, то весьма вероятно, что $1,26^3$ будет больше 2. И действительно, возвысив 1,26 в куб, получим 2,000376. Значит, искомый кубичный корень из 2 с точностью до $^1/_{100}$ будет 1,25 (с недостатком) или 1,26 (с избытком). Если бы мы желали далее найти цифры тысячных, то должны были бы подобным же путем испытать числа ряда:

1,251; 1,252; 1,253;.........1,259.

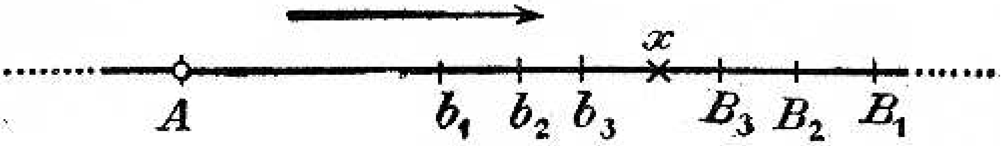
Конечно, прием этот утомителен (существуют более удобные способы)5), но из него ясно видно, что десятичные цифры приближенных корней любой степени могут быть найдены в каком угодно большом числе.

189. Иррациональное значение корня. Разъясним, что $\sqrt{3}$, который точно не выражается ни целым, ни дробным числом, равен некоторому иррациональному числу. Для этого вычислим ряд приближенных $\sqrt{3}$ с точностью до $^1/_{10}$, до $^1/_{100}$ до $^1/_{1000}$ …

Эти значения будут:

 $\sqrt{3} = 1,7320...$ 1 27 | 20'0 7 | 189 343 | 110'0 3 | 1029 3462 | 710'0 2 | 6924 34640 | 1760'0	**1,7; 1,73; 1,732; 1,7320 (с нед.).** **1,8; 1,74; 1,733; 1,7321 (с изб.).**

Изобразим все эти числа на числовой прямой. Для этого примем какую-нибудь точку А некоторой прямой за начало отрезков и, выбрав произвольную единицу длины, отложим на прямой отрезки: Ab_1 = 1,7 , Ab_2 = 1,73 и т. д.; затем отрезки: Ab_1 = 1,8, Ab_2 =1,74 и т. д.



Так как каждый приближенный корень с недостатком меньше каждого приближенного корня с избытком (потому что квадрат первого меньше 3, а квадрат второго больше 3), то каждая дочка ***b*** должна лежать налево от каждой точки ***B***. С другой стороны, разность между приближенным корнем с избытком и соответствующим приближенным корнем с недостатком может быть сделана как угодно мала; поэтому при неограниченном увеличении точности, с какою мы находим приближенные квадратные корни из 3, промежуток на числовой прямой, отделяющий область точек В от области точек В (т. е. промежуток b_1B_1, b_2B_2, b_3B_3..), становится все меньше и меньше и может сделаться как угодно малым. При этих условиях мы должны допустить, что на прямой существует некоторая точка ***x*** (и только одна), которая служит границею, отделяющею ту часть прямой, на которой лежат все точки ***b***, от той ее части, на которой расположены все точки ***B***.

Обозначим буквою α число, измеряющее отрезок Ax. Так как это число больше каждого из чисел, измеряющих отрезки Ab_1 ,Ab_2 ... и меньше каждого из чисел, измеряющих отрезки AB_1 , AB_2 . . ., то α^2 должно быть больше квадрата каждого из приближенных квадратных корней из 3, взятого с недостатком, и меньше квадрата каждого из приближенных квадратных корней из 3, взятого с избытком. Согласно определению приближенных квадратных корней, такое число есть 3. Значит, α^2 = 3 и поэтому $\alpha = \sqrt{3}$

Повторяя все сейчас сказанное о $\sqrt{3}$, о корне какой угодно степени из какого угодно числа (конечно, положительного, так как мы говорим об арифметических корнях), можно сказать, что каково бы ни было число ***A,*** всегда $\sqrt[m]{A}$ есть некоторое число, рациональное или иррациональное, которого ***m***-ая степень равна ***A.***

Поэтому все свойства радикалов, основанные на этом определении корня (отдел 6 глава 6 § 168), применимы также и к иррациональным их значениям. Таким образом, каковы бы ни были положительные числа, всегда будем иметь:

$$\sqrt[m]{abc}=\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c};\quad \sqrt[m]{a^{mn}}=a^n;\quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Глава третья.

Понятие о приближенных вычислениях.

190. Предварительное замечание. При совершении какого-либо действия над числами иррациональными (или над числами рациональными, если они выражаются десятичными дробями с очень большим числом цифр) приходится довольствоваться приближенным результатом действия. В этом случае важно знать, как велика погрешность этого приближенного результата. Рассмотрим, как можно это делать в простейших случаях.

191. Приближения с недостатком и с избытком. Если вместо точного числа мы берем приближенное число, то это последнее называется приближением с недостатком, если оно меньше точного числа, и с избытком, если оно больше его. Разность между точным числом и его приближением называется погрешностью этого приближения. Если, напр., точное число есть 3,826 и мы вместо этого числа взяли 3,82, то это будет приближение с недостатком, причем погрешность равна 0,006; если же вместо 3,826 возьмем, положим, 3,83, то будем иметь приближение с избытком, причем погрешность окажется 0,004. Обыкновенно точная величина погрешности остается неизвестной, а известно только, что она меньше некоторой дроби, напр, меньше $^1/_{100}$. Тогда говорят, что приближение точно до $^1/_{100}$.

Пусть, напр., известно, что 2,85 есть приближение числа ***A*** с точностью до $^1/_{100}$. Это значит, что 2,85 разнится от ***A*** меньше, чем на $^1/_{100}$, так что если 2,85 есть приближение с недостатком, то точное число ***A*** заключается между 2,85 и 2,86, а если 2,85 есть приближение с избытком, то ***A*** заключается между 2,85 и 2,84. Если же остается неизвестным, будет ли приближение 2,85 с недостатком или с избытком, а известно только, что оно точно до $^1/_{100}$, то о числе ***A*** мы можем только утверждать, что оно заключается между 2,84 и 2,86.

Погрешность, о которой мы сейчас говорили, называется абсолютною погрешностью в отличие от относительной погрешности, под которою разумеют отношение абсолютной погрешности к точному числу. Так, если вместо точного числа 3,826 мы берем приближенное 3,82, то относительная погрешность будет 0,006: 3,820 = 6:3826 = 0,001568..., т. е. менее 0,002. Это значит, что, взяв приближение 3,82, мы ошиблись менее, чем на 0,002 точного числа.

Иногда относительную погрешность выражают в процентах точного числа, т. е. указывают, что погрешность менее стольких-то процентов точного числа. Так, если относительная погрешность менее 0,002 точного числа, то это значит, что она менее 0,2% этого числа, так как

$$0{,}002=\frac{0{,}002\cdot 100}{100}=\frac{0{,}2}{100}=0{,}2\%$$

В дальнейшем мы будем говорить только об абсолютной погрешности, называя ее просто „погрешность".

192. Десятичные приближения. Когда имеют дело с десятичными числами, то приближения их берут с точностьдо до $^1/_{10}$, до $^1/_{100}$ и т. д. и даже с точностью до $^1/_2$ десятичной единицы. Такие приближения находятся по следующим правилам.

а) Чтобы получить приближение с недостатком данного десятичного числа (с конечным или бесконечным числом десятичных знаков) с точностью до одной десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно отбросить в числе все цифры, стоящие вправо от той, которая выражает единицы этого разряда.

Так, приближение с недостатком числа 3,14159... с точностью до $^{1}/_{100}$ есть 3,14, потому что это число меньше данного и погрешность, равная 0,159... сотой, меньше целой сотой.

б) Чтобы получить приближение с избытком данного десятичного числа с точностью до одной десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно, отбросив в числе все цифры, стоящие вправо от той, которая выражает единицы этого разряда, увеличить на 1 последнюю из удержанных цифр.

Так, приближение с избытком числа 3,14159... с точностью до 0,001 есть 3,142, потому что это число больше данного и погрешность его меньше 0,001.

в) Чтобы получить приближение данного десятичного числа с точностью до $^{1}/_{2}$ десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно, поступив так, как было сказано в правиле 1-м, увеличить на 1 последнюю из удержанных цифр, если первая из отброшенных цифр есть 5 или больше 5 (и тогда приближение будет с избытком), а в противном случае оставить ее без изменения (и тогда приближение будет с недостатком).

Так, приближение (с недостатком) числа 3,14159... с точностью до $^{1}/_{2}$ сотой есть 3,14, так как погрешность менее 0,5 сотой; приближение того же числа (с избытком) с точностью до $^{1}/_{2}$ тысячной есть 3,142, так как погрешность, равная (1—0,59) тысячной, очевидно, меньше 0,5 тысячной.

193. Погрешность приближенной суммы. Из свойств арифметического сложения мы знаем, что если какое-либо слагаемое уменьшится или увеличится на некоторое число, то и сумма уменьшится или увеличится на то же число. Поэтому если все слагаемые взяты с недостатком или все с избытком, то сумма в первом случае будет с недостатком, а во втором — с избытком, причем погрешность суммы равна сумме погрешностей всех слагаемых. Если же случится, что некоторые слагаемые взяты с недостатком, а другие с избытком, то погрешность, происходящая от слагаемых с недостатком, покроется вполне или частью противоположною погрешностью от слагаемых с избытком, и потому окончательная погрешность суммы менее суммы погрешностей слагаемых. Приведем примеры:

а) Пусть требуется найти суммы:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = 1{,}4142\ldots + 1{,}7320\ldots + 2{,}2360\ldots$$

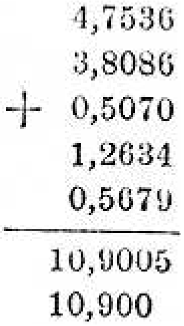
Положим, что в каждом слагаемом мы ограничиваемся тремя десятичными знаками после запятой:

$$\begin{array}{r} 1{,}414 \\ +\,1{,}732 \\ 2{,}236 \\ \hline 5{,}382 \\ \underline{5{,}38} \end{array}$$

Так как все слагаемые мы взяли с недостатком, то и сумма будет с недостатком; погрешность каждого слагаемого менее $^{1}/_{2}$ тысячной, поэтому погрешность суммы

5,382 менее ($^1/_2 + ^1/_2 + ^1/_2$) тысячной, т.е. менее 1,5 тысячной. Если мы отбросим в числе 5,382 последнюю цифру 2, то еще уменьшим сумму на 2 тысячных, и погрешность числа 5,38 будет менее суммы 1,5 + 2 = 3,5 тысячных, что в свою очередь менее 5 тысячных, т. е. менее 3/г сотой. Таким образом, 5,38 есть приближенная сумма данных слагаемых, взятая с недостатком и точная до $^1/_2$ сотой.

б) Пусть надо найти сумму пяти слагаемых, из которых каждое точно до $^1/_2$ десятитысячной, причем неизвестно, взяты ли приближения с недостатком или с избытком, или, быть может, некоторые взяты с недостатком, а другие с избытком.

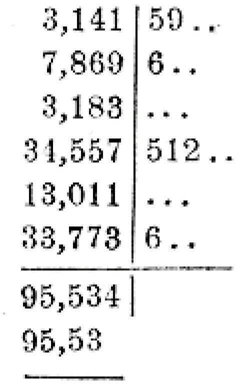


$$\begin{array}{r} 4,7536 \\ 3,8086 \\ +\ 0,5070 \\ 1,2634 \\ 0,5679 \\ \hline 10,9005 \\ 10,900 \end{array}$$

Тогда погрешность суммы 10,9005 будет во всяком случае меньше $^1/_2 + ^1/_2 + ^1/_2 + ^1/_2 + ^1/_2 = 2,5$ десятитысячных; если же отбросим последнюю цифру 5 этой суммы, то мы ее уменьшим на 5 десятитысячных и погрешность будет меньше 5+2,5 = 7,5 десятитысячных, что меньше 10 десятитысячных, т.е. меньше 1 тысячной. Таким образом, число 10,900 есть приближенная оумма с недостатком (так как уменьшение на 5 десятитысячных больше возможного увеличения на 2,5 десятитысячных), точная до 1 тысячной.

Из этих примеров видно, что если требуется найти приближённую сумму с точностью до одной единицы какого-нибудь разряда, то мы должны в слагаемых взять десятичных знаков больше, чем их требуется иметь в окончательном результате (на 1 знак больше, если слагаемых не более 10). Пусть, напр., надо найти с точностью до 1 сотой сумму:

Тогда берем в слагаемых по 3 знака после запятой (отбросив все те, которые мы отделили вертикальной чертою). Число 95,534 есть приближенная сумма с недостатком, точная до 6 тысячных. Если отбросим еще последнюю цифру 4, то уменьшим сумму на 4 тысячных, и все уменьшение будет меньше 6 + 4 тысячных, т. е. менее 1 сотой. Таким образом, 95,53 есть приближенная сумма с недостатком, точная до сотой.



$$\begin{array}{r|l} 3,141 & 59.. \\ 7,869 & 6.. \\ 3,183 & ... \\ 31,557 & 512.. \\ 13,011 & ... \\ 33,773 & 6.. \\ \hline 95,534 & \\ 95,53 & \end{array}$$

Заметим, что иногда последнюю цифру приближенной суммы следует увеличить на 1. Напр., положим, что в приведенном сейчас примере третий десятичный знак суммы 95,534 был бы не 4, а 9; тогда, отбросив его, мы получили бы сумму 95,53 с недостатком, с точностью до 6+ 9 = 15 тысячных, что составляет 1,5 сотой. Если увеличим последний десятичный знак на 1, т. е. возьмем число 95,54, то мы, очевидно, уменьшим погрешность на 1 сотую, вследствие чего она будет теперь менее 1 сотой (но остается неизвестным, с недостатком или с избытком будет приближенная сумма).

194. Погрешность приближенной разности. Из свойств арифметического вычитания мы знаем, что если уменьшаемое уменьшим или увеличим, то и разность уменьшится или увеличится на столько же; если же вычитаемое уменьшим или увеличим, то разность увеличится или уменьшится на столько же. Значит, если оба данные для вычитания числа взяты с недостатком или оба с избытком, то погрешность разности равна разности погрешностей данных чисел; если же одно данное число взято с недостатком, а другое с избытком, то погрешность разности должна равняться сумме погрешностей данных чисел. Приведем примеры:

$$1)\ \sqrt{3} — \sqrt{2} = 1{,}73205\ ... — 1{,}41421$$

Положим мы взяли в каждом числе только по 3 десятичных знака после запятой:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 1{,}732 \\ 1{,}414 \end{array} \\ \hline 0{,}318 \end{array}$$

Так как оба приближения мы взяли с недостатком с точностью до $^1/_2$ тысячной, то погрешность числа 0,318, равная разности погрешностей данных чисел, меньше $^1/_2$ тысячной, причем остается неизвестным, будет ли приближенная разность с недостатком или с избытком (неизвестно, какое уменьшение больше: уменьшаемого или вычитаемого).

2) Пусть требуется найти разность приближенных чисел 7,283—5,496, точных до 1 тысячной, причем неизвестно, взяты ли они оба с недостатком, или оба с избытком, или одно с недостатком, а другое с избытком.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 7{,}283 \\ 5{,}496 \end{array} \\ \hline 1{,}787 \\ 1{,}78 \end{array}$$

Погрешность разности не более суммы погрешностей данных чисел, т. е. не более 2 тысячных. Если отбросим последнюю цифру 7, то погрешность будет не более 7+2 = 9 тысячных, что меньше 10 тысячных =1 сотой.

Таким образом, если требуется найти разность данных приближенных чисел с точностью до одной единицы какого-нибудь разряда, то в данных числах можно ограничиться единицами этого разряда, отбросив все низшие разряды, если известно, что оба числа взяты с недостатком или оба с избытком; если же это неизвестно, то в данных числах надо взять одним разрядом больше, чем требуется иметь в результате, и последнюю цифру результата откинуть.

195. Погрешность приближенного произведения. Из свойств арифметического умножения мы знаем, что если один из двух сомножителей уменьшится или увеличится на какое-нибудь число, то произведение уменьшится или увеличится на это число, умноженное на другой сомножитель. Поэтому, если один из двух сомножителей точное число, а другой приближенное, то ***погрешность произведения равна погрешности приближенного сомножителя, умноженной на точный сомножитель***.

Пример. Вычислить **2πR**, где **π** = 3,1415926... и **R** = 2,4 м.

Ограничиваясь приближенным значением числа **π** с точностью до $^1/_2$ тысячной (с избытком), получим:

$$\mathbf{2\pi R} = 3{,}142 \cdot 4{,}8 = 15{,}0816.$$

Погрешность меньше $^1/_2 \cdot 4{,}8 = 2{,}4$ тысячной, причем приближение будет с избытком.

Отбросив в результате последние две цифры, т. е. 16 десятитысячных = 1,6 тысячной, мы уменьшим результат на столько же; значит, полученное число 15,08 будет точно до 2,4—1,6 = 0,8 тысячной, что меньше 1 тысячной (и поэтому результат 15,08 лучше изобразить так: 15,080); при этом остается неизвестным, будет ли приближение 15,08 с избытком или с недостатком.

Когда оба сомножителя приближенные числа, погрешность произведения можно определить следующим образом. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будут приближения, взятые оба с недостатком, причем погрешность первого есть α, а второго β.
Тогда точные числа будут $\boldsymbol{a} + \alpha$ и $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\beta}$ **.** Найдем разность между точным произведением $(\boldsymbol{a} + \alpha)(\boldsymbol{b} + \beta)$ и приближенным $\boldsymbol{ab}$:

$$(\boldsymbol{a} + \alpha)(\boldsymbol{b} + \beta) - \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ab} + \alpha\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\beta + \alpha\beta - \boldsymbol{ab} = \alpha\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\beta + \alpha\beta$$

Так как числа α и β небольшие, то произведение $\alpha\beta$ настолько мало, что им можно пренебречь (напр., если $\alpha < 0{,}001$ и $\beta < 0{,}001$, то $\alpha\beta < 0{,}000001$). Тогда можно сказать, что погрешность приближенного произведения $\boldsymbol{ab}$ равна $\alpha\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\beta$, т. е. она равна ***сумме произведений погрешности каждого приближенного сомножителя на другой сомножитель.*** Если оба сомножителя взяты с избытком, то точные числа будут $\boldsymbol{a} - \alpha$ и $\boldsymbol{b} - \beta$ и тогда

$$\boldsymbol{ab} - (\boldsymbol{a} - \alpha)(\boldsymbol{b} - \beta) = \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ab} + \alpha\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\beta - \alpha\beta = \alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{a} - \alpha\beta,$$

или, пренебрегая попрежнему числом $\alpha\beta$,

$$\boldsymbol{ab} - (\boldsymbol{a} - \alpha)(\boldsymbol{b} - \beta) = \alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{a}\ ,$$

т. е. погрешность приближенной суммы выражается тою же суммою, какую мы нашли раньше.

Приложим сказанное к следующему примеру:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 1{,}73205\ \ldots \cdot 1{,}41422\ \ldots$$

Ограничиваясь четырьмя десятичными знаками после запятой, перемножим приближения с недостатком, взятые с точностью до 0,0001:

$$1{,}7320 \cdot 1{,}4142 = 2{,}44939440.$$

Так как каждое из взятых приближений меньше 2, то погрешность найденного приближенного произведения меньше $0{,}0001 \cdot 2 + 0{,}0001 \cdot 2$, т. е. меньше 4 десятитысячных, причем оно будет с недостатком. Если в этом произведении отбросим цифры 39440, то уменьшим еще произведение на число, меньшее 4 десятитысячных; тогда получим произведение 2,449, точное до 4 + 4 = 8 десятитысячных, что меньше 10 десятитысячных = 1 тысячной. Значит, приближенное произведение 2,449 будет с недостатком и точное до 0,001.

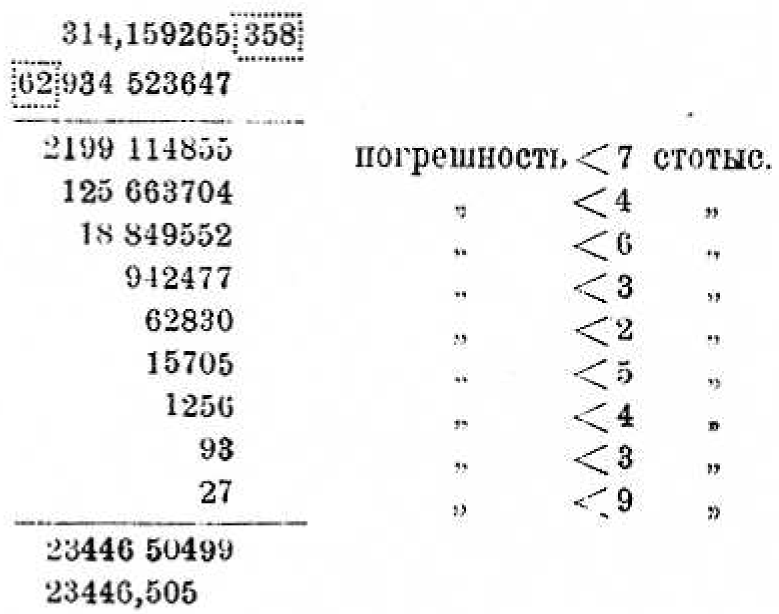
В частном случае, когда речь идет, как в нашем примере, об умножении квадратных корней, произведение мы можем найти проще, так: принимая во внимание, что $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$, извлечем из 6 приближенный квадратный корень с желаемою точностью. Так, извлекая корень до тысячных долей, получим то же число 2,419, которое мы получили выше иным путем.

196. Сокращенное умножение. Укажем еще следующий прием сокращенного умножения, который позволяет быстро найти произведение с заранее заданной точностью. Пусть требуется найти с точностью до 0,001 произведение:

314,159265358... • 74,632543926 ...

Мы сначала укажем, как производится сокращенное умножение, а потом объясним, почему.

Подписываем цифры множителя под множимым в обратном порядке справа налево так, чтобы цифра его простых единиц стояла под тою цифрою множимого, которая выражает единицы во 100 раз меньшие единицы разряда, выражающего данную точность, т. е. в нашем случае под цифрою 6 стотысячных:



```
 314,159265 358
62 934 523647
──────────────
  2199 114855    погрешность < 7 стотыс.
   125 663704         "      < 4    "
    18 849552         "      < 6    "
       942477         "      < 3    "
        62830         "      < 2    "
        15705         "      < 5    "
         1256         "      < 4    "
           93         "      < 3    "
           27         "      < 9    "
──────────────
  23446 50499
  23446,505
```

Затем умножаем множимое на каждую цифру множителя не обращая при этом внимания на цифры множимого, стоящие вправо от той цифры множителя, на которую умножаем. Все эти частные произведения подписываем одно под другим так, чтобы первые справа их цифры стояли в одном вертикальном столбце, после чего их сложим. В полученном числе отбрасываем две последние цифры и увеличиваем на 1 последнюю из оставшихся цифр. Наконец, ставим запятую так, чтобы последняя цифра выражала единицы требуемого разряда, т. е. в нащем случае тысячные доли. Полученное число 23446,505 будет точно до 0,001 (остается неизвестным, с недостатком или с избытком).

Теперь объясним этот прием сокращенного умножения.

Прежде всего убедимся в том, что все частные произведения выражают единицы одного и того же разряда, именно во 100 раз меньшие единицы данного разряда (в нашем примере — стотысячные доли). Действительно, умножая на первую цифру 7 число 314159265, мы умножаем миллионные доли на десятки, значит, получаем в произведении стотысячные доли. Далее, умножая на 4 число 31415926, мы умножаем стотысячные доли на простые единицы; значит, получаем снова в произведении стотысячные доли, и т. д. Из этого следует, что сумма 2344650499 выражает стотысячные доли, т. е. она есть число 23446,50499. Покажем теперь, что погрешность в окончательном результате меньше 0,001.

Так как часть множимого, написанная направо от цифры 7 множителя, меньше 1 миллионной, то, пренебрегая произведением этой части на 70, мы уменьшаем результат на число, меньшее 7 стотысячных. Далее, так как часть множимого, написанная направо от цифры 4 множителя, меньше 1 стотысячной, то, пренебрегая произведением этой части на 4 простые единицы, мы уменьшаем результат на число, меньшее 4 стотысячных. Рассуждая подобным образом относительно всех прочих цифр множителя, на которые приходится умножать, заметим, что мы уменьшаем результат на число, меньшее 7 + 4 + 6 + + 3 + 2 + 5 + 4 + 3 + 9 стотысячных. Наконец, так как множимое меньше 1 тысячи, а часть множителя, написанная влево от множимого (на которую, следовательно, не приходится умножать вовсе), меньше 2 + 1 стомиллионных, то, пренебрегая произведением множимого на эту часть множителя, мы еще уменьшаем результат на число, меньшее 2 + 1 стотысячных. Следовательно, беря вместо точного произведения число 23446,50499, мы уменьшаем первое на число, меньшее (7 + 4 + 6 + 3 + 2 + 5 + 4 + 3 + 9) + 2 +1 стотысячных, т. е. вообще меньшее 101 стотысячной, если только сумма цифр множителя, на которые приходится умножать, увеличенная на первую из отбрасываемых его цифр, не превосходит 100 6) (это всегда имеет место, если число частных произведений не превосходит 10). Кроме того, отбрасывая две последние цифры результата, мы снова уменьшаем произведение на число, не превосходящее 99 стотысячных. Поэтому все уменьшение будет менее 101 + 99 стотысячных, т. е. менее 2 тысячных; если же последнюю цифру увеличим на 1, т. е. на 1 тысячную, то результат 23446,505 разнится от точного произведения менее, чем на 2—1 тысячной, т. е. менее одной тысячной (причем остается неизвестным, будет ли он с избытком или с недостатком).

Заметим, что увеличивать на 1 последнюю из удержанных цифр произведения не всегда необходимо. Это нужно было сделать в рассмотренном примере, потому что там погрешность произведения (до увеличения на 1 последней его цифры) менее суммы

(7 + 4 + 6 +3 + 2 + 5 + 4 + 3+ 9) + 2 + 1 + 99 стотысячных = 145 стотысячных,

которая заключается между 100 и 200 стотысячных. Но если бы отбрасываемые 2 цифры были не 99, а напр. 25, то погрешность произведения оказалась бы меньше суммы

(7 + 4 + 6 +3 + 2 + 5 + 4 + 3+ 9) + 2 + 1 + 25 стотысячных = 71 стотысячных,

что, в свою очередь, меньше 100 стотысячных, т. е. меньше 1 тысячной. Значит, тогда не нужно было бы увеличивать последнюю цифру на 1. В этом случае произведение было бы с недостатком.

Замечание. В применении правила сокращенного умножения мы не обращаем никакого внимания на те цифры множимого, которые стоят вправо от множителя, и на те цифры множителя, которые стоят влево от множимого; и те и другие мы можем совсем отбросить. Таким образом, во множимом и во множителе нужных цифр должно быть одно и то же число; нетрудно заранее определить, сколько цифр должно быть, чтобы произведение было с заданною точностью. Разъясним это на примере. Пусть требуется вычислить до $^1/_{100}$ произведение

$$1000\boldsymbol{\pi}\,(\sqrt{5}\;—\;1),$$

где $\boldsymbol{\pi}$ есть отношение окружности к диаметру, равное 3,1415926535... Обращая внимание на последнее умножение, рассуждаем так: искомое произведение должно быть вычислено до одной сотой; значит, цифра простых единиц множителя (т. е.$\sqrt{5}$ — 1) должна стоять под четвертым десятичным знаком множимого; с другой стороны, во множителе ($\sqrt{5}$ — 1) нет разрядов выше простых единиц; из этого заключаем, что больше 4 десятичных знаков во множимом, т. е. в 1000$\boldsymbol{\pi}$, бесполезно вычислять. Значит 1000$\boldsymbol{\pi}$ надо взять равным 3141,5926; следовательно, и во множителе, т. е. в $\sqrt{5}$ — 1, надо вычислить 8 цифр. Извлечением находим, что $\sqrt{5}$ =2,2360679 и, следовательно, $\sqrt{5}$ —1 = 1,2360679. Действие выполняется так:

197. Погрешность приближенного частного. Если делимое приближенное число, а делитель, точное число, то ***погрешность, частного равна частному от деления погрешности приближенного делимого на точный делитель***, причем приближенное частное будет с недостатком или с избытком, смотря по тому, с недостатком или с избытком взято приближенное делимое.

Для примера вычислим частное:

$$0{,}538207\ldots : {}^3/_7 = \frac{0{,}538207\ldots \times 7}{3}$$

Ограничиваясь в делимом тремя десятичными знаками, произведем умножение:

$$0{,}538 \cdot 7 = 3{,}766.$$

Мы получили произведение с недостатком с точностью до $^1/_2$.• 7 = 3 • $^1/_2$ тысячной, и потому частное 3,766 : 3 = 1,25533... будет тоже с недостатком, причем погрешность должна быть менее $3^1/_2$: 3 = $1^1/_2$ тысячной. Если в полученном частном отбросим цифры, следующие за цифрой сотых, т. е. возьмем только 1,25, то еще уменьшим частное на число, меньшее 6 тысячных; значит, погрешность числа 1,25 будет меньше 6 +$1^1/_6$ = $7^1/_6$ тысячной, что меньше 10 тысячных, т. е. меньше 1 сотой.

198. Сокращенное деление. Когда делитель приближенное число, а делимое точное или тоже приближенное, тогда затруднительно определить предел погрешности частного. В этом случае лучше всего пользоваться сокращенным приемом деления, который позволяет сравнительно быстро найти частное с заданною наперед точностью.

Чтобы уяснить этот сокращенный прием, мы предварительно докажем следующую вспомогательную истину: ***если делитель есть целое число с дробью и мы откинем в нем эту дробь, то частное увеличится на число, меньшее этого частного, деленного на целую часть делителя.***

Пусть делимое будет A, делитель B и дробная часть делителя α. Тогда целая часть делителя равна $B— \alpha$ и точное частное = $^A/_B$, приближенное частное = $^A/_{B—\alpha}$ увеличение частного =

$$= \frac{A}{B-\alpha} - \frac{A}{B} = \frac{AB - AB + A\alpha}{(B-\alpha)B} = \frac{A\alpha}{(B-\alpha)B} = \frac{A\alpha}{B} : (B-\alpha)$$

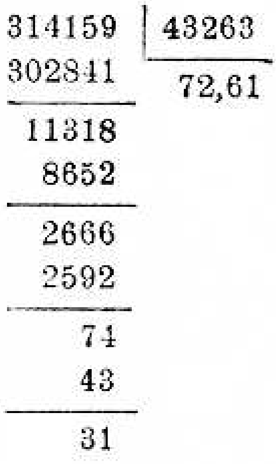
Так как $\alpha < 1$, то $A\alpha < A$; поэтому увеличение частного < $^A/_B : (B — \alpha)$, т. е. оно менее частного, деленного на целую часть делителя. Положим теперь, что требуется найти с точностью до 0,01 частное:

31 415,92653... : 432,639...

Мы сначала укажем, как производится сокращенное деление, а потом объясним, почему.

Узнаем, сколько цифр должно быть в приближенном частном. Так как делимое больше делителя, умноженного на 10, но меньше делителя, умноженного на 100, то в целой части частного должно быть 2 цифры. Так как частное должно быть вычислено до сотых долей, то всех цифр в приближенном частном должно быть 4.

Возьмем теперь эту цифру 4 и припишем к ней столько нулей, сколько единиц означает она; получим 40 000 7). Теперь отделим в делителе слева (не обращая внимания на запятую) столько цифр, чтобы образовалось число, большее (или равное) 40 000; тогда делитель сделается 43 263. Остальные цифры делителя отбрасываем. В делимом возьмем слева столько цифр (не обращая внимания на запятую), чтобы в образованном ими числе укороченный делитель мог содержаться (не более 9 раз); тогда делимое будет 314 159. Остальные цифры делимого отбрасываем.



$$\begin{array}{r|l} 314159 & 43263 \\ \underline{302841} & 72{,}61 \\ 11318 & \\ \underline{8652} & \\ 2666 & \\ \underline{2592} & \\ 74 & \\ \underline{43} & \\ 31 & \end{array}$$

Разделив это делимое на делитель, находим первую цифру частного 7 и первый остаток 11 318. После этого зачеркиваем в делителе одну правую цифру 3 и делим остаток 11318 на оставшиеся цифры делителя 4326. Получаем вторую цифру частного 2 и второй остаток 2666. Зачеркиваем в делителе еще одну цифру справа, т. е. 6, и делим второй остаток на 432. Получаем третью цифру частного 6 и третий остаток 74. Продолжаем так действие далее (зачеркивая в делителе при каждом частном делении по одной цифре справа), пока не получим всех цифр частного. Наконец, в полученном частном ставим запятую так, чтобы последняя цифра справа выражала единицы требуемого разряда (в нашем примере сотые доли).

Теперь объясним этот процесс сокращенного деления. Прежде всего приведем вопрос к нахождению частного не с точностью до 0,01, как требуется, а с точностью до целой единицы, причем делитель был бы число, не меньшее 40 000 (т. е. того числа, у которого первая цифра и число нулей равны числу цифр в частном). Для этого достаточно: 1) увеличить делимое в 100 раз, от чего увеличится во столько же раз частное и, следовательно, погрешность его; 2) перенести в делимом и в делителе запятую вправо на одно и то же число цифр (от чего частное не изменится), именно на столько, чтобы делитель сделался не меньшим 40 000. Теперь вопрос приводится к нахождению с точностью до единицы частного:

314 159 265,3... : 43 203,9...

Отбросим в делителе дробную часть; от этого, по доказанному выше, мы увеличим частное на число, меньшее этого частного, деленного на целую часть делителя. Но частное, содержа в целой части 4 цифры, менее 10 000, а целая часть делителя взята нами больше 40 000; значит, мы увеличим частное на число, меньшее 10 000 : 40 000, т. е. меньшее $^{1}/_{4}$. Запомнив это, будем находить частное:

314 159 265,3. . . : 43 263.

Чтобы найти первую цифру частного, т. е. тысячи, мы должны разделить число тысяч делимого (314159) на делитель. Это мы и сделали в нашем сокращенном делении, получив цифру 7. Остаток от точного делимого будет 11 318 265,3... Этот остаток надо разделить на 43 263. Разделив оба эти числа на 10, мы приводим вопрос к делению 1131826,53... на 4326,3. Это частное имеет в целой части только 3 цифры; значит, оно меньше 1000. Отбросив в делителе дробь, мы еще увеличим частное на число, меньшее 1000 : 4000, т. е. меньше, чем на $^{1}/_{4}$; Запомнив это, будем находить частное 1 131 826,53... : 4326. Чтобы найти первую цифру этого частного, т. е. сотни, надо число сотен делимого (11 318) разделить на делитель (4320). Это мы и сделали в нашем сокращенном делении, получив в частном вторую цифру 2.

Продолжая эти рассуждения далее, увидим, что при получения каждой цифры частного мы его увеличиваем менее, чем на $^{1}/_{4}$.

Так как всех цифр в частном 4, то в результате мы увеличим частное менее чем на 1. С другой стороны, не деля остатка 31... на последний делитель 43, мы уменьшаем частное менее, чем на 1. Значит, мы увеличили его менее, чем на 1, и уменьшили менее, чем на 1; следовательно, результат, во всяком случае, точен до 1.

Остается теперь поставить запятую на надлежащем месте, получим 72,61 с точностью до 0,01.

199. Замечание. Приведенное правило и его объяснение не требуют никакого изменения в том частном случае, когда какое-нибудь делимое содержит соответствующий делитель 10 раз. Тогда ставим в частном число 10 (в скобках). Продолжая деление, увидим, что все следующие цифры частного должны быть нули. Пусть, напр., требуется найти частное

485 172,923...: 78,254342...

с точностью до 1. Применяя правило, найдем.

```
485 172 | 78254
469 524 |  61(10)0
-------    6200
 15 648
  7 825
-------
  7 823
  7 820
-------
      3
```

Третье делимое (7823) содержит соответствующий делитель (782) десять раз; пишем в частном число 10. Следующая цифра в частном оказалась 0. Искомое частное есть число 61(10)0, т. е. 6200.

В этом случае приближенное частное больше точного частного. Действительно, цифры частного, найденные раньше, чем представился этот случай, не могут быть меньше, чем бы следовало, так как мы при каждом частном делении брали делители, которые меньше точного делителя. Значит, первые две цифры точного частного должны выражать число, не большее 01, поэтому оно меньше числа 6200.

Примером применения предыдущих правил может служить следующая задача.

200. Задача. Вычислить с точностью до $^1/_{100}$ выражение:

$$x=\frac{\sqrt{348}-\sqrt{127}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{12}}$$

Это выражение есть частное; поэтому, прежде всего, определим, сколько должно быть цифр в этом частном, а для этого надо знать высший разряд его.
Начав извлечение $\sqrt{348}$ и $\sqrt{127}$, мы увидим, что первый корень в целой своей части содержит 18, а второй 11; следовательно, числитель равен приблизительно 7, знаменатель равен приблизительно 2. Значит, высший разряд в частном — простые единицы. Так как частное требуется вычислить до сотых долей, то в нем должно быть 3 цифры. Поэтому знаменатель мы должны вычислить настолько точно, чтобы из него можно было (по правилу сокращенного деления) образовать число, большее 3000, для чего достаточно вычислить его 5 цифр, а для этого необходимо (по правилу сокращенного сложения) найти отдельные корни знаменателя с 6 цифрами. Произведя извлечение, найдем:

$\sqrt{2}=1{,}41421$; $\sqrt{3}=1{,}73205$; $\sqrt{5}=2{,}23606$; $\sqrt{12}=3{,}46410$ и затем:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{12}=1{,}9183 \text{ (до } ^1/_{10000}\text{)}.$$

Теперь надо вычислить числитель с такой точностью, чтобы из первых его цифр можно было образовать число, большее 19183. Так как числитель равен приблизительно 7, то сверх целого числа в нем потребуется вычислить еще 4 десятичных знака, а так как числитель есть разность, то уменьшаемое и вычитаемое надо вычислить также до четвертого десятичного знака. Извлечением находим:

$$\sqrt{348}=18{,}6547;\ \sqrt{127}=11{,}2694;\ \sqrt{348}-\sqrt{127}=7{,}3853.$$

Остается разделить по правилу сокращенного деления 73 853 п.1 19 183, после чего получим:

$$x=3{,}85 \text{ (до } ^1/_{100}\text{)}$$

Глава четвертая.

Преобразование иррациональных выражений.

201. Рациональные и иррациональные алгебраические выражения.
Алгебраическое выражение называется рациональным относительно какой-нибудь буквы, входящей в это выражение, если эта буква не стоит под знаком радикала; в противном случае выражение называется иррациональным относительно этой буквы. Напр., выражение $3a+2\sqrt{x}$ есть рациональное относительно a и иррациональное относительно x.

Если говорят: „рациональное (или иррациональное) алгебраическое выражение", не добавляя относительно каких букв, то предполагается, что оно рационально (или иррационально) относительно всех букв, входящих в выражение.

202. Основное свойство радикала. Заметим, что корни (радикалы), о которых мы будем говорить в этой главе, разумеются только арифметические. Возьмем какой-нибудь радикал, напр. $\sqrt[3]{a}$, и возвысим подкоренное число в какую-нибудь степень, напр, в квадрат; вместе с тем умножим показатель радикала на показатель той степени, в какую мы возвысили подкоренное число, т. е. в нашем случае умножим на 2. Тогда получим новый радикал: $\sqrt[6]{a^2}$. Докажем, что от этих двух операций величина радикала не изменилась.

Предположим, что мы вычислили $\sqrt[3]{a}$ и получили некоторое число x. Тогда мы можем написать равенства:

$$x = \sqrt[3]{a} \quad \text{и} \quad x^3 = a.$$

Возвысив обе части последнего равенства в квадрат, получим:

$$(x^3)^2 = a^2\text{ , т. е. } x^6 = a^2.$$

Из последнего равенства видно, что $x = \sqrt[6]{a^2}$.

Таким образом, одно и то же число x равно и $\sqrt[3]{a}$, и $\sqrt[6]{a^2}$ следовательно:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}.$$

Подобно этому можно убедиться, что:

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4} = \ldots$$
$$\sqrt[3]{m^2} = \sqrt[6]{m^4} = \sqrt[9]{m^6} = \sqrt[12]{m^8} = \ldots$$
$$\sqrt{1+x} = \sqrt[4]{(1+x)^2} = \sqrt[6]{(1+x)^3} = \ldots$$

Вообще, ***величина радикала не изменится, если подкоренное выражение возвысим в какую-нибудь степень и вместе с тем показатель радикала умножим на показатель той степени, в которую возвысили подкоренное выражение.***

203. Некоторые преобразования радикалов.

а) ***Радикалы разных степеней можно привести к одинаковым показателям*** (подобно тому, как дроби с разными знаменателями, можно привести к одному знаменателю). Для этого достаточно найти общее кратное (лучше всего наименьшее) показателей всех радикалов и умножить показатель каждого из них на соответствующий дополнительный множитель, возвысив, вместе с тем, каждое подкоренное выражение в надлежащую степень.

Пример.

$$\sqrt{ax} \quad ; \quad \sqrt[3]{a^2} \quad ; \quad \sqrt[6]{x}$$

Наименьшее кратное показателей радикалов есть 6; дополнительные множители будут: для первого радикала 3, для второго 2 и для третьего 1. Тогда

$$\sqrt{ax} = \sqrt[6]{(ax)^3} = \sqrt[6]{a^3x^3}; \quad \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{(a^2)^2} = \sqrt[6]{a^4}, \quad \sqrt[6]{x}.$$

б) ***Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно сократить обоих показателей.***

Примеры.

$$1)\ \sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x};\quad 2)\ \sqrt[6]{(1+x)^3}=\sqrt{1+x}.$$

в) Если ***подкоренное выражение есть произведение нескольких степеней, показатели которых имеют один и тот же общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно сократить все показатели.***

Пример.

$$\sqrt[6]{8a^6x^3}=\sqrt[6]{(2a^2x)^3}=\sqrt{2a^2x}.$$

204. Подобные радикалы. Подобными радикалами называются такие, у которых одинаковы подкоренные выражения и одинаковы показатели радикалов. Таковы, напр., выражения:

$$+3a\sqrt[3]{xy} \quad \text{и} \quad -5b\sqrt[3]{xy}$$

чтобы определить, подобны ли между собою данные радикалы, следует предварительно упростить их, т. е если возможно:

1) вынести из-под знака радикала тех множителей, из которых можно извлечь корень (отдел 6 глава 6 § 169, а);

2) освободится под радикалами от знаменателей дробей (отдел 6 глава 6 § 169, в);

3) понизить степень радикала, сократив показатели радикала и подкоренного числа на их общий множитель, если такой есть.

Примеры.

1) Радикалы $\sqrt[3]{8ax^3}$ и $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ окажутся подобными, если упростим их:

$$\sqrt[3]{8ax^3}=2x\sqrt[3]{a}\ ;\quad \sqrt[6]{64a^2y^{12}}=2y^2\sqrt[6]{a^2}=2y^2\sqrt[3]{a}$$

2) Три радикала $\sqrt{\frac{2x}{3}},\ \sqrt{\frac{6}{x}},\ \sqrt{6x}$ окажутся подобными, если освободимся под радикалами от знаменателей:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}}=\sqrt{\frac{2x\cdot3}{3\cdot3}}=\sqrt{\frac{6x}{3^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6x};$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}}=\sqrt{\frac{6x}{x^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

205. Действия над иррациональными одночленами.

а) Сложение и вычитание. Чтобы сложить или вычесть иррациональные одночлены, соединяют их знаками плюс или минус и делают приведений подобных членов, если они окажутся.

Примеры.

$$1)\ \frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=$$
$$=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=4x\sqrt{x}$$
$$2)\ 15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=$$
$$=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}.$$

б) Умножение. Мы видели прежде (отдел 6 глава 6 § 168), что для извлечения корня из произведения достаточно извлечь его из каждого сомножителя отдельно; значит, наоборот, ***чтобы перемножить несколько радикалов одинаковой степени, достаточно перемножить подкоренные числа.*** Так:

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c} = \sqrt{abc}\,; \quad \sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{xy}$$

Если для перемножения даны радикалы с различными показателями, то их можно предварительно привести к одному показателю.

Если перед радикалами имеются коэффициенты, то их перемножают.

Примеры.

$$1)\quad a\sqrt{2x}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{3\,ax}=\frac{a^2}{b}\sqrt{6x^2}=\frac{a^2x}{b}\sqrt{6}.$$
$$2)\quad \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=$$
$$=\sqrt[6]{3^3\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{3^2\,.\,2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{8}}\,.$$

в) Деление. Мы знаем, что для извлечения корня из дрбби достаточно извлечь его из числителя и знаменателя отдельно (отдел 6 глава 6 § 168, в); значит, и наоборот:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}; \qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\text{, и т. д.,}$$

т. е., ***чтобы разделить радикалы с одинаковыми показателями, достаточно разделить их подкоренные числа.***

Радикалы с различными показателями можно привести предварительно к одинаковым показателям.

Если есть коэффициенты, то их делят.

Примеры.

$$1)\quad -6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}} : \frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}} = -\frac{6\cdot 5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}} = -15\sqrt{b}.$$

$$2)\quad \frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-x}} : \frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a}{a-x}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{\frac{a^4}{(a-x)^2}} : \sqrt[6]{\frac{8a^3}{(a-x)^3}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{a(a-x)}{8}}.$$

г) Возвышение в степень. ***Чтобы возвысить радикал в степень, достаточно возвысить в эту степень подкоренное число.***

Так.

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}; \qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x}\ldots = \sqrt[n]{x^m}.$$

Примеры.

$$1)\quad \left(\sqrt[4]{2ab^3x^2}\right)^3 = \sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3} = \sqrt[4]{8a^3b^9x^6} = b^2x\sqrt[4]{8a^3bx^2}.$$

$$2)\quad \left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3 = \sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3} = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}.$$

д) Извлечение корня. ***Чтобы извлечь корень из радикала, достаточно перемножить их показателей.***

Так:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}.$$

Чтобы убедиться в этом, положим, что $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = x$. Возвысив обе части этого равенства сначала в квадрат, а потом в куб, найдем:

$$\sqrt[3]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}; \qquad \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{3}} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{6}}$$

Отсюда видно, что $x = \sqrt[6]{a}$, и, следовательно, $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}.$

Пример.

$$\sqrt{2x\sqrt[3]{x^2}}.$$

Подведя сомножитель ***2x*** под знак радикала 3-й степени, получим:

$$\sqrt{\sqrt[3]{(2x)^3x^2}} = \sqrt[6]{8x^5}$$

206 Действия над иррациональными многочленами производятся по тем же правилам, какие были выведены для многочленов рациональных. Напр.:

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{0,3}\right)^2=\frac{4}{5}-4\sqrt{1,5}+7,5=8,3-4\sqrt{1,5}.$$

207. Освобождение знаменателя дроби от радикалов. При вычислении дробных выражений, знаменатели которых содержат радикалы, бывает полезно предварительно преобразовать дробь так, чтобы знаменатель ее не содержал радикалов. Пусть, напр., надо вычислить:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Мы можем производить вычисление или прямо по этой формуле, или же предварительно сделать ее знаменатель рациональным, для чего достаточно умножить оба члена данной дроби на сумму $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Формула (2) удобнее для вычисления, чем формула (1), во-первых, потому, что она содержит в себе всего 3 действия, а не 4, как формула (1), а, во-вторых, и потому, что при вычислении, которое по необходимости может быть только приближенное, погрешность результата сравнительно просто определяется по формуле (2). Так, найдя $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ с точностью до половины тысячной доли, получим:

$$\boldsymbol{x} = 1,732 + 1,414 = 3,146.$$

Результат этот точен до $^1/_2$ + $^1/_2$ тысячной, т. е. до $^1/_{1000}$.

Приведем некоторые простейшие примеры освобождения знаменателей от квадратных радикалов.

1) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. Умножим оба члена дроби на $\sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2\cdot5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}=0,3\sqrt{5}$$

Если под знаком радикала стоит целое составное число, то иногда бывает полезно разложить его на простые сомножители с целью определить, каких множителей недостает в нем для того, чтобы оно было полным квадратом. Тогда достаточно умножить оба члена дроби на квадратный корень из произведения только недостающих сомножителей. Напр.:

$$\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3}{\sqrt{2\cdot2\cdot2\cdot5}}=\frac{3\cdot\sqrt{2\cdot5}}{\sqrt{2^3\cdot5}\cdot\sqrt{2\cdot5}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2^4\cdot5^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2^2\cdot5}=\frac{3}{20}\sqrt{10}.$$

2) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$. Умножим оба члена дроби на разность $3-\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{6-2\sqrt{5}}{3^2-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

3) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$. Умножим оба члена дроби на сумму $3+\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{6+2\sqrt{5}}{3^2-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

4) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Умножим оба члена дроби на $\sqrt{3}-\sqrt{2}$:

$$\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{3-2}=5\sqrt{3}-5\sqrt{2}.$$

5) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{3-2}=$
$=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}.$

6) $\frac{4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. Умножим оба члена дроби на разность $2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$:

$$\frac{4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{8\sqrt{2}+8-4\sqrt{12}}{4+4\sqrt{2}+2-6}=$$
$$=\frac{8\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Умножив затем оба члена дроби на √2 , получим:

$$\frac{16+8\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{8}=2+\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

1) Действительно, в случае соизмеримости, мы всегда могли бы получить точный результат измерения в виде обыкновенной дроби. Обратив эту обыкновенную дробь в десятичную, мы выразили бы результат измерения в виде десятичной дроби. Но обыкновенная дробь, обращаясь в бесконечную десятичную, дает всегда периодическую дробь. В случае же несоизмеримости измеряемого отрезка, бесконечная десятичная дробь не может оказаться периодическою, так как, если бы она была такою, то ее можно было бы обратить в обыкновенную, и тогда эта обыкновенная дробь была бы точным результатом намерения, а такого результата не может быть в случае несоизмеримости. Значит, в этом случае бесконечная десятичная дробь должна быть непериодической.

2) Латинское слово ratio означает отношение. Рациональные числа те, которых отношение к 1 выражается точно, иррациональные те, которых отношение к 1 не может быть выражено точно.

3) Два равных рациональных числа могут иногда выражаться неодинаковыми цифрами, именно тогда, когда одно из них есть периодическая дробь с периодом 9.Так, 0,999... = 1, или 2,3999... = 2,4.

4) В математике иногда употребляются буквы греческого алфавита, чаще всего следующие: α (альфа), β (бэта), γ (гамма), δ (дэльта),ε (эпсилон), θ (тэта), π (пи) ρ (ро), φ (фи), ω (омега).

5) Корни любых степеней весьма просто вычисляются, как мы увидим позже, посредством логарифмов.

6) Если эта сумма не превосходит 10, то достаточно написать цифру простых единиц множителя под тою цифрою множимого, которая выражает единицы, в 10 раз меньшие единицы данного разряда, и в полученном произведении отбросить одну цифру справа.

7) Если бы в частном было 3 цифры, мы к цифре 3 приписали бы 3 нуля (получили бы 3000), если бы в частном было 2 цифры, мы приписали бы к цифре 2 два нуля (подучили бы 200); и т. п.

АЛГЕБРА   В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ДЕВЯТЫЙ.

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ СТЕПЕНИ ВЫШЕ ПЕРВОЙ.

Глава первая. **Квадратное уравнение.**
Глава вторая. **Трехчлен 2-й степени и его графическое изображение.**
Глава третья. **Биквадратное уравнение и некоторые другие.**
Глава четвертая. **Иррациональные уравнения.**
Глава пятая. **Системы уравнений второй степени.**

Глава первая.

Квадратное уравнение.

208. Задача. Моторная лодка спустилась по течению реки на расстояние 28 км и тотчас же вернулась назад; на это ей потребовалось 7 часов. Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 км в час.

Пусть скорость движения лодки в стоячей воде будет x км в час; тогда по течению реки она двигалась со скоростью $(x + 3)$ км в час, а против течения со скоростью $(x - 3)$ км в час.

Следовательно, 28 км лодка прошла в $^{28}/_{(x + 3)}$ часов, когда двигалась по течению, и в $^{28}/_{(x - 3)}$ часов, когда возвращалась назад.

Согласно условию задачи мы имеем уравнение:

$$\frac{28}{x+3}+\frac{28}{x-3}=7.$$

Освободив от знаменателей, получим:

$$28\,(x - 3) + 28\,(x + 3) = 7\,(x + 3)\,(x - 3),$$ т. е.

$$28x - 84 + 28x + 84 = 7\,(x^2 - 9) = 7x^2 - 63,$$ или

$$56x = 7x^2 - 63.$$

Мы получили уравнение, в котором есть член, содержащий неизвестное во второй степени, но нет членов, содержащих неизвестное в более высоких степенях. Такое уравнение называется уравнением второй степени, или квадратным.

Как можно решать такие уравнения, мы увидим в этой главе.

209. Нормальный вид квадратного уравнения. В квадратном уравнении (а также и в уравнениях более высоких степеней) принято, после упрощения уравнения, переносить все его члены в одну левую часть, так что правая часть уравнения делается равной нулю. Так, уравнение, составленное нами для решения предыдущей задачи, после указанного перенесения членов будет:

$$56x — 7x^2 + 63 = 0,$$

или после расположения членов по убывающим степеням буквы ***x***:

$$— 7x^2 + 56x + 63 = 0$$

Числа **—7, +56** и +**63** называются коэффициентами этого квадратного уравнения; из них число +**63** называется свободным членом, а числа —7 и +56 первым и вторым коэффициентами (мы предполагаем, что члены уравнения всегда расположены по убывающим степеням буквы ***x***). Числа эти могут быть и положительные, и отрицательные, и даже нули (кроме первого коэффициента, который не может быть нулем, так как в противном случае уравнение не было бы квадратным). Если ни один из трех коэффициентов не равен нулю, то уравнение называется полным. Общий вид такого уравнения (нормальный вид) есть следующий:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Заметим, что первый коэффициент ***a*** мы можем всегда сделать положительным, переменив в случае надобности перед всеми членами знаки на противоположные (другими словами, умножив обе части уравнения на —1). Так, приведенное выше уравнение мы можем написать так.

$$7x^2 — 56x — 63 = 0$$

210. Решение неполных квадратных уравнений. Квадратное уравнение называется неполным, когда в нем нет члена, содержащего ***x*** в первой степени, или нет свободного члена; другими словами, когда второй коэффициент ***b*** равен нулю, или когда свободный член ***c*** равен 0. В первом случае уравнение имеет вид $ax^2+ c = 0$, во втором $ax^2 + bx = 0$ (может даже случиться, что одновременно и $b = 0$ и $c = 0$; тогда уравнение будет вида $ax^2 = 0$). Рассмотрим решение всех этих неполных уравнений.

I. Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$.

Возьмем три следующих примера:

а) $3x^2 — 27 = 0$. Перенеся свободный член направо, получим: $3x^2 = 27$, и, следовательно, $x^2 = {}^{27}/_3 = 9$. Значит, ***x*** есть квадратный корень из **9**, т. е. число + 3 или число —3. Условимся знаком $\sqrt{}$ обозначать арифметическое значение корня; тогда мы можем написать: $x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$. Таким образом, данное уравнение имеет два решения. Обозначая одно из них x_1 а другое x_2, мы можем эти решения написать так:

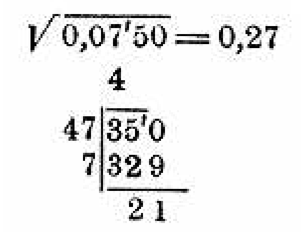
$$x_1 = + \sqrt{9} = + 3; \qquad x_2 = — \sqrt{9} = — 3.$$

б) $2x^2 — 0,15 = 0$. Перенеся свободный член, получим:

$$2x^2 = 0,15 \quad \text{и} \quad x^2 = 0,075.$$

Значит: $x = \pm\sqrt{0,075}$.

Найдем $\sqrt{0,075}$ с точностью, положим, до ${}^1/_{100}$ (отдел7 глава 1 § 171):



```
√0,07'50 = 0,27
    4
 47|35'0
  7|329
    21
```

Следовательно, x_1 = **0,27...**, x_2 = — **0,27**...

в) $2x^2 + 50 = 0$. Перенеся 50 направо, получим:

$$2x^2 = —50; \quad x^2 = —50/2 = —25; \quad x = \pm\sqrt{—25}$$

Так как из отрицательного числа нельзя извлечь квадратного корня, то данное уравнение не имеет решений (вещественных).

Таким образом, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ вообще решается так:

$$ax^2 = —c; \quad x^2 = —c/a, \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Если выражение — c/a есть число положительное, то из него можно извлечь квадратный корень (точно или приближенно), и тогда для x получаем два значения с одинаковою абсолютною, величиною, но одно положительное, другое отрицательное. Если же выражение — c/a есть число отрицательное, то уравнение не имеет вещественных корней.

II. Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$.

Как частный пример возьмем уравнение $2x^2 — 7x = 0$. В левой части этого уравнения вынесем x множителем за скобки:

$$x(2x — 7) = 0.$$

Теперь левая часть уравнения есть произведение, а правая равна нулю. Но произведение равняется нулю только тогда, когда какой-нибудь из сомножителей равен нулю; поэтому наше уравнение удовлетворяется только тогда, когда первый сомножитель x равен нулю или когда второй сомножитель $2x — 7$ равен нулю (и когда, следовательно, $x = 7/2$) Значит, данное уравнение имеет два решения:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 7/2 = 3\,1/2$$

Таким образом, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решается вообще так.

$$ax^2 + bx = 0; \quad x (ax + b) = 0;$$

$$x_1 = 0 ; \quad ax_2 + b = 0 ; \quad x_2 = — b/a$$

211. Двучлен второй степени. Если в неполных квадратных уравнениях возьмем левую часть независимо от правой, то получим выражение:

$$ax^2 + c \quad \text{или} \quad ax^2 + bx$$

Выражения эти называются двучленами второй степени относительно x. В них буква x означает переменное , число, могущее принимать какие угодно значения, а буквы a, b и c означают какие-нибудь постоянные числа, как положительные, так и отрицательные; таковы, например, выражения: **$3x^2$— 27**, **$2x^2$— 0,15**, **$2x^2 + 50$**, **x^2 — 8x**, **$2x^2$ — 7x**,... и т.п. Конечно, численная величина двучлена зависит от того значения, которое мы будем придавать переменному числу x ; напр., двучлен **$3x^2$— 27** при x = **0** будет — **27**, при x = **1** он будет —**24**, при x = **2** он окажется **3 • 2^2 — 27 = 12 — 27 = —15**, при x = **5** получим **3 • 5^2 — 27 = 75 — 27 = 48**... и т. п. Таким образом, двучлен 2-й степени от x представляет собою некоторую функцию от x;

Заметим, что между двучленом 2-й степени и левою частью неполного квадратного уравнения та существенная разница, что буква x в уравнении означает только то число, при котором двучлен, стоящий в левой части уравнения, равен нулю, тогда как в двучлене, взятом независимо от уравнения, буква x означает всякие числа, и, следовательно, двучлен может получать разнообразные значения.

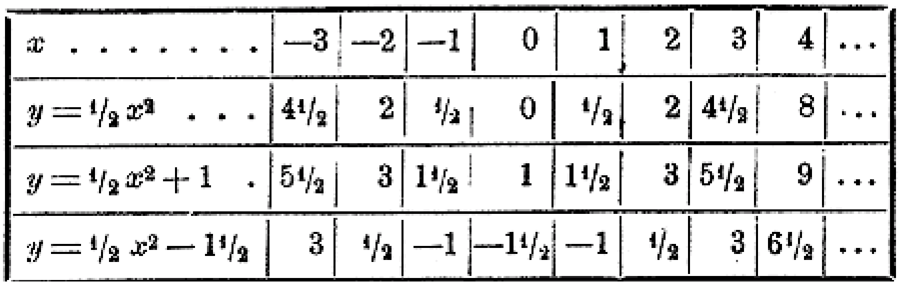
То число, которое, будучи подставлено в двучлен на место x, обращает этот двучлен в нуль, называется корнем двучлена; значит, корень двучлена есть в то же время и корень того неполного квадратного уравнения, которое получится, если этот двучлен приравняем нулю.

212. График двучлена второй степени. Чтобы наглядно представить себе, как изменяется двучлен 2-й степени при изменении переменного числа x, мы построим его график так же, как прежде мы строили график двучлена 1-й степени (отдел 3 глава 3 § 115), или график функции $y = ax^2$ (т. е. график одночлена 2-й степени, отдел 6 глава 3 § 159).

Рассмотрим совместно следующие три функции:

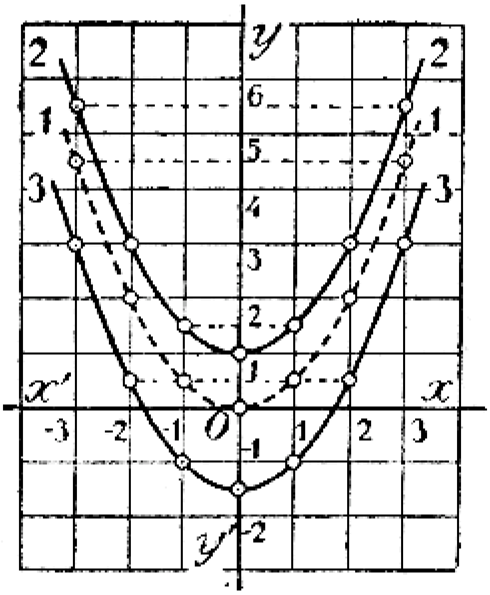
1) $y = {}^1/_2\, x^2$; **2)** $y = {}^1/_2\, x^2 + 1$; **3)** $y = {}^1/_2\, x^2 — 1{}^1/_2$;

Составим таблицу их частных значений, напр., такую:



x	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	...
$y = {}^1/_2 x^2$ . . .	$4^1/_2$	2	$^1/_2$	0	$^1/_2$	2	$4^1/_2$	8	...
$y = {}^1/_2 x^2 + 1$.	$5^1/_2$	3	$1^1/_2$	1	$1^1/_2$	3	$5^1/_2$	9	...
$y = {}^1/_2 x^2 — 1^1/_2$	3	$^1/_2$	—1	$—1^1/_2$	—1	$^1/_2$	3	$6^1/_2$	...

Теперь, при помощи координатных осей и произвольной единицы длины, нанесем все эти значения на чертеж в виде точек и через полученные точки проведем кривые линии.



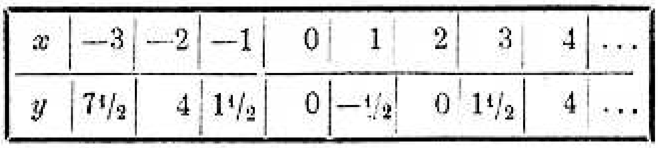
Черт. 1

Первая из этих линий (прерывистая линия) есть парабола, которую мы чертили раньше (отдел 6 глава 3 § 158); она проходит через начали координат. Кривые 2-я и 3-я через точку ***O*** не проходят. Сравнивая все три кривые между собою, замечаем, что при одной и той же абсциссе ***x*** ордината 2-й кривой больше на **1**, а ордината 3-й кривой меньше на $\mathbf{1^{1}/_{2}}$ единицы, сравнительно о ординатой параболы 1-й. Поэтому можно сказать, что 2-я кривая есть та же парабола 1-я, только перемещенная параллельным перенесением1) на одну единицу вверх, а 3-я кривая есть парабола 1-я, перемещенная параллельным перенесением на $\mathbf{1^{1}/_{2}}$ единицы вниз. Вообще кривая, выражающая функцию $y = ax^2 + c$, есть парабола $y = ax^2$ перемещенная параллельным перенесением на ***c*** единиц вверх, если ***c*** >0, и вниз, если ***c*** < 0. Ветви этой параболы направлены вверх, когда коэффициент при ***x*** есть число положительное (как в наших примерах), и вниз, когда этот коэффициент есть число отрицательное. В первом случае функция имеет наименьшее значение, во втором случае — наибольшее; и то и другое имеет место при $x = 0$ и равно свободному числу ***c***.

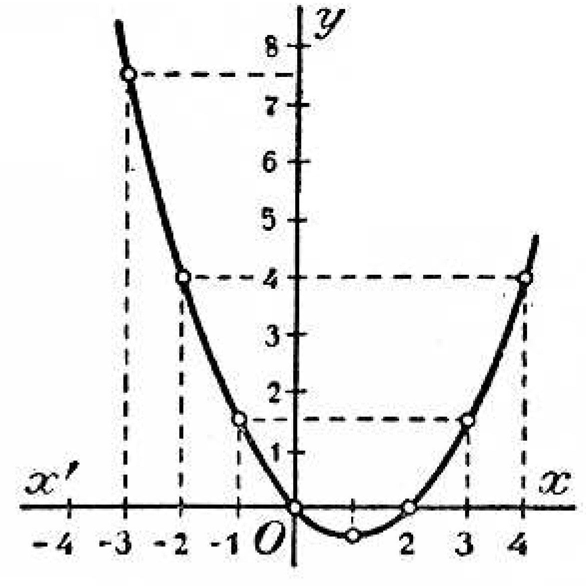
Изобразим еще график двучлена

$$y = {}^{1}/_{2}\,x^2 — x$$

составляющего частный случай двучлена вида $y = ax^2 + bx$.



x	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	…
y	$7^1/_2$	4	$1^1/_2$	0	$—^1/_2$	0	$1^1/_2$	4	…



Черт.2

Особенность этой кривой состоит в том, что она проходит через точку (0,0), т. е. через начало координат.

213. Корни неполных квадратных уравнений в графическом изображении. Из трех парабол, изображенных нами на черт. 1, одна (3-я) пересекается с осью x-ов в двух точках. Так как в этих точках ординаты равны нулю, и они выражают значения данного двучлена, то, значит, абсциссы точек пересечения будут корни уравнения $^1/_2\,x^2$ — $1^1/_2$ = **0**. На нашем чертеже мы можем только усмотреть, что эти корни одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку, и что абсолютная величина каждого корня превосходит $1^1/_2$, единицы. Если бы мы исполнили чертеж возможно точнее (напр, на миллиметровой бумаге, взяв за единицу длины сантиметр), то на чертеже мы могли бы точнее найти величину корней (приблизительно они равны ±. 1,7). Парабола 2-я не пересекается с осьюx-ов. Значит, уравнение $^1/_2\,x^2 + 1 = 0$ не имеет корней.

Из черт.2 видно, что уравнение $^1/_2\,x^2$ — x = **0** имеет два корня, из которых один есть 0.

214. **Примеры решения полных квадратных уравнений.** Для первого примера возьмем то квадратное уравнение, которое было составлено для задачи § 208:

$$7x^2 — 56x — 63 = 0.$$

Разделим все его члены на 7 и перенесем свободный член направо:

$$x^2 — 8x = 9.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли к двучлену x^2 — $8x$ приложить такой третий член, чтобы образовался трехчлен, представляющий собою полный квадрат. Мы легко ответим на этот вопрос, если изобразим двучлен так:

$$x^2 — 2x \cdot 4.$$

Теперь ясно, что если этот двучлен дополним членом 4^2, то получим трехчлен

$$x^2 — 2x \cdot 4 + 4^2,$$

равный квадрату разности $x — 4$. Но если к левой части уравнения мы добавим число 4^2 (т. е. 16), то и к правой части должны добавить то же самое число. Сделав это, получим:

$$x^2 — 8x + 16 = 9 + 16 \text{, т. е. } (x — 4)^2 = 25.$$

Таким образом, разность $x — 4$ есть такое число, квадрат которого равен **25**; значит, эта разность должна равняться квадратному корню из **25**, т. е. числу **5** или числу **— 5**:

$$x — 4 = +\sqrt{25} = +5 \quad \text{или} \quad x — 4 = —\sqrt{25} = —5.$$

Перенеся теперь член **— 4** в правую часть, найдем два решения:

$$x_1 = 4 + 5 = 9 \quad \text{и} \quad x_2 = 4 — 5 = — 1.$$

Оба эти решения годны для данного уравнения (в чем можно убедиться поверкою), но для задачи, из которой выведено уравнение, отрицательное решение — 1 не годится, так как в задаче отыскивается абсолютная величина скорости, а не ее направление.

Для второго примера возьмем уравнение .

$$3x^2 + 15x — 7 = 0.$$

Разделим все члены на 3 и перенесем свободный член направо: „

$$x^2 + 5x = {}^7/_3$$

Из двучлена $x^2 + 5x$ можно сделать квадрат суммы, если добавим к нему третий член $({}^5/_2)^2$. Приложив этот член к обеим частям уравнения, получим:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{3},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{7}{3} = \frac{75 + 28}{12} = \frac{103}{12}.$$

Отсюда видно, что $x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{103}{12}}$ следовательно:

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{103}{12}}; \quad x_2 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{103}{12}}$$

Вычислим ${}^{103}/_{12}$ с точностью, положим, до ${}^1/_{10}$:

$$\sqrt{\frac{103}{12}} = \sqrt{8,58}\ .\ .\ . = 2,9\ .\ .\ .$$

Следовательно:

$$x_1 = — 2,5 + 2,9 ... = 0,4 \quad \text{и} \quad x_2 = — 2,5 — 2,9 .. . = — 5,4...$$

215. Формула корней приведенного квадратного уравнения.

Квадратное уравнение, у которого первый коэффициент есть +1, называется приведенным уравнением. К такому виду, как мы видели сейчас на примерах, уравнение может быть приведено и в том случае, когда первый коэффициент не 1; стоит только все члены уравнения разделить на этот коэффициент. В общем виде приведенное уравнение обыкновенно изображается так:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Решим это буквенное уравнение, проделав над ним те же преобразования, которые были указаны на частных примерах. Перенесем свободный член в правую часть:

$$x^2 + px = — q$$

Так как $px = 2x \bullet {}^p/_2$, то, желая обратить двучлен $x^2 + px$ в полный квадрат, прибавим к обеим частям уравнения по $({}^p/_2)^2$:

$$x^2 + px + ({}^p/_2)^2 = — q + ({}^p/_2)^2$$

Теперь уравнение можно представить так:

$$(x + {}^p/_2)^2 = ({}^p/_2)^2 — q$$

откуда находим:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Формулу эту можно высказать так: ***неизвестное приведенного квадратного уравнения равно половине второю коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этой половины без свободного члена.***

Формулу эту надо запомнить и в буквенном выражении и в словесном.

Примеры.

1) $x^2 — x — 6 = 0$. Чтобы уравнение это уподобить буквенному $x^2 + px + q = 0$, представим его так: $x^2 + (—1) x + (— 6) = 0$. Теперь видно, что в этом примере p =—**1** и q = — **6**; поэтому:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Поверка: $3^2 — 3 — 6 = 0$; $(—2)^2 — (—2) —6 = 0.$

2) $x^2 —18 x + 81 = 0$; здесь p= — **18**, q = + **81**; поэтому:

$$x = 9 \pm\sqrt{81 - 81} = 9 \pm 0 = 9.$$

Уравнение имеет только один корень.

3) $x^2 - 2x + 5 = 0$; $x = 1 \pm\sqrt{1 - 5} = 1 \pm\sqrt{-4}$. Корни мнимые.

Из этих примеров мы видим, что

если $({}^{p}/_{2})^2 - q > 0$, то уравнение имеет 2 различных решения;

если $({}^{p}/_{2})^2 - q = 0$, то урав-нение имеет одно решение; наконец,

если $({}^{p}/_{2})^2 - q < 0$, то уравнение не имеет вовсе решений (вещественных).

216. Общая формула корней квадратного уравнения. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ по разделении его членов на a приводится к приведенному уравнению:

$$x^2 + {}^{b}/_{a}\,x + {}^{c}/_{a} = 0$$

Решив это уравнение по формуле приведенного уравнения, найдем:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\,.$$

Выражение это можно упростить так:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

В этом упрощенном виде формулу полезно запомнить, ее можно высказать так: ***неизвестное полного квадратного уравнения равно дроби, у которой числитель есть второй коэффициент, взятый с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента на свободный член, а знаменатель есть удвоенный первый коэффициент***2).

Эту формулу можно назвать общею, так как она годится и для приведенного уравнения (если положим $a = 1$) и для неполных квадратных уравнений (если положим $b = 0$ или $c = 0$).

Из общей формулы видно, что

если $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет 2 различных решения;

если $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет одно решение, именно $-{}^{b}/_{2a}$;

если же $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет ни одного решения (оба решения мнимые).

Так, уравнение $3x^2 + 5x - 6 = 0$ имеет 2 решения, так как
$b^2 - 4ac = 5^2 - 4\cdot 3(-6) = 25 + 72 > 0$;

уравнение $9x^2 - 6x + 1 = 0$ имеет одно решение, так как
$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$;

уравнение $3x^2 - 5x + 6 = 0$ не имеет решений (вещественных), так как
$b^2 - 4ac = -5^2 - 4\cdot 3\cdot 6 = 25 - 72 < 0$.

217. Упрощение формулы, когда *b* четное число. Общая формула упрощается, если ***b*** четное число. Так, положив ***b* = 2*k***, найдем:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$
$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Эта формула отличается от общей отсутствием цифровых множителей 4 и 2.

218. Число корней квадратного уравнения. Мы видели, что квадратное уравнение имеет иногда два корня, иногда один, иногда ни одного (случай мнимых корней). Однако согласились приписывать квадратным уравнениям во всех случаях два корня, разумея при этом, что корни могут быть иногда равными, иногда мнимыми. Причина такого соглашения состоит в том, что формулы, выражающие мнимые корни, обладают теми же свойствами, какие принадлежат вещественным корням, стоит только, совершая действие над мнимыми числами, руководиться правилами, выведенными для вещественных чисел, принимая притом, что $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Точно также, когда уравнение имеет один корень, мы можем, рассматривая этот корень как два одинаковых, приписать им те же свойства, какие принадлежат разным корням уравнения. Два из этих свойств мы сейчас укажем.

219. Два свойства корней квадратного уравнения. Если сложим две формулы, выражающие корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

то радикалы взаимно уничтожатся, и мы получим:

$$x_1 + x_2 = -{}^p/_2 - {}^p/_2 = -p$$

Если же две формулы перемножим, то получим (произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел):

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$$

Каково бы ни было подкоренное число $({}^p/_2)^2 - q$ всегда

$$\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Следовательно:

$$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Таким образом, ***сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.***

Следствия. **1)** Пользуясь этими свойствами, мы легко можем ***составить квадратное уравнение, у которого корнями были бы данные числа***. Пусть, напр., надо составить уравнение, у которого корни были бы числа **2** и **3**; тогда из равенств $\mathbf{2 + 3 = — p}$ и $\mathbf{2 \cdot 3 = q}$ находим: $\mathbf{p = — 5}$ и $\mathbf{q = 6}$; следовательно, уравнение будет: $\mathbf{x^2 — 5x + 6 = 0}$. Подобно этому найдем, что **3** и **— 7** будут корни уравнения $\mathbf{x^2 — [3 + (— 7)]\, x + 3\,(— 7) = 0}$, т. е. $\mathbf{x^2 + 4x — 21 = 0}$; числа **3** и **0** будут корни уравнения $\mathbf{x^2 — 3x = 0}$, и т. п.

2) При помощи тех же свойств мы можем, не решая квадратного уравнения, определить знаки его корней, если эти корни вещественные.

Пусть, напр., имеем уравнение $\mathbf{x^2 + 8x + 12 = 0}$ Так как в этом примере выражение $(^{p}/_{2})^2 — q$, т. е. $\mathbf{4^2 — 12}$, есть число положительное, то оба корня вещественные. Обращая внимание на свободный член, видим, что он имеет знак + ; значит, произведение корней должно быть положительное число, т. е. оба корня имеют одинаковые знаки. Эти знаки должны быть минусы, так как сумма корней отрицательна (она равна **—8**). Уравнение $\mathbf{x^2 + 8x — 12 = 0}$ имеет корни с разными знаками (потому что их произведение отрицательно), причем отрицательный корень имеет большую абсолютную величину (потому что их сумма отрицательна), и т. п.

3) Так как корни уравнения $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ те же самые, что и корни уравнения $\mathbf{x^2 + {}^{b}/_{a}\, x + {}^{c}/_{a} = 0}$, то для такого уравнения сумма корней равна — $^{b}/_{a}$, а произведение их равно $^{c}/_{a}$ [3].

Глава вторая.

Трехчлен 2-й степени и его графическое изображение.

220. Трехчлен 2-й степени. Выражение вида $\mathbf{ax^2 + bx + c}$, в котором коэффициенты $\boldsymbol{a, b, c}$ означают какие угодно постоянные числа, а $\boldsymbol{x}$ — переменное число, называется трехчленом второй степени (относительно переменного $\boldsymbol{x}$). Те значения $\boldsymbol{x}$, при которых трехчлен обращается в нуль, называют его нулевыми значениями или корнями; конечно, эти корни те самые, которые принадлежат квадратному уравнению $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, или—что все равно — приведенному уравнению $\mathbf{x^2 + {}^{b}/_{a}\, x + {}^{c}/_{a} = 0}$

В частном случае при $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ трехчлен принимает вид $\mathbf{x^2 + px + q}$ при $\boldsymbol{b} = 0$ или при $\boldsymbol{c} = 0$ трехчлен обращается в двучлен $\mathbf{ax^2 + c}$ или $\mathbf{ax^2 + bx}$.

В этой главе мы рассмотрим некоторые свойства трехчлена и процесс его изменения при изменении числа ***x***.

221. Разложение трехчлена $x^2 + px + q$ на множители 1-й степени относительно *x*. Покажем два способа такого разложения.

1-й способ: посредством введения двух вспомогательных членов.

Пусть требуется, разложить трехчлен $x^2 + 5x - 14$.

Обращая внимание на первые два члена, замечаем, что если к ним добавить третий член, равный квадрату половины коэффициента при втором члене, т. е. член $({}^5/_2)^2$ то из них составится трехчлен, равный $(x + {}^5/_2)^2$. Заметив это, приложим к данному трехчлену два взаимно уничтожающихся члена: $+ ({}^5/_2)^2$ и $- ({}^5/_2)^2$, от чего, конечно, трехчлен не изменится. Тогда получим:

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-14=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-14=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{81}{4}=$$
$$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

Мы привели данный трехчлен к такому виду, при котором он представляет собою разность двух квадратов; а такую разность можно разложить на два множителя: на сумму возвышаемых чисел и на их разность. Сделав такое разложение, получим:

$$\left(x+\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\right)=(x+7)\ (x-2)$$

Пусть еще требуется разложить трехчлен $x^2 - 8x + 5$. Прибавим два вспомогательных члена $+ 4^2$ и $- 4^2$:

$$x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 5$$

Первые три члена составляют $(x - 4)^2$ последние 2 члена дают число -11:

$$(x - 4)^2 - 11.$$

Вместо **11** можно подставить $(\sqrt{11})^2$:

$$(x - 4)^2 - (\sqrt{11})^2$$

Теперь эта разность квадратов разлагается так:

$$(x - 4 + \sqrt{11})\ (x - 4 + \sqrt{11}).$$

Если вычислим **11** с точностью, положим, до ${}^1/_{1000}$, то найдем: $\sqrt{11} = 3{,}316...$ Подставив, получим:

$$(x - 0{,}683\ ..\ .)\ (x - 7{,}316...).$$

Этот прием можно применить и к буквенному трехчлену $x^2 + px + q$, а именно:

введем два вспомогательных члена

$$+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ и } -\left(\frac{p}{2}\right)^2:$$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]$$

Вместо разности $({}^{p}/{}_{2})^2 - q$ мы можем подставить выражение $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2$:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2.$$

Эту разность квадратов разлагаем на 2 множителя:

$$\left[x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right]\left[x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right]$$

2-й способ: посредством предварительного нахождения корней трехчлена.

Найдем корни трехчлена, решив квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0$. Пусть эти корни будут x_1 и x_2. Тогда, как мы видели (§ 219):

$$x_1+ x_2 = - p \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = q.$$

Из этих равенств находим:

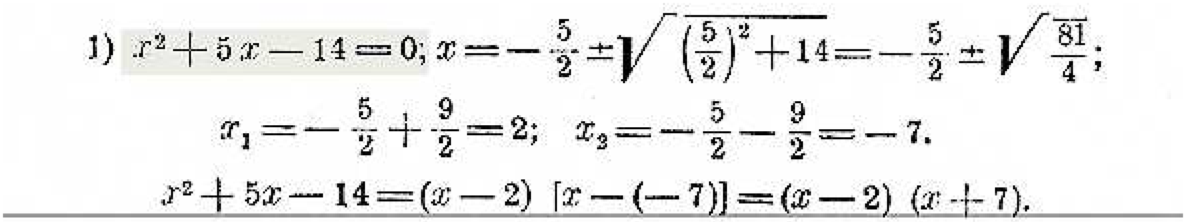
$$p = - (x_1+ x_2) \quad \text{и} \quad q = x_1 x_2.$$

Подставим в трехчлен на место p и q эти выражения и затем преобразуем полученный многочлен:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=$$
$$=(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2).$$

Мы видим таким образом, что ***трёхчлен $x^2 + px + q$ разлагается на два множителя, из которых первый равен разности между x и одним корнем трехчлена, а второй равен разности между x и другим корнем трехчлена.***

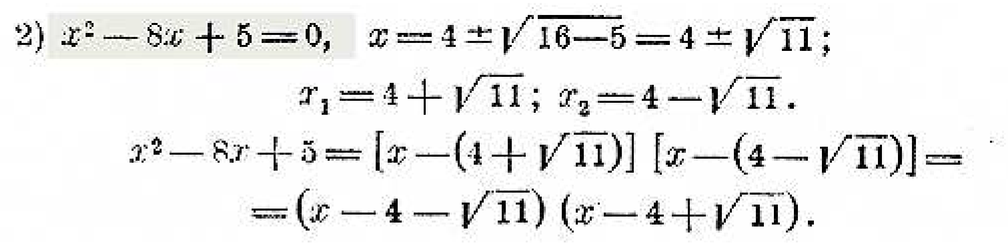
Применив этот способ к примерам, разобранным сейчас первым способом, мы придем к тем же разложениям:



1) $x^2+5x-14=0$; $x=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+14}=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}$;

$$x_1=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=2;\quad x_2=-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=-7.$$

$$x^2+5x-14=(x-2)\ [x-(-7)]=(x-2)\ (x+7).$$

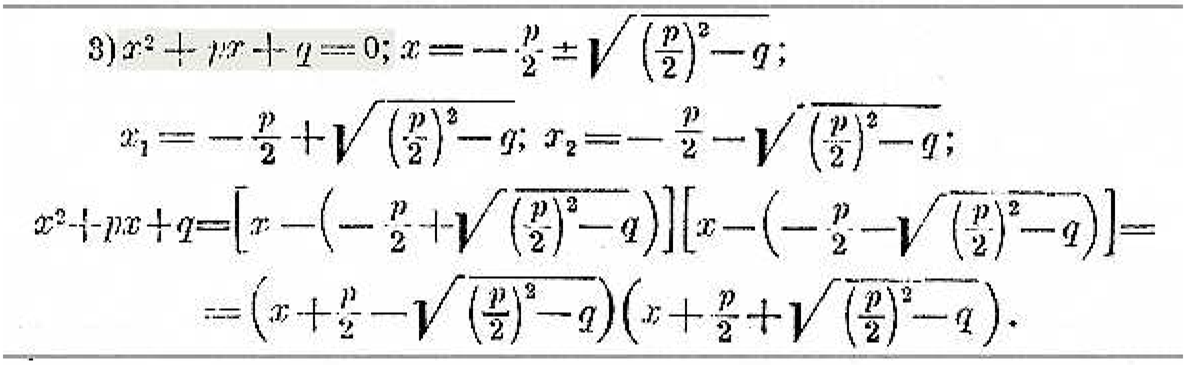


2) $x^2-8x+5=0$, $x=4\pm\sqrt{16-5}=4\pm\sqrt{11}$;

$$x_1=4+\sqrt{11};\ x_2=4-\sqrt{11}.$$

$$x^2-8x+5=[x-(4+\sqrt{11})]\ [x-(4-\sqrt{11})]=$$

$$=(x-4-\sqrt{11})\ (x-4+\sqrt{11}).$$



3) $x^2+px+q=0$; $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$;

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

$$x^2+px+q=\left[x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$

222. Разложение трехчлена ax^2+bx+c .

Такой трехчлен прежде всего можно представить так:

$$ax^2+bx+c=a\ (\ x^2+{}^b/_a\,x+{}^c/_a\,)$$

Выражение, стоящее внутри скобок, есть трехчлен вида x^2+px+q. Его корни x_1и x_2 будут те же самые, что и трехчлена ax^2+bx+c. Найдя их, можем, по доказанному в предыдущем параграфе, разложить этот трехчлен так:

$$x^2+{}^b/_a\,x+{}^c/_a=(\ x-x_1)\ (x-x_2)$$

Следовательно:

$$ax^2+bx+c=a\ (\ x-x_1)\ (x-x_2).$$

Таким образом, разложение трехчлена ax^2+bx+c отличается от разложения трехчленx^2+px+q только дополнительным множителем a.

Примеры.

1) Трехчлен **$2x^2-2x-12$**, у которого корни **3** и **— 2**, можно разложить так

$$2\ (x-3)\ (x+2).$$

2) $(a^2 - 1)(b^2 + 1) - 2b(a^2 + 1)$. Заметив, что данное выражение есть трехчлен второй степени относительно буквы b, расположим его по степеням этой буквы:

$$(a^2 - 1)\,b^2 - 2(a^2 + 1)\,b + (a^2 - 1).$$

Корни этого трехчлена (принимая b за переменное число) будут (§ 217):

$$b_1 = \frac{a^2 + 1 + \sqrt{(a^2 + 1)^2 - (a^2 - 1)^2}}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + 1 + 2a}{a^2 - 1} = \frac{a + 1}{a - 1},$$

$$b_2 = \frac{a^2 + 1 - \sqrt{(a^2 + 1)^2 - (a^2 - 1)^2}}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a^2 - 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$$

Следовательно, данный трехчлен представится так:

$$(a^2 - 1)\left(b - \frac{a + 1}{a - 1}\right)\left(b - \frac{a - 1}{a + 1}\right) = [b\,(a - 1) - (a + 1)][b\,(a + 1) - (a - 1)] = \\ = (ab - b - a - 1)\,(ab + b - a + 1).$$

223. Следствие. По данным корням можно составить квадратное уравнение (иначе, чем это указано в § 219). Так, уравнение, имеющее корни 3 и -2, будет $(x - 3)\,[x - (-2)] = 0$, т.е. $(x - 3)\,(x + 2) = 0$, что по раскрытии скобок дает:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Конечно, все члены этого уравнения можно умножить на произвольное число, не зависящее от x (напр, на 2), от чего корни не изменятся.

224. График трехчлена второй степени. Сначала мы рассмотрим график такого трехчлена, который может быть представлен в виде произведения $a(x + m)^2$. Напр., возьмем такие две функции:

$$1)\ y = \tfrac{1}{4}\,(x + 2)^2 \quad \text{и} \quad 2)\ y = \tfrac{1}{4}(x - 2)^2.$$

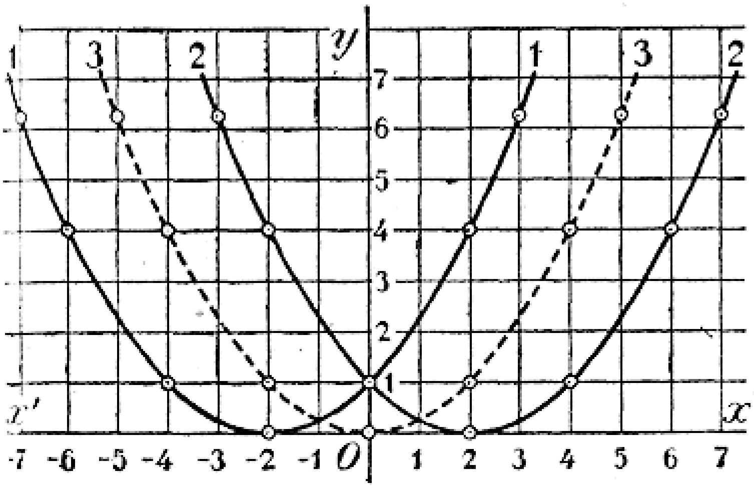
Для сравнения мы изобразим на том же чертеже еще параболу:

$$3)\ y = \tfrac{1}{4}\,x^2$$

Предварительно составим таблицу частных значений этих трех функций, напр, такую:

$x =$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1) $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2 =$	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9	$12\frac{1}{4}$	16
2) $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 =$	$12\frac{1}{4}$	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4
3) $y = \frac{1}{4}x^2$	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Нанеся все эти значения на чертеж, получим три графика, изображенные на черт. 3.

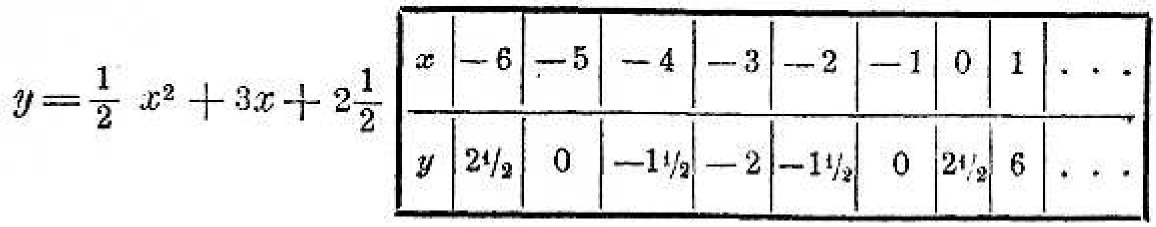


Черт 3.

Рассматривая этот чертеж, мы замечаем, что кривая 1-я есть та же парабола 3-я, только перенесенная на 2 единицы влево, а кривая 2-я есть та же парабола 3-я, но перенесенная на 2 единицы вправо.

Обобщая этот вывод, можем сказать, что график функции $y = a(x + m)^2$ есть парабола, выражающая функцию $y = ax^2$, только парабола эта перенесена влево, если $m > 0$, и вправо, если $m < 0$, на столько единиц, сколько их заключается в абсолютной величине числа m. Ветви этой параболы направлены вверх, если $a > 0$ (как в наших примерах), и вниз, если $a < 0$ (напр., если бы было задано: $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2$.

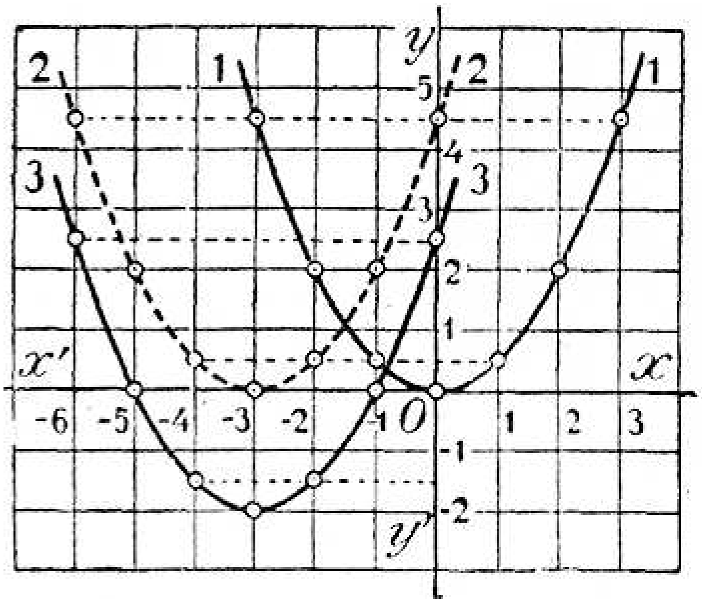
Теперь возьмем трехчлен вида: $ax^2 + bx + c$, напр, такой частный случай:



$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	$2^1/_2$	0	$-1^1/_2$	-2	$-1^1/_2$	0	$2^1/_2$	6	...

Построив точки, выражающие эти значения, и проведя через них кривую (кривая 3-я, черт. 4), мы получим искомый график.



Черт. 4

Покажем теперь, что этот график есть та же парабола, которая выражает функцию $y = {}^{1}/_{2}\, x^{2}$ (полученную отбрасыванием в данном трехчлене второго и третьего членов), только парабола эта перенесена в другое место. Для этого преобразуем данный трехчлен следующим образом:

во-первых, вынесем за скобки коэффициент при x^2

$$y=\frac{1}{2}x^2+3x+2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2+6x+5);$$

во-вторых, к трехчлену, стоящему в скобках, добавим два взаимноуничтожающихся члена: + 3^2 и — 3^2 (как мы бы сделали, если бы хотели разложить этот трехчлен на множители способом введения двух вспомогательных членов):

$$y = {}^{1}/_{2}\,(x^2 + 6x + 5 + 3^2 - 3^2)$$

и, в-третьих, сгруппируем члены многочлена в 2 группы так:

$$y=\frac{1}{2}\left[(x^2+6x+3^2)-(3^2-5)\right]=\frac{1}{2}\left[(x+3)^2-4\right]=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$$

Принимая теперь во внимание примеры, разобранные в двух предыдущих параграфах, мы можем поступить так:

Построим параболу, выражающую функцию: $y = {}^{1}/_{2}\, x^{2}$ (кри-вая 1-я, черт. 4); затем перенесем ее на 3 единицы влево, Тогда получим 2-ю параболу, выражающую функцию $y = {}^{1}/_{2}\,(x + 3)^{2}$. Эту параболу перенесем теперь на 2 единицы вниз; тогда получим третью параболу, выражающую данную функцию.

Возьмем теперь трехчлен в общем виде:

$$y = ax^2 + bx + c$$

и преобразуем его так, как было сейчас указано на частном примере:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$
$$= a\left\{\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right]\right\} =$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Теперь мы можем утверждать, что график трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола $y = ax^2$, перемещенная двойным параллельным перенесением:

во-первых, параллельно оси x-ов на столько единиц, сколько их есть в абсолютной величине числа $^b/_{2a}$, влево, если это число положительное, и вправо, если оно отрицательное;

во-вторых, параллельно оси y-ов на столько единиц, сколько их есть в абсолютнои величине числа $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ вверх, если это число положительное, и вниз, если оно отрицательное.

225. Замечание. Когда в трехчлене коэффициент при x^2 есть число положительное (как в примере предыдущего параграфа), тогда ветви параболы направлены вверх. Если же этот коэффициент число отрицательное, то ветви параболы должны быть направлены вниз. Так, если возьмем:

$$y = -{}^1/_2\ x^2 - 3x - 2\ {}^1/_2,$$

то, вынеся знак — за скобки, мы получим:

$$y = -\left({}^1/_2\ x^2 + 3x + 2\ {}^1/_2\right).$$

Сравнивая эту функцию с той, которую мы изобразили графически в предыдущем параграфе, мы замечаем, что при одинаковых значениях абециссы x ординаты нашей новой функции должны быть такие же по абсолютной величине, как и ординаты прежней функции, только противоположного направления. Значит, получится такая же парабола, как парабола 3-я черт. 4, но расположенная ветвями вниз, а вершиной вверх, симметрично с параболой 3-й этого чертежа.

226. Графическое решение полного квадратного уравнения. Квадратное уравнение можно графически решить таким способом. Построив на миллиметровой бумаге параболу, выражающую трехчлен, стоящий в левой части уравнения, находим точки пересечения этой параболы с осью x-ов (если такие точки существуют). Абсциссы этих точек и будут корни уравнения, так как при этих абсциссах ординаты, выражающие соответствующие значения трехчлена, равны нулю.

Примеры.

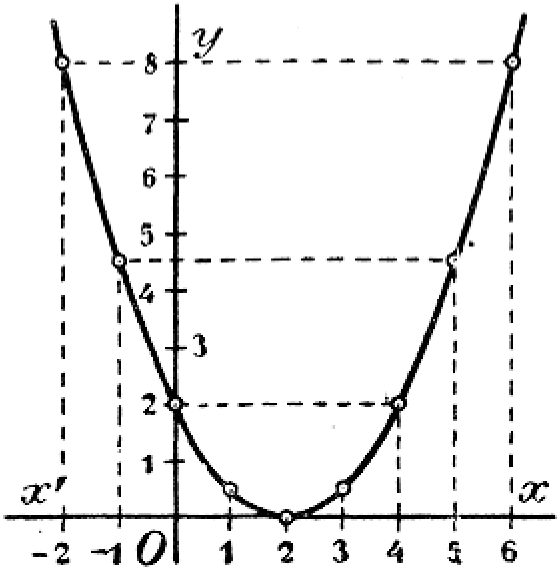
1) $^1/_2\ x^2 + 3x + 2\ ^1/_2 = 0$. График левой части этого уравнения изображен кривой 3-й, на черт.4. На нем мы видим, что парабола пересекается с осью x-ов в двух точках, абсциссы которых —**1** и — **5**. Это и будут корни уравнения. Это можно проверить,

решив уравнение посредством общей формулы.

2) $^1/_2\ x^2 — 2x + 2 = 0$. Составив таблицу частных значений трехчлена $y = {^1/_2}\ x^2 — 2x + 2$:

x	$—2$	$—1$	0	1	2	3	4	5	6	. . .
y	8	$4^1/_2$	2	$^1/_2$	0	$^1/_2$	2	$4^1/_2$	8	. . .

мы построим параболу (черт. 5).

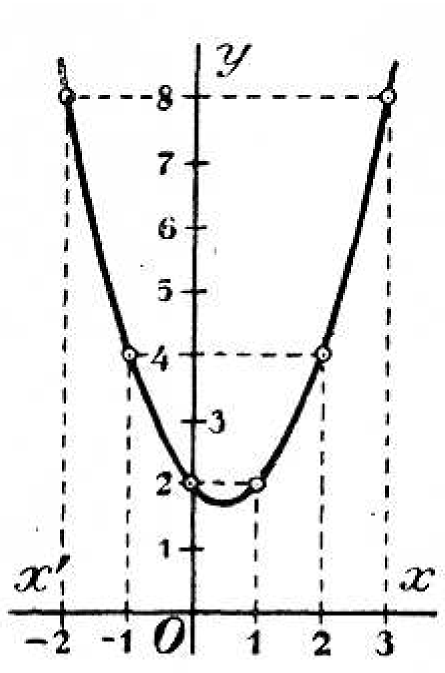


Черт.5

Эта парабола не пересекается с осью **x**-ов, а только ее касается в точке с абсциссой **2**, Уравнение в этом случае имеет только один корень **2**.

3) $x^2 — x + 2 = 0$

x	$—3$	$—2$	$—1$	0	1	2	3	4	. . .
y	14	8	4	2	2	4	8	14	. . .



Черт.6

Парабола (черт. 6) не пересекается и не касается оси ***x***-ов; уравнение не имеет вещественных корней.

Укажем еще другой прием, более удобный для выполнения. Пусть требуется решить уравнение:

$$x^2 — 1{,}5\,x — 2 = 0\ ,$$

которое можно изобразить так:

$$x^2 = 1{,}5\,x + 2$$

Каждая часть этого уравнения, рассматриваемая отдельно, есть некоторая функция от ***x***. Обозначим функцию, выражаемую левою частью уравнения, буквою y_1 и функцию, выражаемую правой частью, буквой y_2:

$$y_1 = x^2\ ; \qquad y_2 = 1{,}5\,x + 2\ .$$

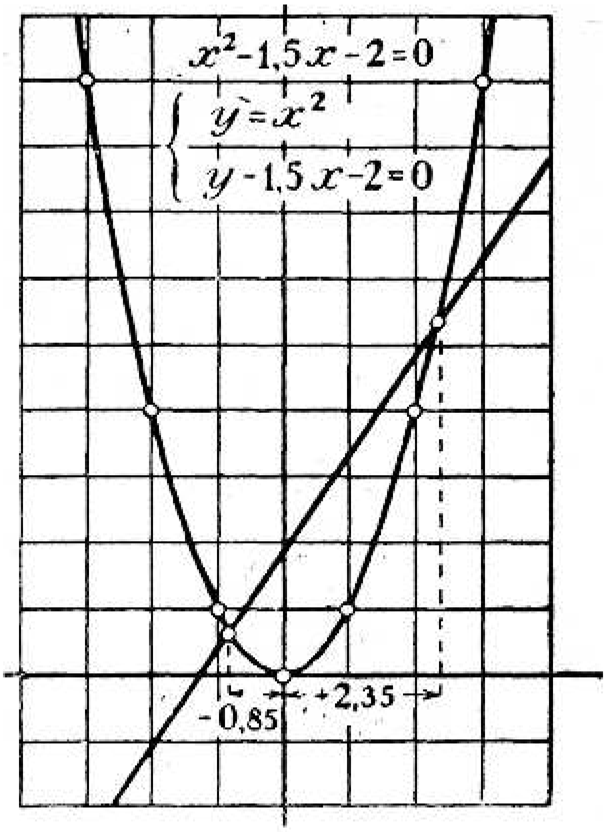
Первая функция на чертеже выражается параболой, вторая— прямой линией. Построив на одном и том же чертеже параболу и прямую по их частным значениям:

$y_1 = x^2$

x	—3	—2	—1	0	1	2	3	. . .
y_1	9	4	1	0	1	4	9	. . .

$y_2 = 1{,}5x + 2$

x	0	2
y_2	2	5



Черт.7

мы найдем (черт. 7), что прямая и парабола пересекаются в двух точках, абсциссы которых приблизительно выражаются числами **2,35** и—**0,85**. Это и будут приближенные значения корней данного уравнения, так как при каждой из этих абсцисс ординаты y_1 , y_2 равны между собой, и следовательно:

$$x^2 = 1,5\,x + 2$$

Если случится, что прямая с параболой не пересекается, то уравнение не имеет вещественных корней; если же прямая коснется параболы, то уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки касания.

Замечание. Так как вычерчивание параболы очень часто требуется для графического решения квадратных уравнений, то для сокращения чертежной работы лучше всего заранее начертить возможно точнее параболу на картоне и из него вырезать параболическое лекало, которым можно пользоваться во многих случаях. На таком лекале надо надписать, какая единица длины была взята при вычерчивании параболы (напр, „за единицу принят 1 см").

227. Наибольшее и наименьшее значение трехчлена. Когда ветви параболы, изображающей трехчлен $y = ax^2 + bx + c$, направлены вверх ($a > 0$), тогда из всех ординат есть одна наименьшая; наибольшей ординаты в этом случае нет. Наоборот, когда ветви направлены вниз ($a < 0$), тогда из всех ординат есть одна наибольшая; наименьшей ординаты в этом случае нет. Значит, ***трехчлен*** $y = ax^2 + bx + c$ ***при*** $a > 0$ ***имеет наименьшее значение, не имея наибольшего; при*** $a < 0$ ***имеет наибольшее значение, не имея наименьшего.***

Чтобы найти величину наибольшего или наименьшего значений, преобразуем трехчлен так, как мы это делали раньше (§ 224).

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

В таком виде трехчлен представляет собой алгебраическую сумму двух слагаемых: переменного слагаемого $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ и постоянного $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Если $a > 0$, то первое слагаемое при $x = — ^b/_{2a}$ равно нулю, а при всех прочих значениях x оно есть число положительное, значит, при $x = — ^b/_{2a}$ трехчлен имеет наименьшее значение, именно $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Если же $a < 0$, то первое слагаемое при $x = — ^b/_{2a}$ попрежиему равно нулю, а при всех прочих значениях x оно есть число отрицательное; следовательно, трехчлен при $x = — ^b/_{2a}$ получает теперь наибольшее значение, именно $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (вспомним, что нуль больше всякого отрицательного числа).

228_1 Изменение трехчлена при изменении *x*. Изобразив данный трехчлен графически, мы тем самым наглядно представим процесс его изменения при изменении числа x. Возьмем, напр., черт. 4, изображающий трехчлен $^1/_2\ x^2 + 3x + 2\ ^1/_2$. Из него видно, что когда x возрастает от — ∞ до — **3,** трехчлен убывает от + ∞ до наименьшего значения — **2**, переходя при этом через нулевое значение при x = — **5**. При дальнейшем возрастании x от — **3** до + ∞ трехчлен возрастает от — **2** до + ∞, переходя при этом через нуль при x = —**1**. Из чертежа видно также, что $^1/_2\ x^2 + 3x + 2\ ^1/_2 > 0$ при всех значениях x, меньших —**5**, и при всех значениях x, больших — **1**; наоборот, $^1/_2\ x^2 + 3x + 2\ ^1/_2 < 0$ при всех значениях ж, заключающихся между —**5** и — **1**.

Впрочем, чтобы наглядно представить себе процесс изменения данного трехчлена, нет надобности составлять таблицу его частных значений и по ней подробно строить график трехчлена. Пусть, напр., надо проследить изменение трехчлена:

$$y = — 2x^2 + 3x + 5$$

Для этого можно поступить так: обращая внимание на коэффициент при x^2, видим, что он отрицательный. Из этого заключаем, что ветви параболы должны быть направлены вниз, и потому трехчлен имеет наибольшее значение, не имея наименьшего. Найдем корни трехчлена, для чего надо решить уравнение:

$$-2x^2 + 3x + 5 = 0, \quad \text{или} \quad 2x^2 - 3x - 5 = 0,$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4};$$

$$x_1 = 2^1/_2, \qquad x_2 = -1.$$

Трехчлен имеет два корня, и потому парабола, изображающая его, должна пересекаться два раза с осью x-ов.

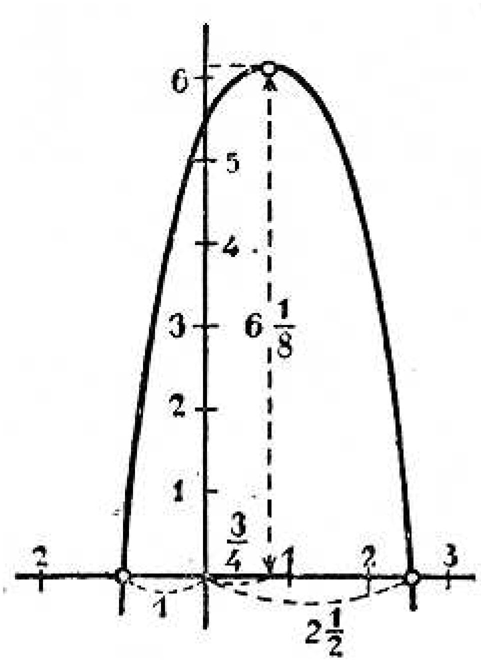
Найдем еще величину наибольшего значения трехчлена. Для этого преобразуем его так, как мы раньше (§ 224) преобразовывали трехчлен $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$, а именно так:

$$-2x^2+3x+5=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)=$$

$$=-2\left[x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]=-2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{2}-\frac{9}{16}\right]=$$

$$=-2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{49}{8}.$$

Так как произведение $-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$ при $x = \frac{3}{4}$ равно **0**, а при всех прочих значениях x оно есть число отрицательное, то при $x = \frac{3}{4}$ значение трехчлена равно $\frac{49}{8}$, а при всех других значениях оно будет меньше этой дроби. Значит, $\frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}$ есть наибольшее значение данного трехчлена (при $x = \frac{3}{4}$). Таким образом, график трехчлена изобразится так, как на черт.8.



Черт.8

Хотя этот чертеж и приблизительный, тем не менее он наглядно изображает процесс изменения данного трехчлена, а именно, из чертежа видно, что при: возрастании x от $-\infty$ до -1 трехчлен возрастает от $-\infty$ до 0; затем при возрастании x от -1 до $\frac{3}{4}$ трехчлен продолжает возрастать до $6\frac{1}{8}$, а при дальнейшем возрастании x от $\frac{3}{4}$ до $+\infty$ трехчлен убывает, переходя во второй раз через нуль при $x = 2\frac{1}{2}$

228₂. Решение неравенства второй степени с одним неизвестным.

Общий вид такого неравенства, по упрощении его, есть следующий:

$$ax^2 + bx + c \overset{>}{<} 0$$

Так как знак < всегда может быть приведен к знаку > (умножением обеих частей неравенства на **—1**), то достаточно рассмотреть неравенства вида:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

в котором число a может быть и положительным и отрицательным.

Решение этого неравенства основано на свойстве трехчлена $ax^2 + bx + c$ разлагаться на множителей первой степени относительно x (§ 221). Обозначив буквами α и β корни этого трехчлена, мы можем заменить его произведением $a(x - \alpha)(x - \beta)$, и тогда неравенство можно написать так:

$$a(x - \alpha)(x - \beta) > 0.$$

Рассмотрим отдельно три следующих случая:

I. Корни вещественные неравные (что бывает тогда, когда $b^2 - 4ac > 0$, §216). Пусть $\alpha > \beta$. Если $a > 0$, то произведение $a(x - \alpha)(x - \beta)$, очевидно, тогда положительно, когда каждая из разностей $x - \alpha$ и $x - \beta$ положительна или каждая отрицательна. Для этого достаточно, чтобы x было больше α (тогда подавно x больше β), или же чтобы x было меньше β (тогда подавно x меньше α). Следовательно, в этом случае неравенство получает решение при $x > \alpha$ и также при $x < \beta$, т. е. x должно быть или больше большего корня или меньше меньшего корня.

Если же $a < 0$, то произведение $a(x - \alpha)(x - \beta)$ тогда положительно, когда одна из разностей $x - \alpha$ и $x - \beta$ отрицательна, а другая положительна. Для этого достаточно, чтобы x удовлетворяло неравенствам $\beta < x < \alpha$, т.е. чтобы x заключалось между корнями трехчлена.

II. Корни вещественные равные (что бывает тогда, когда $b^2 - 4ac = 0$). Если $\alpha = \beta$, то неравенство «принимает вид:

$$a(x - \alpha)^2 > 0.$$

Так как при всяком вещественном значении x не равном α, число $(x - \alpha)^2$ положительно, то при $a > 0$ неравенство удовлетворяется всевозможными вещественными значениями x, за исключением $x = \alpha$, а при $a < 0$ это неравенство невозможно.

III. Корни мнимые (что бывает тогда, когда $b^2 - 4ac < 0$).

Пусть $\alpha = m + \sqrt{-n}$; в таком случае $\beta = m - \sqrt{-n}$

Тогда

$$x - \alpha = x - (m + \sqrt{-n}) = (x - m) - \sqrt{-n}$$

$$x - \beta = x - (m - \sqrt{-n}) = (x - m) + \sqrt{-n}\,.$$

Следовательно,

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = a[(x - m)^2 - (\sqrt{-n})^2] = a[(x - m)^2 + n]$$

и неравенство можно написать так: $a[(x - m)^2 + n] > 0$. Так как сумма $(x - m)^2 + n$

при всяком вещественном значении x есть число положительное, то при $a > 0$ неравенство удовлетворяется всевозможными значениями x, а при $a < 0$ оно невозможно.

Примеры.

1) Решить неравенство: $x^2 + 3x — 28 > 0$.

Корни трехчлена: $\alpha = 4$, $\beta = — 7$. Следовательно, неравенство можно написать так:

$$(x — 4)[x — (—7)] > 0.$$

Отсюда видно, что $x > 4$ или $x < — 7$.

2) Решить неравенство: $— 4x^2 + 28x — 49 > 0$ Корни суть: $\alpha = \beta = 3\,{}^1/_2$

Поэтому

$$— 4\,(x — 3\,{}^1/_2)^2 > 0,$$

откуда видно, что неравенство невозможно.

3) Решить неравенство: $x^2 — 4x + 7 > 0$.

Корни суть: $\alpha = 2 + \sqrt{— 3}$; $\beta = 2 — \sqrt{— 3}$ поэтому неравенство можно написать так: $(x — 2)^2 + 3 > 0$. Отсюда видно, что оно удовлетворяется всевозможными вещественными значениями x.

Глава третья.

Биквадратное уравнение и некоторые другие.

229. Биквадратное уравнение. Уравнение 4-й степени, напр. такое:

$$x^4 — 13x^2 + 36 = 0,$$

в которое входят только четные степени неизвестного, называется биквадратным. Оно приводится к квадратному, если заменим x^2 через y и, следовательно, x^4 через y^2 тогда уравнение обратится в квадратное:

$$y^2 — 13y + 36 = 0,$$

Решим его:

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$$y_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9, \qquad y_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4.$$

Но из равенства $x^2 = y$ видно, что $x = \pm\sqrt{y}$. Подставляя сюда на место y найденные числа **9** и **4**, получим следующие четыре решения данного уравнения:

$$x_1=+\sqrt{9}=3;\qquad x_2=-\sqrt{9}=-3;$$
$$x_3=+\sqrt{4}=2;\qquad x_4=-\sqrt{4}=-2.$$

Составим формулы для общего вида биквадратного уравнения: $ax^4+bx^2+c=0$ Положив $x^2=y$, получим уравнение $ay^2+by+c=0$, из которого находим:

$$y_1=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\qquad y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Но так как $x=\pm\sqrt{y}$ то для биквадратного уравнения мы получим следующие 4 решения:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\qquad x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$
$$x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\qquad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Отсюда видно, что если $b^2-4ac<0$, то все 4 корня мнимые; если же $b^2-4ac>0$, то могут быть 3 случая:

1) все корни вещественные (как в приведенном выше численном примере), если $-b+\sqrt{b^2-4ac}>0$ и $-b-\sqrt{b^2-4ac}>0$;

2) все корни мнимые, если оба эти выражения дадут отрицательные числа, и

3) два корня вещественные и два мнимые, если $-b+\sqrt{b^2-4ac}>0$, а $-b-\sqrt{b^2-4ac}<0$.

Наконец, если $b^2-4ac=0$, то 4 корня делаются попарно равными.
(О преобразовании сложного радикала вида $\sqrt{A+\sqrt{+B}}$ см. в дополнениях ко второй части. § 403.)

230. Уравнения, у которых левая часть разлагается на множители, а правая есть нуль. Решение таких уравнений сводится к решению уравнений более низких степеней. Так, мы видели (§ 210, II), что для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2+bx=0$ надо его левую часть разложить на 2 множителя: $x(ax+b)=0$ и затем, приняв во внимание, что произведение равно нулю только тогда, когда какой-нибудь сомножитель равен нулю, свести решение этого уравнения к решению двух уравнений 1-й степени:

$$x=0 \qquad \text{и} \qquad ax+b=0.$$

Подобно этому можно решить неполное кубичное уравнение, не содержащее свободного члена, напр, такое:

$$x^3+3x^2-10x=0.$$

Вынеся x за скобки, мы представим уравнение так:

$$x\,(x^2 + 3x - 10) = 0,$$

и, следовательно, оно распадается на 2 уравнения:

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 3x - 10 = 0,$$

из которых находим три решения:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = 2,\ \ x_3 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -5.$$

Пусть еще уравнение приведено к такому виду:

$$x\,(x + 4)\,(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Тогда оно распадается на три уравнения:

$$x = 0;\quad x + 4 = 0;\quad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Уравнения эти дают:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = -4;\quad x_3 = 2;\quad x_4 = 3.$$

Глава четвертая.

Иррациональные уравнения.

231. Задача. Периметр прямоугольного треугольника равен 10 м, а один из его катетов составляет 2 м; найти две другие стороны этого треугольника.

Обозначив другой катет буквою x, найдем, что гипотенуза должна равняться $\sqrt{2^2 + x^2}$ и, следовательно, будем иметь уравнение:

$$2 + x + \sqrt{4 + x^2} = 10.$$

Мы получили уравнение, в котором неизвестное входит под знак радикала. Уравнения такого рода называются иррациональными. Чтобы решить иррациональное уравнение, его надо предварительно освободить от радикалов, подкоренные выражения которых содержат неизвестное. Если в уравнение, как в нашей задаче, входит только один радикал, то освободиться от него можно таким образом: прежде всего уединим радикал, т. е. перенесем все члены, не содержащие радикала, в одну часть уравнения, оставив радикал в другой части. Тогда наше уравнение будет:

$$\sqrt{4 + x^2} = 10 - 2 - x = 8 - x.$$

Теперь возвысим обе части уравнения в квадрат. Очевидно, что если равные числа мы возвысим в одну и ту же степень, то и получим равные числа; поэтому после возвышения в квадрат знак = сохранится:

$$4 + x^2 = (8 - x)^2\ ;\ 4 + x^2 = 64 - 16x + x^2$$

Решив это уравнение, найдем:

$$16x = 64 - 4 = 60; \quad x = {}^{60}/_{16} = {}^{15}/_{4} = 3\,{}^{3}/_{4}$$

Тогда гипотенуза будет:

$$\sqrt{4+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{64+225}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{289}=\frac{1}{4}\cdot 17=4\frac{1}{4}$$

Пусть еще требуется решить уравнение:

$$10 - \sqrt[3]{3x+21} = 7$$

Уединим радикал и возвысим в куб:

$$3 = \sqrt[3]{3x+21}\,; \quad 27 = 3x+21; \quad x = 2.$$

Поверка:

$$10 - \sqrt[3]{3\cdot 2 + 21} = 10 - \sqrt[3]{27} = 10 - 3 = 7.$$

232. Посторонние решения. Возьмем еще такой пример:

$$x = \sqrt{x + 7} - 1 \qquad (1)$$

Решаем это уравнение так же, как и предыдущее:

$$x + 1 = \sqrt{x + 7}\,; \qquad (2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = x + 7; \qquad (3)$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \qquad (4)$$

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2},$$

$$x_1=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2; \quad x_2=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-3.$$

Подставляя найденные решения в уравнения (4), (3), (2) и (1), находим, что оба решения удовлетворяют уравнениям (4) и (3), но уравнениям (2) и (1) удовлетворяет только число **2**, а число — **3** не удовлетворяет; это решение является посторонним для уравнений (1) и (2). Значит, оно появилось при переходе от уравнения (2) к уравнению (3), т. е. оно появилось от возвышения частей уравнения (2) в квадрат. Рассмотрим поэтому подробнее, что происходит при возвышении частей уравнения в квадрат.

233. Возвышение частей уравнения в квадрат может ввести посторонние решения. Пусть нам даны два уравнения:

$$x + 1 = \sqrt{x + 7} \quad . \qquad (1)$$

$$x + 1 = -\sqrt{x + 7} \qquad (2)$$

Одно из этих уравнений есть то, которое в предыдущем параграфе нам пришлось возвысить в квадрат, а другое отличается от него только знаком перед радикалом. Возвысив в квадрат обе части каждого из этих двух уравнений, мы получим одно и то же уравнение:

$$\mathbf{x^2 + 2x + 1 = x + 7} \qquad (3)$$

так как $(-\sqrt{x+7})^2$ и $(\sqrt{x+7})^2$ равны одному и тому же числу $\mathbf{x + 7}$. Значит, решения уравнений (1) и (2) должны удовлетворять уравнению (3). Следовательно, уравнение (3) равносильно совокупности уравнений (1) и (2). Поэтому неудивительно, что в числе решений уравнения (3) есть одно, удовлетворящее уравнению (1), и есть другое, удовлетворяющее уравнению (2). Действительно, число $\mathbf{-3}$ удовлетворяет уравнению (2): $\mathbf{-3 + 1} = -\sqrt{\mathbf{-3 + 7}}$, т. е. $\mathbf{-2 = -2}$. Может случиться, что уравнение (2) совсем не имеет решений; тогда решения уравнения (3) будут только те, которые удовлетворяют уравнению (1); значит, тогда посторонних решений не будет вовсе. Может случиться, что данное уравнение (1) не имеет совсем решений; тогда уравнение (3) содержит только решения уравнения (2), и, значит, все они будут посторонние для уравнения (1).

Таким образом, ***возвышение частей уравнения в квадрат может привести к новому уравнению, не равносильному с тем, которое возвышалось.***

То же самое может случиться и при возвышении частей уравнения в какую-нибудь иную степень. Поэтому, решив уравнение, полученное после возвышения в степень, надо полученные корни испытать подстановкою, с целью определить, нет ли между ними посторонних.

234. Освобождение уравнения от двух квадратных радикалов. Пусть надо решить уравнение с двумя квадратными радикалами, подкоренные выражения которых содержат неизвестное:

$$\sqrt{\mathbf{2x - 4}} - \sqrt{\mathbf{x + 5}} = \mathbf{1}. \qquad (1)$$

Желая сначала освободиться от радикала $\sqrt{\mathbf{2x - 4}}$, предварительно уединим его:

$$\sqrt{\mathbf{2x - 4}} = \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{x + 5}}\,. \qquad (2)$$

Теперь возвысим это уравнение в квадрат:

$$\mathbf{2x - 4 = 1 + 2}\sqrt{\mathbf{x + 5}} + \mathbf{x + 5 = 6 + 2}\sqrt{\mathbf{x + 5}} + \mathbf{x}, \text{ или}$$

$$\mathbf{x - 10} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{x + 5}}\,. \qquad (3)$$

Уравнение это могло также получиться от возвышения в квадрат другого уравнения:

$$-\sqrt{\mathbf{2x - 4}} = \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{x + 5}}\,. \qquad (4)$$

Следовательно, уравнение (3) включает в себе решения двух уравнений: (2) и (4), и, следовательно, (1) и (4), так как уравнение (2) вполне равносильно уравнению (1).

Теперь освободим уравнение (3) от радикала посредством вторичного возвышения в квадрат:

$$\mathbf{x^2 - 20x + 100 = 4x + 20}, \text{ или}$$

$$\mathbf{x^2 - 24x + 80 = 0}. \qquad (5)$$

Уравнение это могло получиться от возвышения в квадрат еще и такого уравнения:

$$x — 10 = —2\sqrt{x + 5}. \qquad (6)$$

Следовательно, оно включает в себе решения уравнений (3) и (6). Но так как уравнение (3) само включает в себе решения уравнений (1) и (4), то, значит, уравнение (5) включает в себе решения 3 уравнений: (1), (4) и (6). Решим теперь уравнение (5):

$$x = 12 \pm \sqrt{144 — 80} = 12 \pm \sqrt{64} = 12 \pm 8;$$

$$x_1 = 12 + 8 = 20; \quad x_2 = 12 — 8 = 4.$$

Подстановкою убеждаемся, что данное уравнение (1) удовлетворяется только числом 20, а число 4 ему не удовлетворяет. Это число удовлетворяет уравнению (6).

Замечания. 1) Предложенное уравнение можно решить, и не уединяя радикала. Возвысив в квадрат обе части уравнения (1), мы получим уравнение только с одним радикалом:

$$2x — 4 — 2\sqrt{(2x — 4)(x + 5)} + x + 5 = 1.$$

От этого радикала освободимся, как обыкновенно (уединив его):

$$3x = 2\sqrt{(2x — 4)(x + 5)}; \quad 9x^2 = 4(2x — 4)(x + 5);$$

$$9x^2 — 8x^2 + 16x — 40x + 80 = 0; \quad x^2 — 24x + 80 = 0.$$

2) Существуют способы освобождения уравнения от какого угодно числа радикалов и не только квадратных, но и других степеней. Мы ограничились указанием лишь самых простых случаев, чаще всего встречающихся.

Глава пятая.

Системы уравнений второй степени.

235. Степень уравнения с несколькими неизвестными. Чтобы определить степень уравнения, в которое входят несколько неизвестных, надо предварительно это уравнение упростить (раскрыть скобки, освободиться от радикалов и знаменателей, которые содержат неизвестные, и сделать приведение подобных членов). Тогда степенью уравнения называется ***сумма показателей при неизвестных в том члене уравнения, в котором эта сумма наибольшая.*** Напр., 3 уравнения: $x^2 + 2xy — x + 2 = 0$,

$3xy = 4$, $2x + y^2 — y = 0$ будут уравнения второй степени;

уравнение $3x^2y — y^2 + x + y^2$ есть уравнение третьей степени (с 2 неизвестными) и т. п.

Мы рассмотрим сейчас, как решаются некоторые простейшие системы уравнений 2-й степени с 2 неизвестными.

236. Система двух уравнений, из которых одно первой степени, а другое второй. Пусть дана система:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1 \text{ . . . . уравнение 2-й степени;} \\ 2x - y = 1 \text{ . . . . уравнение 1-й степени.} \end{cases}$$

Всего удобнее такую систему решить способом подстановки следующим путем (см. отдел 5 глава 1§ 141). Из уравнения 1-й степени определяем одно какое-нибудь неизвестное, как функцию от другого неизвестного, напр., определяем ***y***, как функцию от ***x:***

$$y = 2x - 1.$$

Тогда уравнение 2-й степени после подстановки дает уравнение с одним неизвестным ***x***:

$$x^2 - 4(2x - 1)^2 + x + 3(2x - 1) = 1,$$
$$x^2 - 4(4x^2 - 4x + 1) + x + 6x - 3 = 1,$$
$$x^2 - 16x^2 + 16x - 4 + x + 6x - 3 - 1 = 0,$$
$$-15x^2 + 23x - 8 = 0;\ \ 15x^2 - 23x + 8 = 0.$$
$$x = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 15 \cdot 8}}{2 \cdot 15} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 480}}{30} = \frac{23 + \sqrt{49}}{30};$$
$$x_1 = \frac{23 + 7}{30} = 1; \qquad x_2 = \frac{23 - 7}{30} = \frac{8}{15}.$$

После этого из уравнения ***y* = 2*x* — 1** находим:

$$y_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \qquad y_2 = 2 \cdot {}^8/_{15} - 1 = {}^1/_{15}$$

Таким образом, данная система имеет две пары решений:

$$1)\ x_1 = 1,\ \ y_1 = 1; \qquad 2)\ x_2 = {}^8/_{15},\ \ y_2 = {}^1/_{15}$$

Подобным путем всегда можно решить систему двух уравнений, если одно уравнение первой степени, а другое — второй. Так, напр., легко решается система:

$$x + y = a, \quad xy = b.$$

Впрочем, эту систему можно решить весьма просто иначе. Так как уравнения дают сумму и произведение неизвестных, то эти неизвестные можно рассматривать как корни такого приведенного квадратного уравнения, у которого коэффициент при ***x*** равен — ***a***, а свободный член есть ***b***:

$$z^2 - az + b = 0.$$

Один корень этого уравнения можно принять за ***x***, а другой за ***y***. Значит:

$$x_1 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; \quad x_2 = z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

237. Система двух уравнений, из которых каждое второй степени. Такая система вообще не решается элементарно, так как ее решение сводится к решению полного уравнения 4-й степени, а такие уравнения в элементарной алгебре не рассматриваются. Но в некоторых частных случаях можно указать элементарное решение.

Пример.

$$x^2 + y^2 = a\ ,\ \ xy = b.$$

Если b =/= 0, то и x =/= 0 и y =/= 0 4). Поэтому мы можем, не нарушая равносильности уравнений, разделить обе части второго из них на x:

$$y = {}^{b}/_{x}$$

Тогда первое уравнение дает:

$$x^2 + ({}^{b}/_{x})^2 = a$$

Умножив обе части на x^2, получим равносильное уравнение:

$$x^4 + b^2 = ax^2 \text{, т. е. } \quad x^4 - ax^2 + b^2 = 0.$$

Решив это биквадратное уравнение, найдем для x четыре значения. Вставив каждое из них в формулу, выведенную для y, найдем четыре соответствующих значения для y.

Подобным же образом решается и система:

$$x^2 - y^2 = a, \qquad xy = b.$$

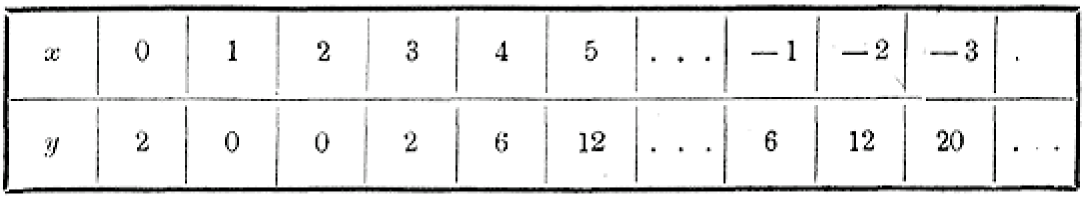
238. Графический способ решения. Начертив графики каждого из данных уравнений (при помощи таблиц частных значений x и y), находим величины координат точек пересечения этих графиков; это и будут корни уравнений.

Пример. Решить систему:

$$1)\ \ y = x^2 - bx + 2,$$

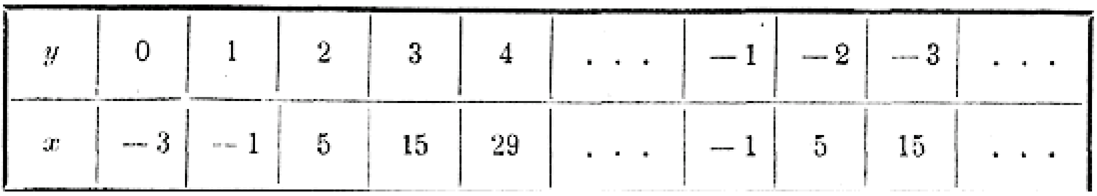
$$2)\ \ x = 2y^2 - 3.$$

Составим таблицу частных значений x и y для уравнения 1-го:



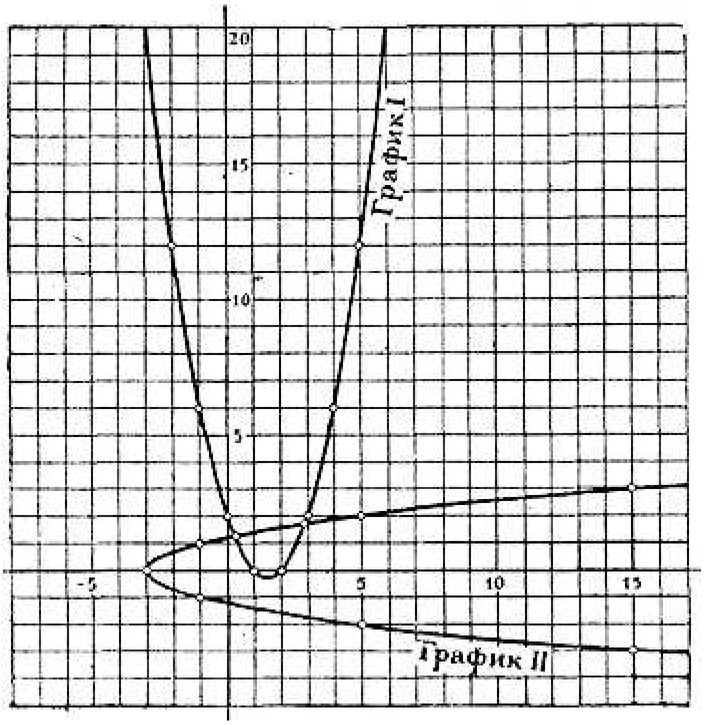
x	0	1	2	3	4	5	. . .	−1	−2	−3	.
y	2	0	0	2	6	12	. . .	6	12	20	. . .

и таблицу частных значений для уравнения 2-го:



y	0	1	2	3	4	. . .	−1	−2	−3	. . .
x	−3	−1	5	15	29	. . .	−1	5	15	. . .

По этим значениям построим графики (эти графики будут параболы, черт.9):

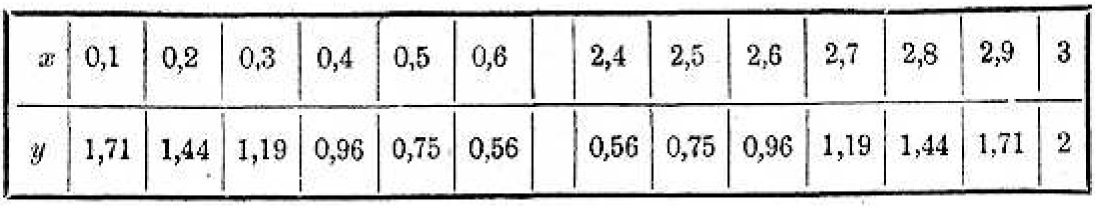


Черт.9

Графики пересекаются в двух точках, координаты которых приблизительно будут: **x = 0,3; y = 1,3 и x = 2,8; y = 1,6**.

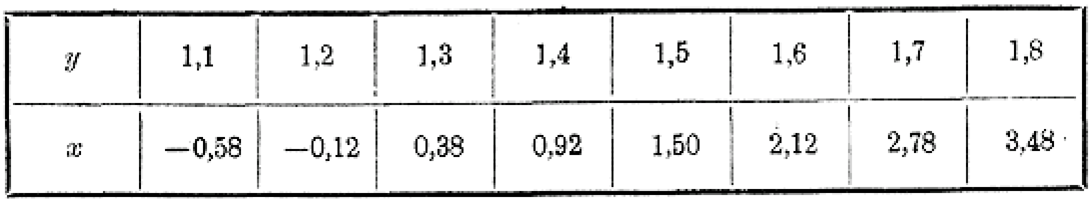
Можно найти координаты точек пересечения точнее, если начертим в более широком масштабе те части графиков, которые лежат около точек пересечения. Заметив, что абсциссы точек пересечения лежат: одна между 0 и 1, другая между 2 и 3 и что ординаты их заключены между 1 и 2, составим такие таблицы:

Для уравнения 1-го



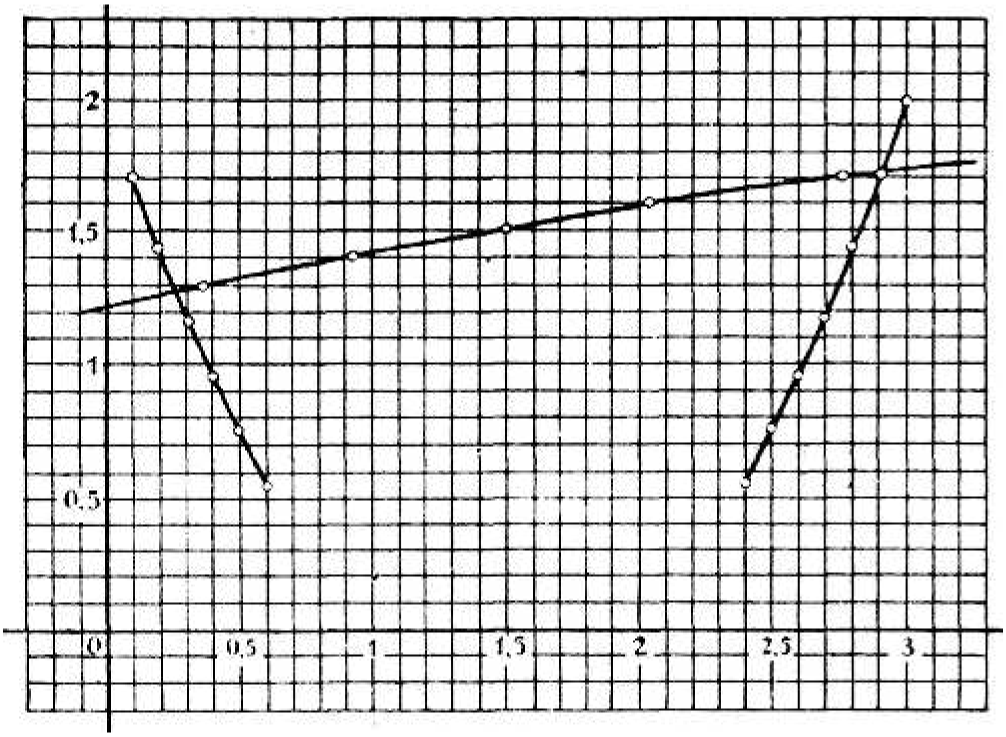
x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6		2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
y	1,71	1,44	1,19	0,96	0,75	0,56		0,56	0,75	0,96	1,19	1,44	1,71	2

Для уравнения 2-го



y	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
x	−0,58	−0,12	0,38	0,92	1,50	2,12	2,78	3,48

Теперь нанесем эти значения на черт. 10:



Из такого чертежа координаты точек пересечения, конечно, могут быть определены точнее (***x* = 0,26, *y* = 1,28; *x* = 2,91, *y* =1,71**).

1) Когда какая-нибудь неизменяющаяся геометрическая фигура перемещается таким образом, что все ее точки движутся по прямым, параллельным между собой, то такое перемещение называется параллельным перенесением.

2) Формулу эту можно вывести, и не прибегая к формуле приведенного уравнения, так: перенеся свободный член направо, умножим все члены на $\mathbf{4a}$:

$$\mathbf{4a^2x^2 + 4abx = — 4ac}.$$

Прибавим к обеим частям уравнения по $\mathbf{b^2}$:

$$\mathbf{4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 — 4ac}. ,$$

т. е.

$$\mathbf{(2ax + b)^2 = b^2 — 4ac}$$

Откуда:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac};\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3) Если квадратное уравнение имеет 2 одинаковых корня; то говорят, что оно имеет двукратный корень или двойной корень. В уравнениях более высоких степеней могут иногда встречаться трекратные и вообще многократные корни.

Напр., уравнение $\mathbf{(x — 5)\ (x — 2)^3 = 0}$ имеет трекратный корень $\mathbf{x = 2}$ и однократный $\mathbf{x = 5}$.

4) Перечеркивание (вертикальной или наклонной чертой) знаков =, > и < означает, что их значение берется в отрицательном смысле: „не равно", „не больше", „не меньше".

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ДЕСЯТЫЙ.

ПРОГРЕССИИ.

Глава первая. **Арифметическая прогрессия.**
Глава вторая. **Геометрическая прогрессия.**
Глава третья. **Бесконечные прогрессии.**

Глава первая.

Арифметическая прогрессия.

239. Задача. Рабочему поручили выкопать колодезь и условились платить ему за первый метр глубины 60 коп., за второй — 75 коп. и т. д., увеличивая плату за каждый следующий метр на 15 коп. Сколько уплатили рабочему, если колодезь был вырыт им в 10 метров глубины?

Для решения задачи надо найти сумму чисел таких:

$$60 + 75 + 90 + 105 + 120 + 135 + 150 + 165 + 180 + 195.$$

Сумму эту мы можем найти проще, чем обыкновенным сложением. Обозначив ее буквою s, напишем две такие строки:

$$s = 60 \quad +75 \quad +90 \quad +105 + 120 + 135 + 150+165 + 180 + 195,$$
$$s = 195+ 180+165 + 150 + 135 + 120 + 105 + 90 \quad +75 \quad + 60.$$

Вторую строку мы написали, переставив слагаемые первой строки в обратном порядке, отчего,конечно, сумма не изменилась. Сложим теперь все числа, стоящие друг под другом:

$$2s = 255 + 255 + 255 + 255 + 255 + 255 + 255 + 255 + 255 + 255,$$

т. е.

$$2s =255•10 = 2550,$$ и следовательно,

$$s = {}^{2550}/_{2} = 1275$$

Таким образом, за всю работу пришлось заплатить **12 р. 75 к**

В этой задаче нам пришлось иметь дело с рядом чисел, последовательно возрастающих на одно и то же число. Подобные ряды носят особое название „прогрессий". Рассмотрим их подробнее.

240. Определение. Арифметической прогрессией ***называется такой ряд чисел, в котором каждое число, начиная со второго, равняется предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для этою ряда числом (положительным или отрицательным).***

Так, два ряда чисел:

10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46,

6, 4, 2, 0, — 2, — 4, — 6

составляют арифметические прогрессии, так как в них каждое число, начиная со второго, равно предыдущему числу, сложенному в первом ряду с положительным числом **4**, а во втором с отрицательным числом **— 2**. Числа, составляющие прогрессию, называются ее членами; их число может быть произвольное. Положительное или отрицательное число, которое надо прибавить к предыдущему члену, чтобы получить последующий, называется разностью прогрессии.

Прогрессия называется возрастающей или убывающей, смотря по тому, увеличиваются ли ее члены по мере удаления, от начала ряда, или уменьшаются; разность возрастающей прогрессии есть число положительное, а убывающей — отрицательное.

Для обозначения того, что ряд представляет собою арифметическую прогрессию, иногда ставят в начале ряда знак ÷ .

Обыкновенно принято обозначать: первый член ***a***, последний ***l***, разность ***d***, число всех членов ***n*** и сумму их **s**.

Ради краткости слова „арифметическая прогрессия" мы будем сокращенно писать так: А. П.

241. Формула любого члена арифметической прогрессии. Пусть имеем прогрессию:

÷ 10, 14, 18, ... (разность 4).

Тогда

2-й член = 10 + 4 = 14;

3-й „ = 10 + 4 + 4 = 10 + 4•2=18;

4-й ,, =10 + 4 + 4 + 4 = 10 + 4•3 = 22. и т. д.

Значит:

10-й член = 10 + 4•9 = 46;

20-й „ = 10 + 4•l9 = 86, и т. д.

Подобно этому, если имеем прогрессию:

÷ 6, 4, 2, . . . (разность — 2), то

2-й член = 6 + (—2) = 4;

3-й „ = 6 + (—2) + (—2) = 6 + (—2) •2 = 2 и т.д.

Напр.: 10-й член = 6 + (—2)•9 = — 12, и т. д. Вообще, если прогрессия будет такая:

÷ ***a, b, c***, ... (разность ***d***), то

2-й. член = ***a* + *d***

3-й „ $= a + d + d = a + 2d$;

4-й „ $= a + 2d + d = a + 3d$, и т. д.

Значит, 10-й член окажется $a + 9d$, 15-й член будет $a + 14d$, вообще m-й член будет $a + d(m - 1)$. Таким образом:

Всякий член А. II., начиная со второго, равен первому ее члену, сложенному с произведением разности прогрессии на число всех членов, стоящих перед определяемым членом.

В частности, последний член равен первому члену, сложенному с произведением разности на число всех членов, уменьшенное на 1, т. е.

$$l = a + d(n - 1)$$

Примеры. 1) Найти 10-й член прогрессии: ÷ **60, 75, 90**,... Так как разность этой прогрессии равна **15**, то 10-й член будет **60 + 15•9 = 195** (см, задачу § 239).

2) Найти 12-й член прогрессии: ÷ **40, 37, 34**, ...

Так как разность здесь равна — **3**, то

12-й член должен быть: **40 + (—3) • 11 = 40 — 33 = 7.**

3) Какое будет n-ое число в последовательном ряду нечетных чисел: **1, 3, 5,. . .**?

Такое число должно быть: **1+ 2 (n —1) =1 + 2n — 2 = 2n — 1**.

Следствие. А. П., у которой первый член есть a, разность d и число членов n, может быть изображена так:

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \dots \quad a + d(n - 1).$$

242. Формула суммы всех членов арифметической прогрессии. Предварительно убедимся в следующем свойстве: ***сумма двух членов А. П., равноотстоящих от концов ее, равна сумме крайних.*** Напр., в прогрессии:

÷ **3, 7, 11, 15, 19, 23,**

находим: **3 + 23 = 26**; **7 + 19 = 26**; **11 + 15 = 26**. Понятно, почему это так: первые слагаемые этих сумм (т. е. 3, 7, 11) идут, все возрастая на 4, а вторые слагаемые (29, 19, 15) идут, все убывая на 4; поэтому сумма их не изменяется. Возьмем еще пример убывающей прогрессии:

÷ **8, 6, 4, 2, 0,—2,—4.**

В ней: **8 + (—4) = 4, 6 + (—2) = 4, 4 + 0 = 4.** Член **2**, отстоящий одинаково от начала и от конца, должен быть сложен сам с собою: **2 + 2 = 4**. И здесь объяснение то же самое: слагаемые **8, 6, 4, 2** идут, все уменьшаясь на **2**, а слагаемые **— 4, — 2, 0** и **2** идут, все увеличиваясь на **2**; от этого сумма их остается без изменения.

Теперь выведем формулу для суммы всех членов любой А. П. Для этого применим тот способ, посредством которого мы нашли сумму членов А. П. в задаче § 239, а именно:

сложим почленно два таких равенства:

$$s = a + b + c + ... + i + k + l$$

$$s = l + k + i + ... + c + b + a$$

$$2s = (a + l)+(b+ k) + (c + i)+...+(i + c) + (k + b) + (l + a).$$

Но $a + l = b + k = c + i = \ ... = l + a$; следовательно,

$2s = (a + l) n$, откуда

$$s = \frac{(a + l)n}{2}$$

т. е. ***сумма всех членов А. П. равна половине произведения суммы крайних членов на число всех членов.***

Таким образом, в задаче § 239 для суммы **s** по этой формуле найдем:

$$s = [(60 + 195) \cdot 10]:2 = 2550:2 = 1275.$$

Пример 1. Найти сумму натуральных чисел от **1** до ***n*** включительно.

Ряд: **1, 2, 3, ...*n*** есть А. П., у которой первый член **1**, разность **1**, число членов ***n*** и последний член тоже ***n*** ; поэтому

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

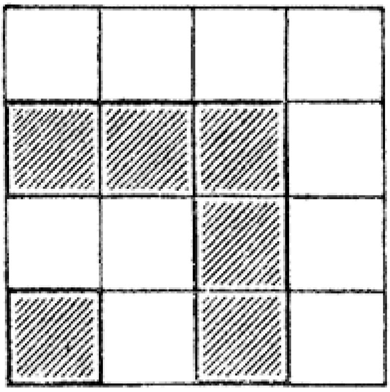
Так: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21.$

Пример 2. Найти сумму первых ***n*** нечетных чисел. Как мы видели в предыдущем параграфе, ***n***-ое нечетное число равно **2*n* —1**; поэтому:

$$s = \frac{[1 + (2n - 1)]n}{2} = n^2$$

Так: $l + 3= 4 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$; $l + 3+ 5 + 7 = 16 = 4^2$, и т. д.

Это свойство суммы нечетных чисел наглядно выражается чертежом , который составлен так: к квадрату (внизу слева) приставлены 3 таких же квадрата (1 сверху, 1 сбоку и 1 в верхнем углу); к этим квадратам приставлены еще 5 квадратов (2 сверху, 2 сбоку и 1 в верхнем правом углу). К ним, далее, приложены 7 квадратов, потом 9 квадратов и т. д. Тогда очевидно, что



$l + 3= 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; $l + 3+ 5 + 7 = 4^2$, и т. д.

Пример 3. Найти сумму 10 членов прогрессии:

$$\div\ 3,\quad 2^{1}/_{2},\quad 2,\ \ldots$$

Здесь $a = 3$, $d = 2^{1}/_{2} — 3 = {}^{1}/_{2}$;
поэтому 10-й член прогрессии будет $3 — {}^{1}/_{2} \cdot 9 = — {}^{1}/_{2}$,
и потому искомая сумма равна:

$$\frac{[3 + (-1\ ^{1}/_{2})]\ 10}{2} = 1\frac{1}{2} \cdot 5 = 7\frac{1}{2}$$

Поверка: $3 + 2^{1}/_{2} + 2 + 1^{1}/_{2} + 1 + {}^{1}/_{2} + 0 — {}^{1}/_{2} — 1 — 1^{1}/_{2} = 7^{1}/_{2}$

243. Замечание. Так как для 5 чисел ***a, l, d, n*** и ***s*** мы имеем два уравнения:

$$l = a + d(n-1) \quad \text{и} \quad s = \frac{(a+l)n}{2},$$

то по данным трем из этих чисел можем находить остальные два. Для примера решим следующую задачу:

Найти число членов прогрессии, у которой первый член **7**, разность — **2** и сумма всех членов **12**.

В этой задаче даны: ***a* = 7, *d* = — 2** и ***s* =12**; остаются неизвестными ***l*** и ***n***. Подставив в уравнение заданные числа, находим:

$$l = 7 - 2(n-1) = 9 - 2n; \quad 12 = \frac{(7+l)n}{2},$$

откуда

$$12 = \frac{(7+9-2n)n}{2} = (8-n)n;$$

$$n^2 - 8n + 12 = 0; \quad n = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2;$$

$$n_1 = 6, \qquad n_2 = 2.$$

Получаются два ответа: число членов или **6**, или **2**. И действительно, две прогрессии: **7, 5, 3, 1 — 1, — 3** и **7, 5** имеют одну и ту же сумму **12**.

244. Формула суммы квадратов чисел натурального ряда.

При решении некоторых математических вопросов приходится пользоваться не только формулою, определяющею сумму чисел натурального ряда, но и формулой, определяющей сумму квадратов этих чисел. Формулу эту можно вывести следующим образом: Возьмем ***n*** таких числовых тождеств (отдел 2 глава 3 § 61, г):

$$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$3^3 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$4^3 = (3 + 1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 + 1^3$$

……………………………………………………………

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 \cdot 1 + 3n \cdot 1^2 + 1^3.$$

Сложим все эти тождества. Тогда 2^3, стоящее в левой части первого равенства, взаимно уничтожится с 2^3, стоящим в правой части второго равенства, 3^3 в левой части второго равенства уничтожится с 3^3 в правой части- третьего равенства, и т. д. После такого уничтожения получим:

$$(n + 1)^3 = 1 + 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 \ldots + n) + n.$$

Обозначив для краткости:

$$1 + 2 + 3 \ldots + n = S_1, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = S_2,$$

мы будем иметь;

$$(n + 1)^3 = 1 + 3S_1 + 3S_2 + n,$$

откуда:

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - n}{3} - S_1 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} - S_1.$$

Но

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n = n^2(n+2) + n(n+2) =$$
$$= (n+2)(n^2+n) = n(n+1)(n+2);$$

поэтому:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - S_1.$$

Из равенства

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

находим:

$$n(n+1) = 2S_1.$$

Следовательно:

$$S_2 = \frac{2S_1(n+2)}{3} - S_1 = S_1\left[\frac{2(n+2)}{3} - 1\right] = S_1 \cdot \frac{2n+1}{3},$$

или

$$S_2 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Например:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3(3+1)(6+1)}{6} = 14;$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4(4+1)(8+1)}{6} = 30, \text{ и т. д.}$$

Глава вторая.

Геометрическая прогрессия.

245. Задача. Говорят, что индийский принц Сирам предложил изобретателю шахматной игры просить у него награды, какую он хочет. Тот попросил, чтобы ему дали за первый квадрат шахматной доски 1 пшеничное зерно, за второй квадрат 2 зерна, за третий 4 и т. д., увеличивая вдвое за каждый из следующих квадратов. Принц согласился. Но когда подсчитали количество пшеницы, которое следует выдать за все 64 квадрата шахматной доски, то оказалось, что награда в этом размере не может быть выдана по недостатку пшеницы. Сколько же зерен пришлось бы выдать изобретателю?

Количество зерен, которое надлежало бы выдать за все 64 квадрата, равно сумме **s** следующего ряда чисел:

$$2s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}.$$

Мы можем найти эту сумму так: умножим обе части написанного равенства на 2:

$$2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63} + 2^{64}$$

Теперь вычтем из этого равенства предыдущее; тогда получим:

$$s = 2^{64} — 1.$$

Значит, придется вычислить степень 2^{64}, что можно сделать или последовательным умножением на 2 по формуле:

$$2^{64} = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2. .. \text{ (64 множителя)}$$

или по формуле:

$$2^{64} = [(2^{16})^2]^2 = (65\ 536^2)^2;$$

окончательное число зерен будет:

$$s = 2^{64} — 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Можно вычислить, что если бы такое число зерен рассыпать равномерно по всей земной суше, то образовался бы слои пшеницы толщиною около 9 мм.

В этой задаче мы имеем дело с рядом чисел, из которых каждое, начиная со второго, равно предыдущему числу, умноженному на одно и то же число. Такие ряды чисел называются геометрическими прогрессиями. Рассмотрим их подробнее.

246. Определение. ***Геометрической прогрессией называется такой ряд чисел, в котором каждое число, начиная со второго, равняется предшествуюгцему, умноженному на одно и то же число, постоянное для этого ряда.*** Так три ряда:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128, ...;$$

$$8,\ —16,\ 32,\ —64,\ 128,\ —256,\ 512;$$

$$20,\ 10,\ 5,\ {}^{5}/_{2},\ {}^{5}/_{4},\ {}^{5}/_{8},\ {}^{5}/_{16},\ {}^{5}/_{32}$$

составляют геометрические прогрессии, потому что в этих рядах каждое число, начиная со второго, получается из предшествующего умножением: в первом ряду на **2**, во втором на —**2** и в третьем на $^{1}/_{2}$,

Для обозначения того, что данный ряд есть прогрессия геометрическая, иногда ставят в начале его знак -∺-.

Как и в арифметической прогрессии, числа, составляющие геометрическую прогрессию называются ее членами; число,на которое надо умножить предыдущий член, чтобы получить последующий, называется знаменателем прогрессии.

Прогрессия называется возрастающею или убывающею, смотря по тому, увеличивается или уменьшается абсолютная величина членов прогрессии по мере удаления от начала ряда; так, из трех указанных выше прогрессий первая и вторая — возрастающая, а третья — убывающая. В возрастающей прогрессии абсолютная величина знаменателя больше 1, в убывающей она меньше 1.

Обыкновенно знаменатель прогрессии обозначают буквою q, а члены, число их и сумму обозначают так же, как это принято для арифметической прогрессии, т. е. $a, b, c, \ldots l$ (последний член), n (число членов) и s (сумма).

Для краткости слова „геометрическая прогрессия" мы будем сокращенно писать так: Г. П.

247. Сравнение Г. П. с А. П. Разность двух рядом стоящих членов в А. П. остается одна и та же, вследствие чего члены ее возрастают или убывают равномерно. Посмотрим, какова будет разность двух соседних членов в Г. П.:

-∺- $a, b, c, \ldots$ (знаменатель q).

Из определения прогрессии следует: $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$ и т. д.; следовательно:

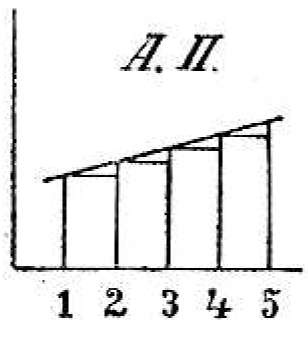
$$b - a = aq - a = a(q-1);$$

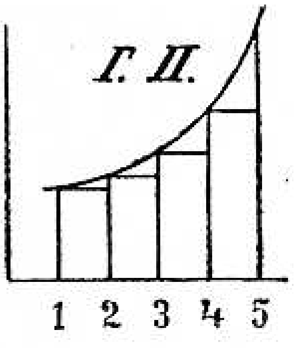
$$c - b = bq - b = b(q-1), \text{ и т. д.}$$

Если прогрессия возрастающая и члены ее положительные, то тогда $a < b < c < \ldots$ и т. д.; поэтому и $a(q-1) < b(q-1) < c(q-1) < \ldots$, т. е.

$$b - a < c - b < d - c < \ldots \text{ и т. д.}$$

Значит, в возрастающей Г. П. с положительными членами ***разность двух соседних членов увеличивается по мере удаления их от начала ряда***; вследствие этого члены такой прогрессии, по мере их удаления от начала ряда, возрастают все быстрее и быстрее, что наглядно изображено на чертеже (правом).





Напр.

÷ **2, 4, 6, 8, 10, 12,...**

∺ **2, 4, 8, 16, 32, 64,...**

248. Формула любого члена Г. П. Пусть мы имеем такую Г. II.

∺ **3, 6, 12, 24,...** (знаменатель 2).

Тогда

2-й член = $3 \cdot 2 = 6$;

3-й „ $= 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 = 12$;

4-й „ $= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 24$, и т.д.

Напр., 10-й член = $3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$, и т. д.

Подобно этому, если мы имеем прогрессию:

∺ **10, 5,** $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$... (знаменатель $\frac{1}{2}$)

то

2-й член = $10 \cdot \frac{1}{2} = 5$;

3-й „ $10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$;

4-й „ $10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$ и т. д.;

Возьмем теперь прогрессию в буквенном виде:

∺ $a, b, c, \dots$ (знаменатель q).

Согласно определению Г. П., находим:

2-й член = $aq = aq^1$;

3 „ „ $= aq \cdot q = aq^2$;

4 „ „ $= aq^2 \cdot q = aq^3$, и т.д.

Таким образом, 10-й член = aq^9, вообще m-й член = aq^{m-1} . Значит: ***всякий член Г. П., начиная со второго, равен первому члену, умноженному на такую степень знаменателя, которой показатель есть число членов, предшествующих определяемому.*** [1)]

В частности, последний член l, которому предшествует $n - 1$ членов, выразится формулой:

$$l = aq^{n-1}$$

Пример 1. Найти 6-й член прогрессии ÷÷ **3, 12,**...

Знаменатель такой прогрессии есть **12:3 = 4;** поэтому 6-й член = $\mathbf{3 \cdot 4^5 = 3072}$.

Пример 2. Найти 10-й член прогрессии ÷÷ **20, 10,**...

Так как знаменатель этой прогрессии равен **10:20** = $^1/_2$, то 10-й член равен

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 20 \cdot \frac{1}{2^9} = 5 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{5}{2^7} = \frac{5}{128}.$$

Замечание. Геометрическую прогрессию, у которой первый член есть a, знаменатель q и число всех членов n, можно изобразить так:

$$\div\div\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \dots,\ aq^{n-1}$$

249. Формула суммы всех членов Г. П. Применим тот прием, которым мы раньше (§ 245) нашли сумму $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$

Умножим обе части равенства:

$$s = a + b + c + \dots + k + l \qquad (1)$$

на знаменатель q; тогда получим:

$$sq = aq + bq + cq + \dots + kq + lq\ .$$

Но

$$aq = b,\quad bq = c,\quad cq = d,\ \dots,\quad kq = l\ ;$$

следовательно,

$$sq = b + c + d + \dots + l + lq \qquad (2)$$

Вычтя почленно из равенства (2) равенства (1), найдем:

$$sq - s = lq - a, \text{ т. е. } (q - 1)\, s = lq - a, \text{ откуда:}$$

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}$$

Значит, гумма всех членов Г. П. ***равна дроби, у которой числитель есть разность между произведением последнего члена на знаменатель Г. II. и первым членом ее, а знаменатель есть разность между знаменателем прогрессии и единицей.***

Замечание. Так как для прогрессии убывающей $lq < a$ и $q < 1$, то для такой прогрессии лучше придать формуле суммы иной вид, умножив числитель и знаменатель дроби на —1:

$$s = \frac{a - lq}{1 - q}$$

Пример. Найти сумму 8 членов прогрессии, у которой $a = 1$ и $q = {}^1/_3$.

Тогда

$$l = 1 \cdot (^1/_3)^7 = (^1/_3)^7$$

и

$$S = \frac{1-(^1/_3)^7 \cdot {}^1/_3}{1-{}^1/_3} = \frac{1-(^1/_3)^8}{^2/_3} = \frac{3-3\,(^1/_3)^8}{2} = \frac{3280}{2187}$$

250. Пример задачи на Г. П. Найти первый член ***a*** и последний ***l***, если $q = 3$, $n = 5$ и $s = 242$.

Сначала находим ***l*** по формуле $l = aq^{n-1} = a \cdot 3^4$ и затем эту величину и данные числа подставим в формулу для суммы:

$$242 = \frac{a \cdot 3^4 \cdot 3 - a}{3-1} = \frac{a\,(3^5-1)}{2} = 121a,$$

откуда:

$$a = 242:121 = 2.$$

Теперь находим:

$$l = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

Поверка:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242.$$

Глава третья.

Бесконечные прогрессии.

251. Некоторые свойства таких прогрессий. Если ряд чисел, составляющих прогрессию, может быть продолжаем без конца, то прогрессия называется бесконечной. Рассмотрим некоторые свойства таких прогрессий.

а) Возьмем бесконечную возрастающую А. П., у которой разность очень мала, напр, такую:

÷ 1; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04,.,.

Несмотря на то, что члены этой прогрессии, при удалении от начала ряда, растут очень медленно, они, однако, при достаточном удалении могут превзойти любое данное число, как бы велико оно ни было; напр., они могут сделаться больше 1 000 000. Действительно, для того, чтобы ($n + 1$)-й член такой прогрессии, равный сумме $1 + 0{,}01n$, мог сделаться больше 1 000 000, достаточно для ***n*** взять такое большое число, которое удовлетворяло бы неравенству:

$$1 + 0{,}01n > 1\,000\,000$$

Из него находим:

$$n > \frac{999\,999}{0{,}01} = 99\,999\,900.$$

Так как в бесконечной прогрессии число **n** может сделаться как угодно большим, то оно может сделаться больше 99 999 900; и тогда $\mathbf{1 + 0{,}01}\boldsymbol{n}$ сделается больше 1000 000.

Рассуждение это можно повторить о всякой арифметической возрастающей бесконечной прогрессии; поэтому мы можем высказать такое общее заключение: ***член бесконечной возрастающей А. П., при достаточном его удалении от начала ряда, может превзойти любое данное число, как бы оно велико ни было.***

б) Возьмем теперь бесконечную возрастающую Г. П. с положительными членами, напр, такую:

$$∺\ \mathbf{1;\ \ 1{,}01;\ \ 1{,}01^2 = 1{,}0201;\ \ 1{,}01^3 = 1{,}030301;\ldots} \text{(знам. } \mathbf{1{,}01}\text{)},$$

и сравним ее с бесконечной А. П.:

$$\div\ \mathbf{1;\ \ 1{,}01;\ \ 1{,}02;\ \ 1{,}03;\ldots}\ \text{(разность } \mathbf{0{,}01}\text{)},$$

у которой первые два члена одинаковы со взятой нами Г. П.

Как мы видели раньше, члены Г. П. возрастают быстрее, чем члены А. П. Но член взятой нами А. П., при достаточном удалении от начала ряда, может превзойти любое число, например может сделаться больше 1000 000; значит, соответствующий член нашей Г. П. и подавно может сделаться больше всякого числа.

Таким образом, ***член бесконечной возрастающей Г. П. (с положительными членами), при достаточном удалении его от начала ряда, может превзойти любое данное число.***

Свойство это применимо и к такой возрастающей Г. П., у которой члены, все или некоторые, отрицательные числа (например — 5, —10, —20,... или 5, —10, 20, —40,...); тогда надо только говорить не о самих членах, а об их абсолютной величине.

в) Возьмем какой-нибудь пример бесконечной убывающей Г. П. с положительными членами, например такой:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ldots \frac{1}{2^n},\ldots\ \left(\text{знаменатель } \frac{1}{2}\right).$$

Члены такой прогрессии при удалении их от начала ряда, конечно, уменьшаются, но могут ли они при этом сделаться меньше всякого данного положительного числа, например меньше 0,000001, это сразу не видно. Чтобы обнаружить это, возьмем вспомогательную прогрессию, члены которой обратны членам взятой нами прогрессии:

$$\mathbf{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots\ 2^n},\ldots\ \text{(знаменатель 2)}.$$

Прогрессия эта возрастающая, и потому, как мы сейчас видели, члены ее могут превзойти любое данное число; значит, они превзойдут и 1 000 000. Если же окажется, что

$\mathbf{2^n > 1\ 000\ 000}$, то тогда, очевидно:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1\,000\,000}.$$

Применим это рассуждение к какой-угодно бесконечной убывающей Г. П. (с положительными членами):

$\div\div$ ***a, b, c,...*** (знаменатель $q < 1$).

Чтобы показать, что член этой прогрессии, при достаточном удалении его от начала ряда, может сделаться меньше любого положительного числа **N**, возьмем вспомогательную Г. П.:

$$\div\div \frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ \frac{1}{aq^2},\ \frac{1}{aq^3},\cdots\ \frac{1}{aq^n}\ \left(\textbf{знаменатель}\ \frac{1}{q} > 1\right).$$

Прогрессия эта возрастающая, так как ее знаменатель >1. Но член возрастающей Г. П. может превзойти всякое данное число; следовательно, он превзойдет и число $^1/_N$ Поэтому при достаточно большом ***n*** будет удовлетворено неравенство:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{N},\ \text{и тогда}\ aq^n < N.$$

Итак, ***член бесконечной убывающей Г. П., при достаточном удалении его от начала ряда, может сделаться меньше любого данного положительною числа.***

252. Понятие о пределе. Положим, что в бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots$$

мы взяли 10 членов от начала; тогда последний (10-й) член будет $\mathbf{(^1/_2)^9}$, а сумма этих 10 членов (которую обозначим s_{10}) будет:

$$s_{10} = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{1 - (^1/_2)^9 \cdot {}^1/_2}{1 - {}^1/_2} = \frac{1 - (^1/_2)^{10}}{^1/_2} = 2 - (^1/_2)^9$$

Подобно этому, найдем:

$$s_{11} = 2 - \frac{1}{2^{10}};\ s_{12} = 2 - \frac{1}{2^{11}}\ ;\ \ldots\ s_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Мы видим, что по мере увеличения числа членов сумма их приближается все более и более к **2**. Так сумма s_{n+1} меньше **2** на дробь $\mathbf{(^1/_2)^{\mathit{n}}}$, а эта дробь, как мы видели, при достаточно большом ***n***, делается меньшей любого данного положительного числа.

Если какое-нибудь переменное число (в нашем примере сумма членов прогрессии), изменяясь, приближается все более и более к некоторому постоянному числу (в нашем примере к числу **2**) так, что разность между этим числом и переменным делается меньшей любого данного положительного числа, как бы мало оно ни было, то это постоянное число называется пределом переменного[2)].

Заметив это, мы можем сказать, что переменная сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ \ldots\ +\frac{1}{2^n}$$

при неограниченном возрастании ***n*** стремится к пределу 2, что на письме выражают так:

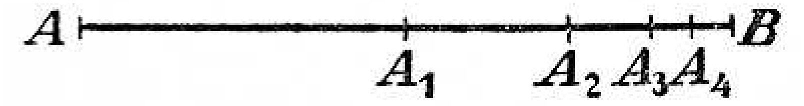
$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\longrightarrow 2,$$
$$\text{если } n\longrightarrow\infty$$

(стрелки заменяют собою слово „стремится"), или пишут так:

$$\text{пред.}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)_{n=\infty}=2$$

Здесь „пред." есть сокращенное слово „предел", а добавление внизу скобки: ***n*** = ∞ заменяет собою фразу: „когда ***n*** неограниченно увеличивается" (когда ***n*** стремится к ∞).

Можно наглядно показать, что рассматриваемая сумма приближается неограниченно близко к 2.



Пусть отрезок **AA_1 =1 AB=2**.
Тогда **1+ $^1/_2$ = AA_2 ; 1+$^1/_2$ + $^1/_4$= AA_3 ; 1+$^1/_2$ + $^1/_4$+ $^1/_8$= AA_4** и т.д.; ясно, что при увеличении числа членов прогрессии мы неограниченно придвигаемся к точке **B**, и, значит, сумма **1+$^1/_2$ + $^1/_4$...** стремится к отрезку **AB = 2**.

253. Формула предела суммы убывающей. Если в бесконечной Г П.:

$$\div\div\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ .\ .\ .(q<1)$$

возьмем ***n*** членов от начала, то последний член будет aq^{n-1}, и сумма их будет:

$$s_n=\frac{a-lq}{1-q}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Предположим, что ***n*** неограниченно увеличивается. Тогда число $\frac{a}{1-q}$ остается неизменным, а дробь $\frac{aq^n}{1-q}$ все уменьшается, и притом неограниченно, так как числитель ее, как мы видели раньше, делается меньше любого данного положительного числа, а знаменатель остается неизменным. Значит:

$$s_n \longrightarrow \frac{a}{1-q}, \text{ если } n \longrightarrow \infty$$

Таким образом, ***при неограниченном увеличении числа членов убывающей Г. П. сумма их стремится к пределу, равному частному от деления первого члена прогрессии на избыток единицы над знаменателем прогрессии.***

Так:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n} \longrightarrow \frac{1}{1-{}^1\!/_2}=2.$$
$$\text{если } n \longrightarrow \infty$$

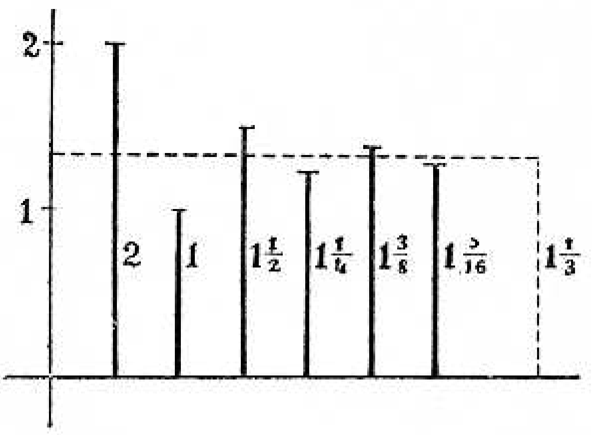
Замечание. Это свойство принадлежит Г. П. и при отрицательном знаменателе. Например, предел суммы членов Г. П.:

-÷÷- 2 ; — 1 ; + $^1/_2$; —$^1/_4$; + $^1/_8$; + $^1/_{16}$ **...**

у которой ***q*** = $^1/_2$ и ***a*** = **2**, равен:

$$\frac{2}{1-(-{}^1\!/_2)}=\frac{2}{{}^3\!/_2}=\frac{4}{3}=1{}^1\!/_3$$

На чертеже изображен ряд ординат, наглядно выражающих сравнительную величину одного, двух, трех, четырех и т. д. членов данной прогрессии. Ординаты эти поочередно становятся то большими **1$^1/_3$**, то меньшими **1$^1/_3$**, приближаясь к этому числу все более и более.



254. Применение Г. П. к десятичным периодическим дробям. Возьмем следующие два примера десятичных периодических дробей (чистых, т. е. таких, у которых период начинается тотчас после запятой): 1) 0,999... и 2) 0,232323...

Дроби эти представляют собою суммы:

$$1)\ \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\cdots$$
$$2)\ \frac{23}{100}+\frac{23}{10\,000}+\frac{23}{1\,000\,000}+\cdots$$

Слагаемые этих сумм суть члены бесконечных убывающих Г. П., у которых знаменатели прогрессии: у первой $^1/_{10}$, у второй $^1/_{1000}$. Суммы эти стремятся к пределам, равным:

$$1)\ \frac{^9/_{10}}{1-{}^1/_{10}}=\frac{9}{10-1}=\frac{9}{9}=1;$$

$$2)\ \frac{^{23}/_{100}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{23}{100-1}=\frac{23}{99}.$$

Из этих примеров видно, что ***чистая периодическая дробь равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель есть период, а знаменатель цифра .9, повторенная столько раз, сколько цифр в периоде.***

Надо только иметь в виду, что в этой фразе слова: „чистая периодическая дробь" поставлены ради краткости; подробнее надо было бы сказать: предел, к которому стремится чистая периодическая дробь, когда число периодов возрастает, равен и т. д.

Возьмем теперь два примера периодических дробей смешанных (т. е. таких, у которых период начинается не тотчас после запятой): 3) 0,2888... и 4) 0,3545454... Дроби эти можно представить в виде суммы:

$$3)\ \frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10\,000}+\dots$$

$$4)\ \frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100\,000}+\frac{54}{10\,000\,000}+\dots$$

Слагаемые этих сумм, начиная со второго, суть члены бесконечных убывающих Г. П.; в 3-й сумме знаменателем служит дробъ $^1/_{10}$ в 4-й сумме —дробь $^1/_{100}$ Поэтому пределы, к которым стремятся эти суммы, будут:

$$3)\ \frac{2}{10}+\frac{^8/_{100}}{1-{}^1/_{10}}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}=\frac{2}{10}+\frac{3}{90}=$$
$$=\frac{2\cdot9+8}{90}=\frac{2\cdot10-2+8}{90}=\frac{28-2}{90}=\frac{26}{90}=\frac{13}{45};$$

$$4)\ \frac{3}{10}+\frac{^{54}/_{1000}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000-10}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=$$
$$=\frac{3\cdot99+54}{990}=\frac{3\cdot100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}=\frac{351}{990}=\frac{39}{110}.$$

Из этих примеров видно, что ***смешанная периодическая дробь равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель есть число, стоящее до второго периода, без числа, стоящего до первого периода, а знаменатель есть цифра 9, повторенная столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями на конце, сколько цифр между запятой и периодом.***

Здесь тоже надо сделать замечание, что разумеется не сама периодическая дробь, а предел, к которому она стремится.

1) Правило это, равно как и аналогичное правило для арифметической прогрессии (§241), мы имеем право применить и к первому члену, если примем во внимание, что число членов, предшествующих первому члену, равно нулю. Действительно, применяя эти правила к первому члену прогрессии, получим:

$$a = a + d \cdot 0 \text{ и } a = aq^0.$$

Но $d \cdot 0 = 0$ и $q^0 = 1$ (отдел 2 глава 4§ 65). Следовательно, равенства эти дают верные результаты:

$$a = d + 0 = d; \quad a = a \cdot 1 = a$$

2) Более точное определение предела будет дано в главе о пределах (часть 2-я).

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ОДИННАДЦАТЫЙ.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЯХ.

Глава первая. **Целые показатели.**
Глава вторая. **Дробные показатели.**
Глава третья. **Некоторые свойства степени с рациональным показателем.**
Глава четвертая. **Понятие об иррациональном показателе.**
Глава пятая. **Показательная функция.**

Глава первая.

Целые показатели.

255. Свойства целых положительных показателей. Показатели степени до сего времени предполагались нами целыми и положительными, причем мы им придавали смысл, выражаемый в следующем определении:

Возвысить число a в степень с целым и положительным показателем n — значит найти произведение n одинаковых сомножителей $aaa...a$.

Перечислим свойства этих показателей, известные нам из предыдущих глав алгебры:

1) при умножении степеней одного и того же числа показатели их складываются (Отдел 2 глава 3 § 53);

2) при делении степеней одного и того же числа показатель делителя вычитается из показателя делимого, если показатель делителя не больше показателя делимого (Отдел 2 глава 4 § 64);

3) всякое число, возвышенное в нулевую степень, дает 1 (Отдел 2 глава 4 § 65);

4) от возвышения отрицательного числа в степень с четным показателем получается положительное число, а с нечетным показателем— отрицательное (Отдел 6 глава 1§ 153);

5) чтобы возвысить в степень произведение, достаточно возвысить в эту степень каждый сомножитель отдельно (Отдел 6 глава 1§ 154, а);

6) чтобы возвысить степень в степень, достаточно перемножить показатели этих степеней (Отдел 6 глава 1§ 154,6);

7) чтобы возвысить в степень дробь, достаточно возвысить в эту степень отдельно числитель и знаменатель (Отдел 6 глава 1§ 154, в);

8) чтобы возвысить радикал в степень, достаточно возвысить в эту степень подкоренное число (Отдел 8 глава 4§ 205, г);

9) чтобы извлечь корень из степени, достаточно разделить показатель степени на показатель корня, если такое деление выполняется нацело (Отдел 6 глава 4§ 168,6).

Теперь мы расширим понятие о показателях, введя показатели отрицательные и дробные, которые до сего времени мы не употребляли. Мы увидим при этом, что ***все свойства целых положительных показателей сохраняются и для показателей отрицательных и дробных.***

256. Отрицательные целые показатели. Мы видели (Отдел 2 глава 4 § 64), что при делении степеней одного и того же числа показатель делителя вычитается из показателя делимого в том случае, если показатель делителя не больше показателя делимого. Теперь мы условимся производить вычитание показателей и в том случае, когда показатель делителя больше показателя делимого; тогда мы получим в частном букву с отрицательным показателем; например: $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Таким образом, число с отрицательным показателем мы условимся употреблять для обозначения частного от деления степеней этого числа в том случае, когда показатель делителя превосходит показатель делимого на столько единиц, сколько их находится в абсолютной величине отрицательного показателя. Так, a^{-2} означает частное $a : a^3$, или $a^2 : a^4$, или $a^3 : a^5$, вообще частное $a^m : a^{m+2}$.

Понимаемое в этом смысле ***число с отрицательным показателем равно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель — то же число, но с положительным показателем, равным по абсолютной величине отрицательному показателю.***

Действительно, согласно нашему условию, мы должны иметь:

$$a^{-1}=\frac{a^m}{a^{m+1}};\quad a^{-2}=\frac{a^m}{a^{m+2}};\quad x^{-3}=\frac{x^m}{x^{m+3}}\ \text{и т. д.}$$

Сократив две первые дроби на a^m и третью дробь на x^m (т. е. в обоих случаях сократив дроби на числитель), получим:

$$a^{-1}=\frac{1}{a};\quad a^{-2}=\frac{1}{a^2};\quad x^{-3}=\frac{1}{x^3}\ \text{и т. д.}$$

Вообще

$$a^{-n}=\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}.$$

Заметим, что отрицательные показатели дают возможность представить всякое дробное алгебраическое выражение под видом целого; для этого стоит только все множители знаменателя перенести множителями в числитель, взяв их с отрицательными показателями. Например:

$$\frac{3a}{b^2c^3}=3a\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^3}=3ab^{-2}c^{-3}.$$

Само собою разумеется, что такое преобразование данного выражения в целое есть только изменение одного внешнего вида выражения, а не содержания его.

257. Действия над степенями с отрицательными показателями. Убедимся теперь, что все действия над степенями с отрицательными показателями можно производить по тем же правилам, какие были прежде выведены для показателей положительных. Достаточно обнаружить это только для умножения и возвышения в степень, так как правила обратных действий — деления и извлечения корня — составляют простое следствие правил прямых действий — умножения и возвышения.

Умножение. Предстоит показать, что при умножении степеней показатели одинаковых букв складываются и в том случае, когда эти показатели отрицательные. Например, убедимся, что:

$$a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{-2+(-3)} = a^{-5}$$

Действительно, заменив степени с отрицательными показателями дробями и произведя действие умножения по правилам, относящимся к дробям, получим:

$$a^{-2} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}.$$

Подобно этому:

$$x^{-4} \cdot x^3 = x^{-4+3} = x^{-1}$$

так как

$$x^{-4} \cdot x^3 = \frac{1}{x^4} \cdot x^3 = \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Возвышение в степень. Надо показать, что при возвышении в степень показатели этих степеней перемножаются и в том случае, когда они отрицательные. Например, убедимся, что

$$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3) \cdot (-4)} = a^{12}$$

Действительно:

$$(a^{-3})^{-4} = \frac{1}{(a^{-3})^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^3}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{12}}\right)} = a^{12}$$

Подобно этому:

$$(x^3)^{-4} = a^{-12}$$

потому что

$$(x^3)^{-4} = \frac{1}{(x^3)^4} = \frac{1}{x^{12}} = x^{-12}.$$

Примеры.

1) $(3a^{-2}b^2c^{-3})(0{,}8ab^{-3}c^4) = 2{,}4a^{-1}b^{-1}c.$

2) $(x^{-1}y^3z^2):(5x^2y^{-2}z^3) = {}^1/_5x^{-3}y^5z^{-1}.$

3) $(2ax^{-3})^{-2} = 2^{-2}a^{-2}x^6.$

4) $(x^{-2} - y^{-1})^2 = (x^{-2})^2 - 2x^{-2}y^{-1} + (y^{-1})^2 = x^{-4} - 2x^{-2}y^{-1} + y^{-2}.$

5) $(a^{-2} + b^{-3})(a^{-2} - b^{-3}) = a^{-4} - b^{-6}.$

6) $\sqrt[3]{27\,p^{-9}q^{-3}} = 3p^{-3}q^{-1}.$

Глава вторая.

Дробные показатели.

258. В каком смысле употребляются дробные показатели.

Мы видели (Отдел 6 глава 4§ 168,6), что при извлечении корня из степени делят показатель степени на показатель корня, если такое деление выполнется нацело; например: $\sqrt{a^4} = a^2$, $\sqrt[3]{x^9} = x^3$ и т. п. Условимся теперь распространить это правило и на те случаи, когда показатель степени не делится нацело на показатель корня. Например, мы условимся принимать, что

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}; \quad \sqrt[3]{z^5} = z^{\frac{5}{3}}$$

Вообще мы условимся, что ***выражение*** $a^{\frac{m}{n}}$ ***означает корень, показатель которого есть знаменатель, а показатель подкоренного числа — числитель дробного показателя*** (т. е. $\sqrt[n]{a^m}$).

Условимся еще допускать и отрицательные дробные показатели в том же смысле, в каком мы допустили отрицательные целые показатели; например, условимся, что

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{a^m}{a^{m+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

Замечание. Дробные показатели были введены в алгебру главным образом голландским инженером Симоном Стевином в начале XVII столетия Позднее, в конце XVII столетия, Оксфордский профессор Джон Валлис ввел в употребление отрицательные показатели.

259. Основное свойство дробного показателя. ***Величина степени с дробным показателем не изменится, если мы умножим или разделим на одно и то же число (отличное от нуля) числитель и знаменатель дробного показателя.*** Так:

$$a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{9}{6}} = \ldots; \quad x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$$

Вообще

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}.$$

Действительно, знаменатель дробного показателя означает показатель корня, а числитель его означает показатель подкоренного выражения, а такие показатели, как мы видели (Отдел 8 глава 4 § 202), можно умножать и делить на одно и то же число.

Основываясь на этом свойстве, мы можем ***преобразовывать дробный показатель совершенно так же, как и обыкновенную дробь***: например, мы можем сокращать дробный показатель, или приводить несколько дробных показателей к одному знаменателю.

260. Действия над степенями с дробными показателями. Предстоит показать, что к дробным показателям применимы правила, выведенные раньше для целых показателей. Это достаточно обнаружить только для умножения и возвышения в степень, так как правила деления и извлечения корня составляют следствие правил умножения и возвышения в степень.

Умножение. Докажем, что при умножении показатели степеней одинаковых букв складываются и тогда, когда эти показатели дробные. Например, убедимся, что

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{10+12}{15}} = a^{\frac{22}{15}}$$

Для этого изобразим степени с дробными показателями в виде радикалов и произведем умножение по правилу умножения радикалов (Отдел 8 глава 4 § 205,6):

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[15]{a^{10}} \cdot \sqrt[15]{a^{12}} = \sqrt[15]{a^{22}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

Результат получился тот самый, какой мы получили после сложения показателей; значит, правило о сложении показателей (при умножении) можно применять и для дробных показателей.

Таким образом:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}};$$
$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

Возвышение в степень. Докажем, что при возвышении степени в степень показатели этих степеней можно перемножить и тогда, когда эти показатели дробные. Напр., убедимся, что

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}.$$

Действительно, заменив радикалами степени с дробными показателями, получим:

$$\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[15]{a^8} = a^{\frac{8}{15}}$$

Если показатели не только дробные числа, но и отрицательные, то и тогда к ним можно применять правила, доказанные раньше для положительных показателей. Напр.:

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} =$$
$$= a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

261. Примеры на действия с дробными и отрицательными показателями.

$$1)\ \left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\left[a^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]=a-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)^2=$$

$$=a-b-c+2\,b^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{2}}=a-b-c+2\sqrt{bc}.$$

$$2)\ \sqrt{12a^{-4}b^{3}}:\left[\left(\frac{a^{3}}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}=\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}\right):\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^{2}}=$$

$$=2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}=2b^{3}\sqrt{ab}.$$

Глава третья.

Некоторые свойства степени с рациональным показателем.

262. Допустим, что в степени a^x основание a есть какое-нибудь положительное число, большее или меньшее 1, а показатель x любое рациональное число, положительное или отрицательное, целое или дробное. Кроме того предположим, что когда x есть какая-нибудь дробь, напр., $^{3}/_{2}$, т. е. когда степень a^x представляет собою радикал $\sqrt{a}^{3}$, то из возможных значений этого радикала мы берем только одно арифметическое, т. е. положительное.

При этих условиях степень a^x обладает следующими свойствами:

а) ***При всяком значении рационального показателя x степень a^x есть число положительное.***

Действительно, если x есть целое положительное число, напр. **3**, то ах представляет собой произведение ***aaa*** положительных чисел, и потому оно положительно.

Если x есть положительная дробь, напр. $^{3}/_{2}$, то a^x означает $\sqrt{a}^{3}$, а мы условились из всех значений радикала брать только положительное.

Если x есть отрицательное число, напр.— $^{3}/_{4}$, то

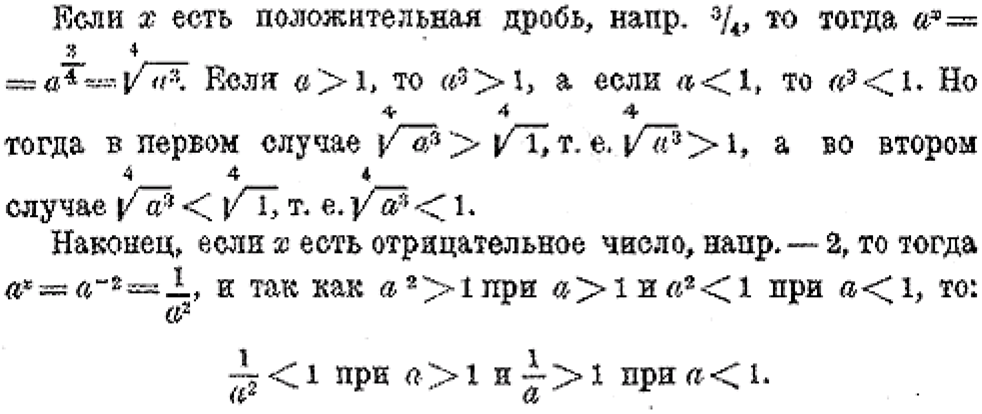
$$a^x=a^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$$

и потому $a^x > 0$, так как $a^{\frac{3}{4}} > 0$.

Наконец, если $x = 0$, то $a^x = a^0 = 1$, т. е. тоже есть число положительное.

б) ***Если a >1, то при положительных значениях x степень a^x больше 1, а при отрицательных — меньше 1. Если же a < 1, то, наоборот, $a^x < 1$ при x >0 и $a^x > 1$ при x< 0.***

Действительно, если x есть целое положительное число,напр. **3**, то тогда $a^x = a^3 = aaa$. Очевидно, что если $a > 1$, то $aaa > 1$, а если $a < 1$, то $aaa < 1$.



Если x есть положительная дробь, напр. $^3/_4$, то тогда $a^x = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$. Если $a > 1$, то $a^3 > 1$, а если $a < 1$, то $a^3 < 1$. Но тогда в первом случае $\sqrt[4]{a^3} > \sqrt[4]{1}$, т. е. $\sqrt[4]{a^3} > 1$, а во втором случае $\sqrt[4]{a^3} < \sqrt[4]{1}$, т. е. $\sqrt[4]{a^3} < 1$.

Наконец, если x есть отрицательное число, напр. — 2, то тогда $a^x = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, и так как $a^2 > 1$ при $a > 1$ и $a^2 < 1$ при $a < 1$, то:

$$\frac{1}{a^2} < 1 \text{ при } a > 1 \text{ и } \frac{1}{a} > 1 \text{ при } a < 1.$$

в) ***При возрастании показателя x степень a^x возрастает, если a > 1, и убывает, если a < 1.***

Пусть x имеет какое-нибудь определенное значение, напр. $x = 3$. Тогда степень a^x будет равна a^3. Увеличим теперь x на какое-нибудь число, напр., вместо **3** возьмем **3,01**. Тогда вместо a^3 будем иметь $a^{3,01}$. Чтобы узнать, какое из этих двух чисел больше, возьмем разность $a^{3,01}$ — a^3 и посмотрим, при каких условиях эта разность будет положительное число и при каких отрицательное. Разность эту можно представить так:

$$a^{3,01} — a^3 = a^3 (a^{0,01} — 1)$$

Согласно свойству (**а**) число $a^3 > 0$; согласно свойству (**б**) число $a^{0,01} > 1$ при $a > 1$ и $a^{0,01} < 1$ при $a < 1$. Следовательно, правая часть написанного равенства (значит, и его левая часть) при $a > 1$ положительна, а при $a < 1$ отрицательна. Поэтому в первом случае $a^{3,01} > a^3$, а во втором $a^{3,01} < a^3$.

г) *Если x стремится к ∞, то при $a > 1$ степень a^x стремится также к ∞, а при $a < 1$ она стремится к 0.*

Согласно свойству (**в**) при увеличении x степень a^x увеличивается, если $a > 1$, и уменьшается, если $a < 1$. Теперь мы покажем, что, увеличиваясь при $a > 1$, число a^x может сделаться больше всякого числа, как бы велико оно ни было, а уменьшаясь при «<1, оно может сделаться меньше всякого положительного числа, как бы мало оно ни было. Для этого примем во внимание, что показатель x, увеличиваясь неограниченно, проходит, между прочим, через ряд целых значений: 1, 2, 3, 4,... Тогда степень a^x будет проходить через ряд таких значений:

$$a^1 , a^2, a^3, a^4,...$$

Ряд этот есть бесконечная Г. П. со знаменателем a. Если $a > 1$, то эта прогрессия возрастающая, а если $a < 1$, то она убывающая. Как мы видели (Отдел 10 глава 3 § 251,6), в первом случае член прогрессии, удаляясь от начала ряда, может превзойти всякое число, как бы велико оно ни было: а во втором случае член прогрессии может сделаться меньше всякого положительного числа, как бы мало оно ни было. Значит, когда x стремится к ∞, то степень a^x тоже стремится к ∞, когда $a > 1$, и степень a^x стремится к **0**, когда $a < 1$.

Таким образом, мы можем написать:

$$a^{\infty} = \infty, \text{ если } a > 1; \quad a^{\infty} = 0, \text{ если } a < 1.$$

д) ***Если х стремится к — ∞, то степень*** a^x ***стремится к 0 при а > 1 и к ∞ при а <1.***

Показатель x, уменьшаясь неограниченно, проходит, между прочим, ряд целых отрицательных значений:—1,—2,—3,—4,... Тогда степень a^x проходит ряд таких значении:

$$a^{-1},\ a^{-2},\ a^{-3},\ a^{-4},\ldots \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{1}{a^1},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4},\ \ldots$$

Этот ряд есть бесконечная Г. П. со знаменателем $^1/_a$. Если $a > 1$, то $^1/_a < 1$, и тогда эта прогрессия убывающая, и потому член ее при неограниченном удалении от начала ряда стремится к **0**; если же $a < 1$, то $^1/_a > 1$, и тогда прогрессия возрастающая и потому член ее, удаляясь от начала ряда, стремится к ∞.

Таким образом, мы можем написать:

$$a^{-\infty} = 0, \text{ если } a > 1; \quad a^{-\infty} = \infty, \text{ если } a < 1$$

е) ***Если х стремится к нулю, то степень*** a^x ***стремится к 1 (и при а >1, и при а< 1).***

Если x стремится к 0, то a^x стремится к a^0. Но что представляет собой в этом случае выражение a^0? До сего времени мы считали, что $a^0 = 1$. Но считая так, мы предполагали (Отдел 2 глава 4 § 65), что выражение a^0означает частное от деления одинаковых степеней буквы a. Но теперь выражение a^0 мы рассматриваем иначе, а именно, как предел, к которому стремится степень a^x, когда показатель x стремится к нулю. Будет ли этот предел **1**, или нет, мы сейчас увидим.

Возьмем какое-нибудь основание, большее **1**, напр. **10**, и допустим, что показатель x все уменьшается, напр, переходит через такие значения:

$$x = {}^1/_2,\ {}^1/_4,\ {}^1/_8,\ {}^1/_{16}\ \ldots \text{ и т.д.}$$

(мы выбрали эти значения, так как при них удобно вычислять значения степени)

Тогда:

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162; \quad 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3,162} = 1,778;$$

$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = \sqrt{\sqrt[4]{10}} = \sqrt{1,778} = 1,333; \quad 10^{\frac{1}{16}} = \sqrt{1,333} = 1,15$$

(Корни эти можно найти обыкновенным извлечением, но можно их получить и из таблицы квадратных корней, приложенной в конце этой книги.)

Мы видим, что степень $\mathbf{10}^x$ все уменьшается, приближаясь все ближе и ближе к 1 (извлечение следующего корня квадратного дало бы 1,07, дальше 1,03,.. .)•

Возьмем теперь основание, меньшее 1, напр. $^1/_{10}$ и предположим, что x попрежнему уменьшается, переходя через значения $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ ... и т. д.

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{10}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{10} = 0,3162;$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{0,3162} = 0,562; \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt{0,562} = 0,75;$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{16}} = \sqrt{0,75} = 0,86.$$

Тогда:

Мы видим, что степень $(^1/_{10})^x$ все увеличивается, приближаясь все ближе и ближе к 1 (дальнейшее извлечение корня дало бы 0,92, затем 0,96,...).

Удовольствуемся этими двумя примерами и примем, что

пред. $a^x = 1$, **если** $x \longrightarrow 0$.

Изложим строгое доказательство этого предложения, т.е. докажем, что, когда x стремится к **0**, абсолютная величина разности $1 — a^x$ делается меньше любого данного положительного числа a. Предположим сначала, что $a > 1$ и что x, приближаясь к **0**, проходит только положительные значения. Возьмем бесконечную возрастающую Г. П.:

$$\div\div \; 1, \quad (1+\alpha), \quad (1+\alpha)^2, \quad (1+\alpha)^3, \; \dots \; (1+\alpha)^n \dots$$

Член такой прогрессии, при достаточном его удалении от начала ряда, может превзойти любое данное число. Значит, при некотором достаточно большом n степень $(1+\alpha)^n$ превзойдет число a (как бы велико это число ни было). Тогда:

$$a < (1+\alpha)^n,$$

откуда:

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{(1+\alpha)^n} \quad \text{т. е.} \quad a^{\frac{1}{n}} < 1 + \alpha.$$

Когда число x, приближаясь к **0**, делается меньше дроби $^1/_n$, тогда a^x делается меньше $a^{\frac{1}{n}}$ [согласно свойству (**в**)]; следовательно, тогда

$$a^x < 1 + \alpha \text{ и, следовательно, } a^x — 1 < \alpha.$$

А это означает, что **пред.** $a^x = 1$, **если** $x \longrightarrow$.

Положим теперь, что при $a > 1$ показатель x стремится к **0**, оставаясь отрицательным (напр., x переходит через значения — $^1/_2$, —$^1/_4$, —$^1/_8$ и т.д.) .Обозначив абсолютную величину отрицательного числа x буквою x', мы можем написать:

$$a^x = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}.$$

Когда x стремится к **0**, тогда и x' стремится к **0**, и потому степень $a^{x'}$, по доказанному сейчас, стремится к **1**; значит, тогда дробь $\frac{1}{a^{x'}}$ стремится к $^1/_1$, т. е. к **1**. Таким образом, и в этом случае **пред.** $a^x = 1$.

Допустим, наконец, что $a < 1$. Возьмем тогда вспомогательное число a', обратное числу a, т. е. число $a' = {}^1/_a > 1$. Тогда $a = {}^1/_{a'}$ и

$$a^x = \left(\frac{1}{a'}\right)^x = \frac{1}{(a')^x}.$$

Так как $a' > l$, то, по доказанному сейчас, $(a')^x$—> **1**, когда x—>0; значит, a^x—>$^1/_1$ = **1**
Итак, во всех случаях a^x—>**1**, если x —> **0**.

Глава четвертая.

Понятие об иррациональном показателе.

263. Выражению a^α, в котором α какое-нибудь иррациональное число, придают смысл только тогда, когда основание степени a есть какое-нибудь ***положительное число, не равное*** **1**. При этом могут представиться следующие 3 случая:

а) $a > 1$ и α положительное иррациональное число, напр. $10^{\sqrt{2}}$

Обозначим через α_1 любое рациональное приближенное значение числа α, взятое с недостатком, и через α_2 любое приближенное рациональное значение числа α, взятое с избытком. Тогда степень a^α означает такое число, которое ***больше всякой степени*** a^{α_1}***, но меньше всякой степени*** a^{α_2}. Напр. $10^{\sqrt{2}}$ означает такое число, которое больше каждого из чисел ряда:

$$10^{1,4},\quad 10^{1,41},\quad 10^{1,414},\quad 10^{1,4142},$$

в котором показатели — десятичные приближенные значения $\sqrt{2}$ взятые с недостатком, но меньше каждого из чисел ряда:

$$10^{1,5},\quad 10^{1,42},\quad 10^{1,415},\quad 10^{1,4143},$$

в котором показатели — десятичные приближения $\sqrt{2}$, взятые с избытком.

Таким образом, если иррациональное чисто α заключено между двумя рациональными числами α_1 и α_2 то и степень a^α заключена между степенями a^{α_1} и a^{α_2}

б) $a < 1$ и α попрежнему положительное иррациональное число, напр. $0{,}5^{\sqrt{2}}$.

Тогда под степенью a^{α} разумеют такое число, ***которое меньше всякой степени*** a^{α_1}***, но больше всякой степени*** a^{α_1}

. Так, $0{,}5^{\sqrt{2}}$ есть число, меньшее каждого из чисел ряда:

$$0{,}5^{1,4},\quad 0{,}5^{1,41},\quad 0{,}5^{1,414},\quad 0{,}5^{1,4142},\ldots$$

но больше каждого из чисел ряда:

$$0{,}5^{1,5},\quad 0{,}5^{1,42},\quad 0{,}5^{1,415},\quad 0{,}5^{1,4143},\ldots$$

в) $a \gtrless 1$ и α отрицательное иррациональное число; напр.,

$$10^{-\sqrt{2}},\quad (^1/_2)^{-\sqrt{2}}.$$

Тогда выражению a^{α} придают тот же смысл, какой имеют степени с отрицательными рациональными показателями. Так:

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}};\quad (^1/_2)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{(^1/_2)^{\sqrt{2}}}$$

При подробном рассмотрении теории иррациональных показателей обнаруживается, что все свойства показателей рациональных применимы и к показателям иррациональным; так:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta};\quad (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$$

Равным образом все свойства степеней с рациональными показателями, указанные нами в предыдущем параграфе, принадлежат и степеням с иррациональными показателями.

Глава пятая.

Показательная функция.

264. Определение. Показательной называется функция $y = a^x$, представляющая собою степень, у которой основание a есть постоянное положительное число, не равное 1,а показатель x - переменное число, могущее принимать всевозможные значения, положительные и отрицательные, целые и дробные, рациональные и иррациональные. При этом предполагается, что в том случае, когда x равен дроби и, следовательно, когда a^x означает радикал некоторой степени, то из всех значений радикала берется только одно арифметическое, т. е. положительное.

Основание a предполагается не равным 1, так как при $a =1$ степень a^x при всяком значении x равнялась бы 1, и тогда она не зависела бы от x. Основание a предполагается еще и положительным, так как при $a < 0$, степень a^x для многих значений x не давала бы никакого вещественного числа. Напр., при $a = -4$ и при $x = {}^1/_2$ степень a^x обратилась бы в $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$, что составляет мнимое выражение.

Из того, что мы знаем о показателях степени, следует, что функция $y = a^x$ при всяком значении x возможна и имеет единственное значение (благодаря условию брать для радикалов только арифметическое значение).

Надо обратить еще внимание на то, что если показатель x изменяется очень немного, то и степень a^x изменяется тоже немного, и изменяется тем меньше, чем меньше изменение x. Напр., если x увеличим на какое-нибудь число α, то степень a^x сделается $a^{x+\alpha}$, и, следовательно, она изменится на разность $a^{x+\alpha} — a^x$, которую можно представить в виде произведения:

$$a^{x+\alpha} — a^x = a^x\,(a^\alpha — 1)$$

Когда α будет уменьшаться, приближаясь к нулю, тогда, как мы видели, число a^α стремится к **1**, и, значит, разность $a^\alpha — 1$ будет стремиться к нулю. Так как при этом число a^x остаётся без изменения, то написакное нами произведение, в котором множимое остается без изменения, а множитель стремится к нулю, тоже стремится к нулю. Но это произведение выражает разность $a^{x+\alpha} — a^x$; значит, изменение степени a^x может быть, при достаточно малом α, как угодно мало; другими словами, функция a^x при непрерывном изменении x изменяется тоже непрерывно.

265. График показательной функции. Построим графики следующих трех показательных функций:

$$1)\ y = 2^x; \quad 2)\ y = (^1/_2)^x; \quad 3)\ y = 10^x.$$

Для построения графиков первых двух функций мы дадим переменному числу x ряд целых значений:

$$— 3, —2, —1, 0, 1, 2, 3.$$

При $x = 3$ мы получим:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 : \frac{1}{8} = 8.$$

Подобно этому вычислим значения y и для всех остальных значений x. Добавим еще предельные значения при $x = — \infty$ и при $x = \infty$. Согласно свойствам (г) и (д), указанным в § 262, мы будем иметь:

$$2^{—\infty} = 0\ ; \quad (^1/_2)^{—\infty} = \infty; \quad 2^\infty = \infty\ ; \quad (^1/_2)^\infty = 0;$$

Для функции $y = 10^x$ неудобно брать указанные значения числа x, так как мы получили бы тогда для y такие большие числа, которые на чертеже не умещаются (напр., при $x = 3$ мы получили бы $y = 10^3 = 1000$). Для этой функции мы возьмем такие дробные значение (заключающиеся между —1 и + 1)

$$x = —1, — ^3/_4, — ^2/_4, — ^1/_4, \quad 0, \quad ^3/_4, ^2/_4, ^1/_4, \quad 1$$

Соответствующие значения y вычислим в такой последовательности:

$$10^{1/4}=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}=\sqrt{3,162}=1,77$$
$$10^{2/4}=10^{1/2}=\sqrt{10}=3,162$$

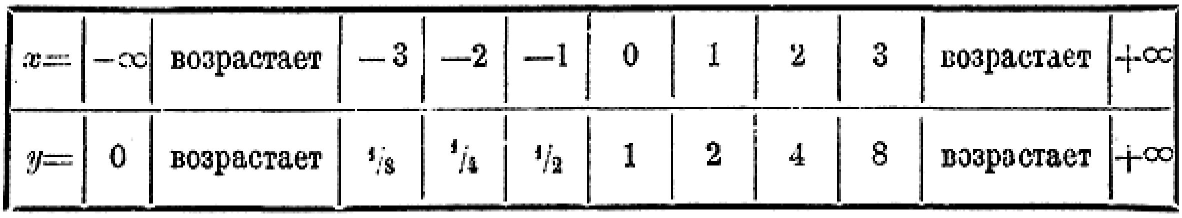
(Эти корни можно найти и по таблице квадратных корней, приложенной в конце этой книги.)

Далее, простым умножением и делением находим:

$$10^{3/4}=10^{2/4}\cdot 10^{1/4}=3,162\cdot 1,778=5,62\,..$$
$$10^{-1/4}=\frac{1}{1,778}=\frac{1000}{1778}=0,56\ldots$$
$$10^{-2/4}=\frac{1}{3,162}=\frac{1000}{3162}=0,32\ldots$$
$$10^{-3/4}=\frac{1}{5,62}=\frac{100}{562}=0,17\ldots$$

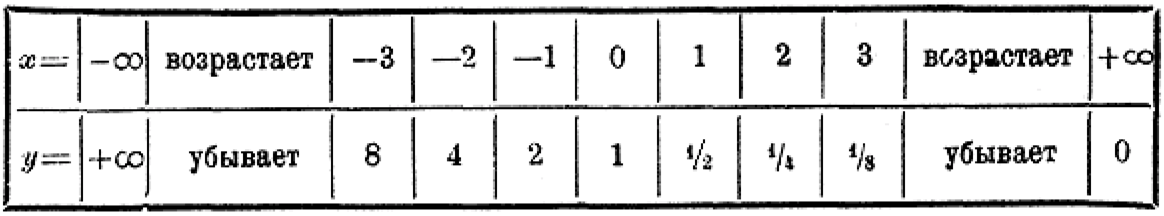
Выпишем все найденные значения в следующих трех таблицах:

1) ***y*** = **2*^x^***



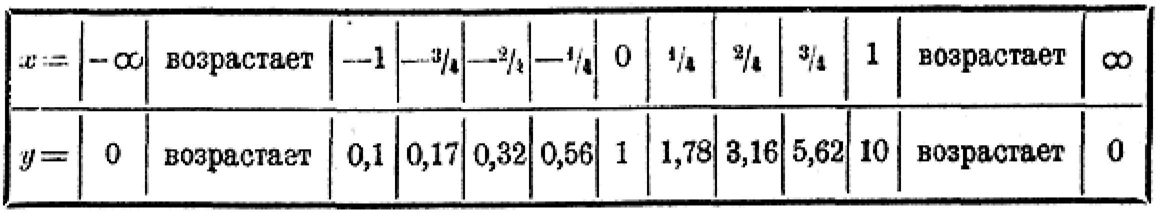
$x=$	$-\infty$	возрастает	-3	-2	-1	0	1	2	3	возрастает	$+\infty$
$y=$	0	возрастает	$^1/_8$	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2	4	8	возрастает	$+\infty$

2) ***y*** = ($^1/_2$)^x;



$x=$	$-\infty$	возрастает	-3	-2	-1	0	1	2	3	возрастает	$+\infty$
$y=$	$+\infty$	убывает	8	4	2	1	$^1/_2$	$^1/_4$	$^1/_8$	убывает	0

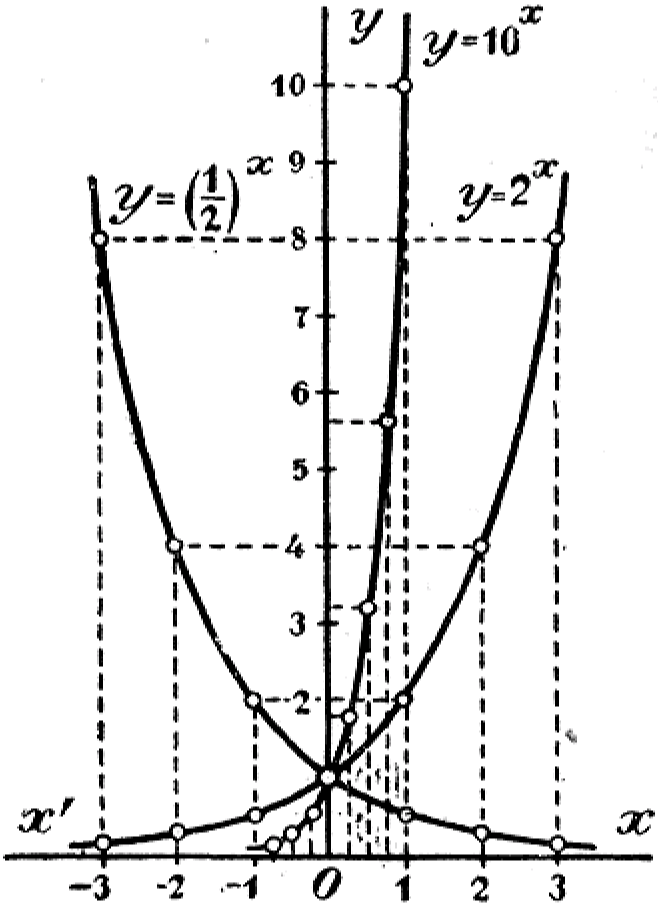
3) ***y*** = **10**^{x}



$x=$	$-\infty$	возрастает	-1	$-^3/_4$	$-^2/_4$	$-^1/_4$	0	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1	возрастает	∞
$y=$	0	возрастает	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10	возрастает	0

(в последней таблице числа округлены).

Нанеся эти значения на чертеж (кроме, конечно, предельных) и проведя через полученные точки непрерывные кривые, мы получим три графика взятых функций (всего удобнее чертеж выполнить на миллиметровой бумаге, беря за единицу длины сантиметр).



266. Свойства показательной функции. Рассматривая графики показательных функций, мы видим на них в наглядном изображении все те свойства степени а; которые были указаны ранее (§ 262).

Так:

1) При всяком основании функция a^x положительна (все кривые расположены выше оси x - ов).

2) При $a > 1$ функция $a^x > 1$, если $x > 0$, и $a^x < 1$, если $x < 0$; при $a < 1$ заключения обратны.

3) При возрастании x до + ∞ функция a^x возрастает до a^x , если $a >1$, и убывает до 0, если $a < 1$ (но никогда, однако, нуля, не достигает).

4) При убывании x до — ∞ функция a^x убывает, стремясь к 0, если $a >1$, и возрастает д+ ∞, если $a < 1$.

5) Если $x = 0$, то $a^x = 1$ при всяком a (все кривые проходят через одну и ту же точку, лежащую на оси y-ов на расстоянии от точки 0 на $+1$).

6) При $a >1$ функция при возрастании x возрастает тем быстрее, чем больше a (кривая при $a = 10$ поднимается вверх значительно больше, чем при $a = 2$).

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ДВЕНАДЦАТЫЙ

ЛОГАРИФМЫ.

Глава первая. **Общие свойства логарифмов.**
Глава вторая. **Свойства десятичных логарифмов.**
Глава третья. **Устройство и употребление четырехзначных таблиц.**
Глава четвертая. **Показательные и логарифмические уравнения.**
Глава пятая. **Сложные проценты, срочные уплаты и срочные взносы.**

Глава первая.

Общие свойства логарифмов.

267.Два действия, обратные возведению в степень.

Возьмем такие равенства:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2,828\ldots$$

$$2^{-2,5} = \frac{1}{2^{2,5}} = \frac{1}{2^{\frac{25}{10}}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^5}} = \frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1,414}{8} = 0,1767$$

Эти три примера выражают собой различные случаи действия, называемого возвышением в степень.

В этом действии даются: основание степени (число **2**) и показатель степени (числа **3**, $^3/_2$, **—2,5**), а требуется найти самую степень (**8**; **2,828**; **0,1767**). Посмотрим, какие есть действия, обратные возвышению в степень.

Таких действий можно указать следующие два:

1) Пусть требуется узнать, какое число надо возвести в степень с показателем 3, чтобы получить число 12. Обозначив искомое число буквой x, мы можем написать уравнение:

$$x^3=12$$

Действие, посредством которого находится основание x по данной степени и данному показателю ее, называется извлечением корня; оно обозначается, как мы знаем, так:

$$x = \sqrt[3]{12}$$

2) Положим, надо узнать, какой показатель должен быть у степени, в которую надо возвести основание 4, чтобы получить 16.Обозначив искомый показатель буквой x, можем написать уравнение:

$$4^x = 16$$

Действие, посредством которого находится показатель степени по данной степени и данному основанию, называется нахождением логарифма данного числа (**16**) по данному основанию (**4**). В нашем примере x = **2**, так как $4^2 = 16$.

Итак, возведение в степень имеет два обратных действия. Поставим вопрос, различны ли эти действия?
Ведь и для умножения можно усмотреть два обратных действия:
первое - нахождение 1-го сомножителя по данным произведению и 2-му сомножителю,
второе - нахождение 2-го сомножителя по данным произведению и 1-му сомножителю.

Однако действия эти рассматриваются не как различные, а как одно и то же действие, называемое делением. Причина слияния этих двух обратных действий в одно заключается в переместительном свойстве умножения, по которохму произведение не меняется от перемены мест 1-го и 2-го сомножителя .

В таком же положении находится и сложение (2 слагаемых); этому действию также можно указать два обратных действия — нахождение неизвестного числа (1-го слагаемого), к которому надо прибавить данное число (2-е слагаемое), чтобы получить данную сумму; другое — нахождение неизвестного числа (2-го слагаемого), которое надо прибавить к данному числу (к 1-му слагаемому), чтобы получить данную сумму.

Однако эти два действия рассматриваются как одно, называемое вычитанием, вследствие того, что сложение обладает переместительным свойством, по которому сумма не зависит от порядка слагаемых.

Если бы это свойство принадлежало также и возведению в степень, то тогда и два указанных выше обратных действия составляли бы в сущности одно. Но возведение в степень **не** обладает свойством переместительности; напр., $\mathbf{2^3}$ не равно $\mathbf{3^2}$, $\mathbf{10^2}$ не равно $\mathbf{2^{10}}$ и т. д. Вследствие этого нахождение основания по данным показателю и степени (извлечение корня) существенно отличается от нахождения показателя по данным основанию и степени (нахождение логарифма).

Заметим, что последнее действие в элементарной алгебре подробно не рассматривается; указываются главным образом его практические применения.

268. Определение логарифма.

Логарифмом данного числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести это основание, чтобы получить данное число.

Если, напр., основание будет **4**, то

логарифм	16	есть	2,	так как	$4^2 = 16$;
-"-	64	-"-	3	-"-	$4^3 = 64$;
-"-	4	-"-	1,	-"-	$4^1 = 4$;
-"-	2	-"-	$^1/_2$	-"-	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;
-"-	$^1/_4$	-"-	-1,	-"-	$4^{-1} = {}^1/_4$
-"-	$^1/_2$	-"-	$-^1/_2$	-"-	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$

Если возьмем за основание **10**, то

логарифм	10	есть	1	так как	$10^1 = 10$
-"-	100	-"-	2	-"-	$10^2=100$
-"-	1000	-"-	3	-"-	$10^3 = 1000$
-"-	0,1	-"-	-1	-"-	$10^{-1}= {}^1/_{10}$
-"-	0,01	-"-	-2	-"-	$10^{-2}= {}^1/_{100}$

Вместо того, чтобы писать: „логарифм числа 16 по основанию 4" пишут сокращенно так:

$$\log_4 16,$$

помещая внизу знака **log** то число, которое служит основанием. Впрочем, если заранее известно, какое число принято за основание, то его не пишут. Вместо знака **log** (сокращения слова "logarithme") иногда пишут **lg** или **Log.**

Прежде чем говорить о применениях логарифмов, мы предварительно рассмотрим свойства так называемой логарифмической функции.

269.Логарифмическая функция и ее график.

Если в равенстве $y = a^x$ мы рассматриваем показатель x как независимое переменное , то тогда y будет функция от x, которую мы назвали раньше показательной. Но если в этом равенстве за независимое переменное мы будем считать y, то тогда x будет некоторая функция от y, а именно x есть логарифм числа y по основанию a, что можно выразить так:

$$x = \log_a y$$

Обозначая по принятому независимое переменное буквой x, а функцию от этого переменного буквой y (т. е. заменяя x на y и наоборот), мы ту же самую функцию можем записать так:

$$y = \log_a x$$

Такая функция называется логарифмической. Вспоминая то, что мы раньше говорили об обратной функции (Отдел 7 глава 3 §180), мы видим, что логарифмическая функция обратна показательной.

Построим графики следующих трех логарифмических функций:

$$1)\ y = \log_2 x; \quad 2)\ y = \log_{½} x; \quad 3)\ y = \log_{10} x.$$

Для этого составим таблицы значений этих функций. Всего проще их можно сделать из таблиц соответственных показательных функций

$$1) y = 2^x; \quad 2)\ y = ({}^1/_2)^x; \quad 3)\ y = 10^x,$$

поменяв в этих таблицах значения абсциссы x на значения ординаты y и наоборот. Сделав это, мы получим такие 3 таблицы:

1) $y = \log_2 x$

x =	0	возрастает	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	возрастает	∞
y =	$-\infty$	возрастает	-3	-2	-1	0	1	2	3	возрастает	∞

2) $y = \log_{1/2} x$

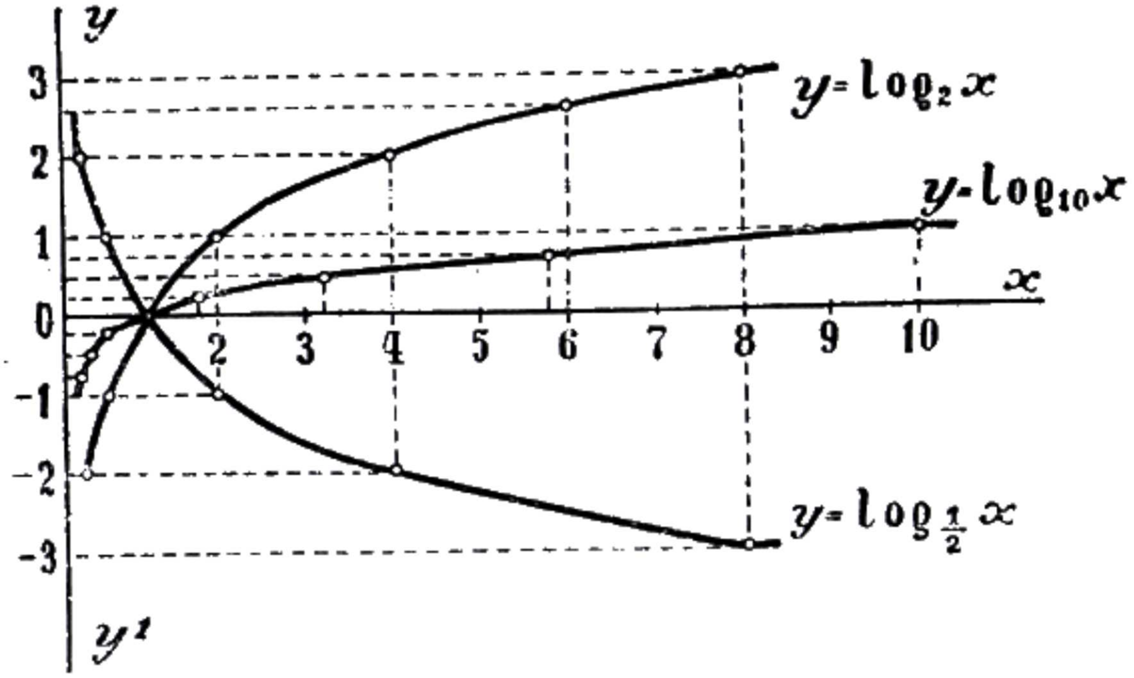
x =	∞	убывает	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	убывает	0

y =	$-\infty$	возрастет	-3	-2	-1	0	1	2	3	возрастает	∞

3) $y = \log_{10}x$

x	0	возр.	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10	возр.	0
y	$-\infty$	возр.	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	возр.	∞

Нанеся все эти значения на чертеж и обведя все точки непрерывными кривыми, получим три графика взятых функций. Согласно свойству обратных функций , кривые эти — те же самые, которыми выражаются функции $y = 2^x$; $y = ({}^1/_2)^x$; $y = 10^x$, только они расположены симметрично с этими кривыми относительно биссектрисы угла ***xOy***.



Имея график логарифмической функции, мы можем при помощи его найти логарифм (приближенный) числа, помещающегося между взятыми для чертежа значениями ***x***. Возьмем, напр., график функции $y = \log_2 x$ и найдем при его помощи $\log_2 6$.
Для этого возьмем на чертеже абсциссу, равную **6**, и построим соответствующую ей ординату. Измерив эту ординату, найдем приблизительно **2,6**; это и будет **log 6**.

270. Свойства логарифмической функции.

При рассмотрении начерченных графиков мы наглядно представляем себе следующие свойства логарифмов:

1) Так как графики всецело расположены направо от оси ***y*** -ов, то ***отрицательные числа не имеют логарифмов*** (вспомним, что при всяком значении ***x*** функция a^x положительн

2) Всякой положительной абсциссе соответствует своя определенная ордината; значит, ***всякое положительное число имеет логарифм.***

3) Все кривые пересекаются с осью ***x***-ов в одной и той же точке, отстоящей от начала координат на **+ l**. Это значит, что ***при всяком основании логарифм единицы есть нуль*** ($a^0 = 1$).

4) Когда ***a*** >**1**, то части кривых, соответствующие абсциссам, меньшим 1, лежат в угле

$x0y'$, а части кривых, соответствующие абсциссам, большим. 1, расположены в угле $x0y$. Это значит, что ***при основании, большем 1, логарифмы чисел, меньших 1, отрицательны, а логарифмы чисел, больших 1, положительны***. Это вполне соответствует тому свойству показательной функции, что при положительном значении x функция a^x больше **1**, а при отрицательном - меньше **1** (если $a > 1$).
При $a < 1$ (напр, для кривой $y = \log_{1/2} x$) заключения противоположны этим.

5) ***Логарифм самого основания равен 1***; так, на графике $y = \log_2 x$ видно, что абсциссе **2** соответствует ордината **1**; на других графиках видно то же самое.

6) При основании, большем **1**, ветви кривых, расположенные ниже оси x-ов, при уменьшении абсциссы от **1** до **0**, приближаются к полуоси $0y'$ как угодно близко, никогда, однако, ее не достигая, а ветви тех же кривых, расположенные выше оси x-ов, при возрастании x от **1** до $+\infty$, поднимаются все выше и выше неограниченно.
Это значит, что (при $a > 1$) ***с возрастанием числа от 0 до 1 логарифм его возрастает от*** $-\infty$ ***до 0; с возрастанием числа от 1 до*** $+\infty$ ***логарифм его возрастает от 1 до*** $+\infty$
Из этого между прочим следует, что ***большему числу соответствует больший логарифм*** (при основании, меньшем 1 ($a < 1$) , заключение было бы обратное).

271. Понятие о значении логарифмических таблиц.

Различные числа можно выражать *как степени одного и того же числа,* напр., как степени числа **10**. Такие числа, как **10; 100; 1000**... или **0,1; 0,01; 0,001** и т. п., выражаются, как степени **10** очень просто: $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$;... $0,1 = 10^{-1}$, $0,01 = 10^{-2}$ $0,001 = 10^{-3}$ и т. п. Другие числа выразить степенью **10** затруднительно. Так, если требуется найти показатель степени, в которую нужно возвести **10**, чтобы получить число **5**, то мы можем только сказать, что искомый показатель больше **0**, но меньше **1**, так как $10^0 = 1$, что меньше **5**, а $10^1 = 10$, что больше **5**; значит, показатель степени, в которую надо возвысить **10** для получения **5**, должен быть некоторая положительная дробь меньшая **1**. Мы можем даже сказать, что эта дробь больше $^1/_2$, но меньше $^3/_4$, так как

$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162$, что меньше **5**, а

$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} = \sqrt{\sqrt{1000}} = \sqrt{31,62} = 5,62$, что больше **5**.

Но найти точно показатель x, чтобы $10^x = 5$, очень затруднительно. Есть отделы математики, в которых указываются способы, как можно для всякого данного числа **N** найти такой показатель x, при котором степень 10^x или в точности равняется **N**, или отличается от этого числа как угодно мало. Ученые, пользуясь этими способами, составили так называемые *логарифмические таблицы*, в которых помещены различные числа и около каждого из этих чисел указан показатель степени (логарифм), в которую надо возвести 10, чтобы получить это число. Разъясним, для какой цели могут служить такие таблицы.
Пусть требуется вычислить число x по формуле:

$$x = \sqrt[5]{40}$$

Извлекать корень 5-й степени мы не умеем. В подобных случаях нам могут помочь логарифмические таблицы. Находим в этих таблицах число 40 и около него логарифм этого числа. Пусть это будет 1,6... Это значит, что

$$40 = 10^{1,6...}$$

и следовательно,

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6...}}$$

Так как при извлечении корня из степени показатель подкоренного числа (какой бы он ни был) делится на показатель корня, то

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6...}} = 10^{\frac{1,6...}{5}} = 10^{0,32...}$$

Теперь в тех же таблицах в столбце логарифмов находим 0,32 и около него соответствующее число, пусть это будет, положим, 2,09... Это и будет приближенное значение $\sqrt[5]{40}$

Мы вскоре увидим, что логарифмические таблицы во многих случаях позволяют производить такие действия над числами, которые без таблиц мы или совсем не могли бы выполнить (как в примере, только что указанном), или на выполнение которых потребовалось бы очень много времени.

Теперь нам предстоит ознакомиться, во-первых, с тем, как при совершении какого-либо действия над данными числами можно найти логарифм искомого числа при помощи логарифмов этих данных чисел (взятых из таблиц) и, во-вторых, как найдя такой логарифм, отыскать по нему в таблицах искомое число.

272. Нахождение логарифма произведения, частного, степени и корня.

а) Пусть требуется выполнить умножение: 378 • 45,2

Попробуем выполнить это действие посредством логарифмов. Найдем в таблицах логарифмы чисел 378 и 45,2. Пусть они будут: 2,5775 и 1,6551 (по основанию 10). Это значит, что

$$378 = 10^{2,5775} \quad \text{и} \quad 45,2 = 10^{1,6551}$$

и следовательно,

$$378 \cdot 45,2 = 10^{2,5775} \cdot 10^{1,6551}$$

Так как при умножении степеней одного и того же числа показатели этих степеней складываются (какие бы ни были эти показатели), то

$$378 \cdot 45,2 = 10^{2,5775 + 1,6551} = 10^{4,2326}$$

Значит, логарифм произведения 378 · 45,2 есть число 4,2326, получившееся от сложения логарифмов данных сомножителей (по этому логарифму в таблицах найдем и само произведение).

Положим вообще, что N_1 и N_2 будут два числа, произведение которых требуется вычислить. Пусть мы нашли в таблицах логарифмы этих чисел x_1 и x_2. Основание этих логарифмов может быть число 10, но может быть и какое-нибудь другое число, которое мы обозначим a. Тогда мы будем иметь равенства:

$$N_1 = a^{x_1} \ ; \ N_2 = a^{x_2} \ ; \quad \text{следовательно} \quad N_1 N_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

Отсюда видно, что $\log (N_1N_2) = x_1 + x_2$ Но x_1 - это $\log N_1$, а x_2 - это $\log N_2$; значит:

$$\mathbf{\log (N_1N_2) = \log N_1 + \log N_2} \quad ,$$

т. е. ***логарифм произведения*** (по какому угодно основанию) ***равен сумме логарифмов сомножителей*** (взятых по тому же основанию).

Заключение это остается верным и тогда, когда сомножителей будет более 2, так как при умножении степеней одного и того же числа показатели их складываются и тогда, когда, этих степеней будет более 2.

б) Положим, надо выполнить деление:

$$5637 : 26{,}3.$$

Найдем в таблицах логарифмы этих чисел (напр, по основанию 10).
Пусть $\log 5637 = 3{,}751$ и $\log 26{,}3 = 1{,}42$. Тогда:

$$5637 = 10^{3{,}751} \quad \text{и} \quad 26{,}3 = 10^{1{,}42}$$

Следовательно, $5637:26{,}3=10^{3{,}751} :10^{1{,}42} =10^{3{,}751-1{,}42} =10^{2{,}331}$

Отсюда видно, что логарифм частного 5637:26,3 есть число 2,331, получившееся от вычитания логарифма делителя из логарифма делимого.

Вообще, если $N_1 = a^{x_1}$; $N_2 = a^{x_2}$; то

$$N_1 : N_2 = a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$$

и следовательно,

$$\mathbf{\log(N_1 : N_2) = \mathit{x}_1 - \mathit{x}_2 = \log N_1 - \log N_2}$$

т. е. ***логарифм частного равен логарифму делимого без логарифма делителя.***

Так как всякая дробь есть частное от деления числителя на знаменатель, то ***логарифм дроби равен логарифму числителя без логарифма знаменателя.***

Напр.:

$$\log {}^{2}/_{3} = \log 2 — \log 3;$$
$$\log 2\ {}^{3}/_{4} == \log^{11}/_{4} = tog\ 11 — \log 4;$$
$$\log 0{,}6= \log 6 —\log 10.$$

Следствие : Поскольку $\mathbf{\log_{\mathit{a}} 1 = 0}$, то

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b$$

Таким образом

$$\log_a \frac{1}{b} =- \log_a b$$

Логарифмы двух взаимообратных чисел по одному и тому же основанию отличаются друг от друга только знаком.

в) Если $\mathbf{N} = a^x$, то $\mathbf{N}^n = (a^x)^n = a^{nx}$; следовательно:

$$\mathbf{\log (N^{\mathit{n}}) = \mathit{nx} = \mathit{n} \log N,}$$

т. е. ***логарифм степени равен показателю этой степени, умноженному на логарифм возводимого в степень числа***.

$$\text{Напр.: } \log (15{,}3)^2 = 2 \log 15{,}3;$$
$$\log 3^{-2} = - 2 \log 3.$$

г) Так как $\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}}$ то, применяя правило о логарифме степени, получим:

$$log\sqrt[n]{N} = logN^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}logN = \frac{logN}{n}$$

т. е. ***логарифм корня равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня.***

273. Логарифмирование алгебраического выражения.

Логарифмировать алгебраическое выражение значит выразить логарифм его посредством логарифмов отдельных чисел, составляющих это выражение. Выводы предыдущего параграфа позволяют это сделать в применении к произведению, частному, степени и дроби.
Напр.:

1)

$$log\frac{2{,}5\cdot 7^3}{0{,}28}=log\left(2{,}5\cdot 7^3\right)-log0{,}28=log2{,}5+log7^3-log0{,}28=log2{,}5+3log7-log0{,}28$$

2) $log\frac{5ax}{\sqrt{3}}=log5ax-log\sqrt{3}=log5+loga+logx-\frac{1}{2}log3$

3) $log(a^3\sqrt{5x})=3loga+\frac{1}{2}(log5+logx)=3loga+\frac{1}{2}log5+\frac{1}{2}logx$

274. Замечания.

а) Если в выражении, которое требуется вычислить, встречается *сумма* или *разность* чисел, то их надо находить без помощи таблиц обыкновенным сложением или вычитанием. Напр.:

$$\log\,(35+7{,}24)^5 = 5\log\,(35+7{,}24) = 5\log 42{,}24.$$

б) Умея логарифмировать выражения, мы можем, обратно, по данному результату логарифмирования найти то выражение, от которого получился этот результат; так, если

$$\log x = \log a + \log b - 3\log c,$$

то легко сообразить, что $x=\frac{ab}{c^3}$

в) Прежде чем перейти к рассмотрению устройства логарифмических таблиц, мы укажем некоторые свойства десятичных логарифмов, т.е. таких, в которых за основание принято число 10 (только такие логарифмы употребляются для вычислений).

Глава вторая.

Свойства десятичных логарифмов.

275. **а**) Так как $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ и т. д., то log 10 = 1, log 100 = 2, log 1000 = 3, log 10000 = 4, и т. д.

Значит, ***логарифм целого числа, изображаемого единицею с нулями, есть целое положительное число, содержащее столько единиц, сколько нулей в изображении числа.***

Таким образом: **log 100 000 = 5**, **log 1000 000 = 6**, и т. д.

б) Так как

$$10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}01;\quad 10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0{,}01;$$
$$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0{,}001;\quad 10^{-4}=0{,}0001 \text{ и т. д.,}$$

то:

log 0,1 = —l; log 0,01 = — 2; log 0,001 == —3; log 0,0001 = — 4, и т. д.

Значит, ***логарифм десятичной дроби, изображаемой единицею с предшествующими нулями, есть целое отрицательное число содержащее столько отрицательных единиц, сколько нулей в изображении дроби, считая в том числе и 0 целых.***

Таким образом: **log 0,00001= — 5, log 0,000001 = —6,** и т. д.

в) Возьмем целое число, не изображаемое единицею с нулями, напр. 35, или целое число с дробью, напр. 10,7. Логарифм такого числа не может быть целым числом, так как, возвысив 10 в степень с целым показателем (положительным или отрицательным), мы получим 1 с нулями (следующими за 1, или ей предшествующими). Предположим теперь, что логарифм такого числа есть какая-нибудь дробь $^{a}/_{b}$. Тогда мы имели бы равенства

$$10^{\frac{a}{b}}=35;\quad \sqrt[b]{10^a}=35;\quad 10^a=35^b;$$

или

$$10^{\frac{a}{b}}=10{,}7;\ \sqrt[b]{10^a}=10{,}7;\quad 10^a=10{,}7^b.$$

Но эти равенства невозможны, как как 10^a есть 1 с нулями, тогда как степени 35^b и $10{,}7^b$ ни при каком показателе ***b*** не могут дать 1 с нулями. Значит, нельзя допустить, чтобы **log 35** и **log 10,7** были равны дробям. Но из свойств логарифмической функции мы знаем (§ 270, 2), что всякое положительное число имеет логарифм; следовательно, каждое из чисел 35 и 10,7 имеет свой логарифм, и так как он не может быть ни числом целым, ни числом дробным, то он есть число иррациональное и, следовательно, не может быть выражен точно посредством цифр. Обыкновенно иррациональные логарифмы выражают приближенно в виде десятичной дроби с несколькими десятичными знаками. Целое число этой дроби (хотя бы это было „0 целых") называется характеристикой, а дробная часть — мантиссой логарифма. Если, напр., логарифм есть **1,5441**, то характеристика его равна **1**, а мантисса есть **0,5441**.

г) Возьмем какое-нибудь целое или смешанное число, напр. **623** или **623,57**. Логарифм такого числа состоит из характеристики и мантиссы. Оказывается, что десятичные логарифмы обладают тем удобством, что ***характеристику их мы всегда можем найти по одному виду числа***. Для этого сосчитаем, сколько цифр в данном целом числе, или в целой части смешанного числа, В наших примерах этих цифр **3**. Поэтому каждое из чисел **623** и **623,57** больше 100, но меньше 1000; значит, и логарифм каждого из них больше **log 100**, т. е. больше **2**, но меньше **log 1000**, т. е. меньше **3** (вспомним, что большее число имеет и больший логарифм). Следовательно, **log 623 = 2**,..., и **log 623,57 = 2**,... (точки заменяют собою неизвестные мантиссы).

Подобно этому найдем:

10 < 56,7 < 100 **1000 < 8634 < 10 000**

1 < log56,7 < 2 **3 < log8634 < 4**

log 56,7 = 1,... **log 8634 = 3,...**

Пусть вообще в данной целом числе, или в целой части данного смешанного числа, содержится ***m*** цифр. Так как самое малое целое число, содержащее ***m*** цифр, есть **1** с ***m* — 1** нулями на конце, то (обозначая данное число **N**) можем написать неравенства:

$$\overbrace{1000\ .\ .\ .\ 0}^{m\,-\,1\text{ нулей}} < N < \overbrace{1000\ .\ .\ .\ 0}^{m\text{ нулей}},$$

и следовательно,

m — 1 < log N < m,

и потому

log N = (m — 1) + положительная дробь.

Значит, характеристика **logN = *m* — 1**.

Мы видим таким образом, что ***характеристика логарифма целого или смешанного числа содержит столько положительных единиц, сколько цифр в целой части числа без одной.***

Заметив это, мы можем прямо писать:

log 7,205 = 0,...; log 83 = 1,...; log 720,4 = 2,... и т. п.

д) Возьмем несколько десятичных дробей, меньших **1** (т. е. имеющих **0** целых): **0,35; 0,07; 0,0056; 0,0008,** и т. п.

Таким образом, каждый из этих логарифмов заключен между двумя целыми отрицательными числами, различающимися на одну единицу; поэтому каждый из них равен меньшему из этих отрицательных чисел, увеличенному на некоторую положительную дробь. Напр., **log0,0056= —3 + положительная дробь**. Предположим, что эта дробь будет 0,7482. Тогда, значит:

log 0,0056 = — 3 + 0,7482 (= — 2,2518).

Такие суммы, как **— 3 + 0,7482**, состоящие из целого отрицательного числа.и положительной десятичной дроби, условились при логарифмических вычислениях писать сокращенно так: **$\bar{3}$,7482** (Такое число читается: 3 с минусом, 7482 десятитысячных.), т. е. ставят знак минус над характеристикой с целью показать, что он относится только к этой характеристике, а не к мантиссе, которая остается положительной. Таким образом, из приведенной выше таблички видно, что

log 0,35 == $\bar{1}$,....; log 0,07 = $\bar{2}$,....; log 0,0008 = $\bar{4}$,....

Пусть вообще $A = \overbrace{0{,}000\ldots0}^{m\text{ нулей}}\alpha\beta\ldots$. есть десятичная дробь, у которой перед первой значащей цифрой ***α*** стоит ***m*** нулей, считая в том числе и 0 целых. Тогда, очевидно, что

$$\overbrace{0{,}000.....01}^{m\text{ нулей}} < A < \overbrace{0{,}000.....01}^{m-1\text{ нулей}}...$$

$$\text{Следовательно, }\log \overbrace{0{,}000...01}^{m\text{ нулей}} < \log A < \log \overbrace{0{,}000...01}^{m-1\text{ нулей}},$$

т. е.

$$-m < \log A < -(m-1).$$

Так как из двух целых чисел:— ***m*** и — **(*m* — 1)** меньшее есть — ***m*** , то

$$\log A = -m + \textbf{положительная дробь},$$

и потому характеристика **log A = — *m*** (при положительной мантиссе).

Таким образом, ***характеристика логарифма десятичной дроби, меньшей 1, содержит в себе столько отрицательных единиц, сколько нулей в изображении десятичной дроби перед первой значащей цифрой, считая в том числе и нуль целых; мантисса же такого логарифма положительна.***

е) Умножим какое-нибудь число **N** (целое или дробное — все равно) на 10, на 100 на 1000..., вообще на 1 с нулями. Посмотрим, как от этого изменится **log N**. Так как логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей, то

$$\log (N\bullet10) = \log N + \log 10 = \log N + 1;$$

$$\log (N\bullet100) = \log N + \log 100 = \log N + 2;$$

$$\log (N\bullet1000) = \log N + \log 1000 = \log N + 3; \text{ и т. д.}$$

Когда к **log N** мы прибавляем какое-нибудь целое число, то это число мы может всегда прибавлять к характеристике, а не к мантиссе.

Так, если log N = 2,7804, то 2,7804 + 1 =3,7804; 2,7804 + 2 = 4,7801 и т. п.;

или если log N = $\overline{3}$,5649, то $\overline{3}$,5649 + 1 = $\overline{2}$,5649; $\overline{3}$,5649 + 2 = $\overline{1}$,5649, и т. п.

Поэтому:

От умножения числа на 10, 100, 1000,.., вообще на 1 с нулями, мантисса логарифма не изменяется, а характеристика увеличивается на столько единиц, сколько нулей во множителе.

Подобно этому, приняв во внимание, что логарифм частного равен логарифму делимого без логарифма делителя, мы получим:

$$\log {}^{N}/_{10} = \log N - \log 10 = \log N - 1;$$

$$\log {}^{N}/_{100} = \log N - \log 100 = \log N - 2;$$

$$\log {}^{N}/_{1000} = \log N - \log 1000 = \log N - 3; \text{ и т. п.}$$

Если условимся при вычитании целого числа из логарифма вычитать это целое число всегда из характеристики, а мантиссу оставлять без изменения, то можно сказать:

От деления числа на 1 с нулями мантисса логарифма не изменяется, а характеристика уменьшается на столько единиц, сколько нулей в делителе.

276. Следствия. Из свойства (**е**) можно вывести следующие два следствия:

а) ***Мантисса логарифма десятичного числа не изменяется от перенесения в числе запятой***, потому что перенесение запятой равносильно умножению или делению на 10, 100, 1000 и т. д. Таким образом, логарифмы чисел:

0,00423, 0,0423, 4,23, 423

отличаются только характеристиками, но не мантиссами (при условии, что все мантиссы положительны).

б) ***Мантиссы чисел, имеющих одну и ту же значащую часть, но отличающихся только нулями на конце, одинаковы:*** так, логарифмы чисел: 23, 230, 2300, 23 000 отличаются только характеристиками.

Замечание. Из указанных свойств десятичных логарифмов видно, что характеристику логарифма целого числа и десятичной дроби мы можем находить без помощи таблиц (в этом заключается большое удобство десятичных логарифмов); вследствие этого в логарифмических таблицах помещаются только одни мантиссы; кроме того, так как нахождение логарифмов дробей сводится к нахождению логарифмов целых чисел (логарифм дроби = логарифму числителя без логарифма знаменателя), то в таблицах помещаются мантиссы логарифмов только целых чисел.

Глава третья.

Устройство и употребление четырехзначных таблиц.

277. Системы логарифмов. Системою логарифмов называется совокупность логарифмов, вычисленных для ряда последовательных целых чисел по одному и тому же основанию. Употребительны две системы: система обыкновенных или десятичных логарифмов, в которых за основание взято число **10**, и система так называемых натуральных логарифмов, в которых за основание (по некоторым причинам, которые уясняются в других отделах математики) взято иррациональное число **2,7182818**... Для вычислений употребляются десятичные логарифмы, вследствие тех удобств, которые были нами указаны, когда мы перечисляли свойства таких логарифмов.

Натуральные логарифмы называются также Неперовыми по имени изобретателя логарифмов, шотландского математика *Непера* (1550—1617 гг.), а десятичные логарифмы — Бригговыми по имени профессора *Бригга* (современника и друга Непера), впервые составившего таблицы этих логарифмов [1)].

278. Преобразование отрицательного логарифма в такой, у которого мантисса положительна, и обратное преобразование. Мы видели, что логарифмы чисел, меньших 1, отрицательны. Значит, они состоят из отрицательной характеристики и отрицательной мантиссы. Такие логарифмы всегда можно преобразовать так, что у них мантисса будет положительная, а характеристика останется отрицательной. Для этого достаточно прибавить к мантиссе положительную единицу, а к характеристике — отрицательную (от чего, конечно, величина логарифма не изменится).

Если, напр., мы имеем логарифм **— 2,0873**, то можно написать:

$$-2{,}0873 = -2 - 1 + 1 - 0{,}0873 = -(2 + 1) + (1 - 0{,}0873) = -3 + 0{,}9127,$$

или сокращенно:

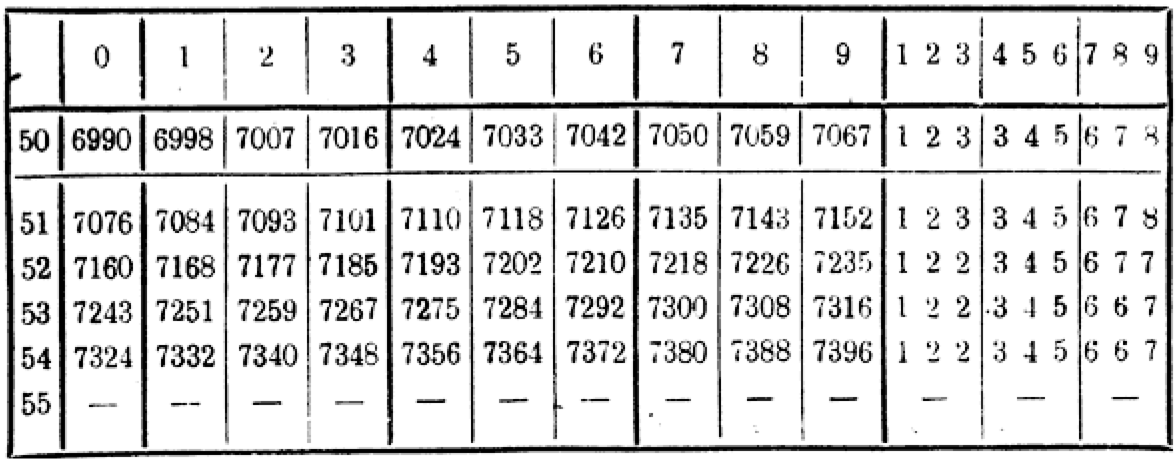
$$-2{,}0873 = \overset{-1+1}{-2{,}0873} = \bar{3}{,}9127.$$

Обратно, всякий логарифм с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой можно превратить в отрицательный. Для этого достаточно к положительной мантиссе приложить отрицательную единицу, а к отрицательной характеристике — положительную [2]: так, можно написать:

$$\bar{7}{,}8302 = \overset{+1-1}{\bar{7}{,}8302} = -6{,}1698.$$

279. Описание четырехзначных таблиц. Для решения большинства практических задач вполне достаточны четырехзначные таблицы, обращение с которыми весьма просто [3]. Таблицы эти (с надписью на верху их „логарифмы") помещены в конце этой книги, а небольшая часть их (для объяснения расположения) напечатана на этой странице. В них содержатся мантиссы логарифмов всех целых чисел от **1** до **9999** включительно, вычисленные с четырьмя десятичными знаками, причем последний из этих знаков увеличен на **1** во всех тех случаях, когда 5-й десятичный знак должен был бы оказаться 5 или более 5; следовательно, 4-значные таблицы дают приближенные мантиссы с точностью до $^1/_2$ десятитысячной доли (с недостатком или с избытком).

Логарифмы.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—			—			—	

Так как характеристику логарифма целого числа или десятичной дроби мы можем, на основании свойств десятичных логарифмов, проставить непосредственно, то из таблиц мы должны взять только мантиссы; при этом надо вспомнить, что положение запятой в десятичном числе, а также число нулей, стоящих в конце числа, не имеют влияния на величину мантиссы. Поэтому при нахождении мантиссы по данному числу мы отбрасываем в этом числе запятую, а также и нули на конце его, если таковые есть, и находим мантиссу образовавшегося после этого целого числа. При этом могут представиться следующие случаи.

1) *Целое число состоит из 3-х цифр.* Напр., пусть надо найти мантиссу логарифма числа 536. Первые две цифры этого числа, т. е. 53, находим в таблицах в первом слева вертикальном столбце (см. таблицу). Найдя число 53, продвигаемся от него по горизонтальной строке вправо до пересечения этой строчки с вертикальным столбцом, проходящим через ту из цифр 0, 1, 2, 3,... 9, поставленных наверху (и внизу) таблицы, которая представляет собою 3-ю цифру данного числа, т. е. в нашем примере цифру 6. В пересечении получим мантиссу 7292 (т. е. 0,7292), принадлежащую логарифму числа 536. Подобно этому для числа 508 найдем мантиссу 0,7059, для числа 500 найдем 0,6990 и т. п.

2) *Целое число состоит из 2-х или из 1-й цифры.* Тогда мысленно приписываем к этому числу один или два нуля и находим мантиссу для образовавшегося таким образом трехзначного числа. Напр., к числу 51 приписываем один нуль, от чего получаем 510 и находим мантиссу 7070; к числу 5 приписываем 2 нуля и находим мантиссу 6990 и т. д.

3) *Целое число выражается 4 цифрами.* Напр., надо найти мантиссу log 5436. Тогда сначала находим в таблицах, как было сейчас указано, мантиссу для числа, изображенного первыми 3-мя цифрами данного числа, т. е. для 543 (эта мантисса будет 7348); затем продвигаемся от найденной мантиссы по горизонтальной строке направо (в правую часть таблицы, расположенную за жирной вертикальной чертой) до пересечения с вертикальным столбцом, проходящим через ту из цифр: 1, 2 3,... 9, стоящих на верху (и в низу) этой части таблицы, которая представляет собою 4-ю цифру данного числа, т. е. в нашем примере цифру 6. В пересечении находим поправку (число 5), которую надо приложить в уме к мантиссе 7348, чтобы получить мантиссу числа 5436; мы получим таким образом мантиссу 0,7353.

4) *Целое число выражается 5-ю или более цифрами.* Тогда отбрасываем все цифры, кроме первых 4-х, и берем приближенное четырехзначное число, причем последнюю цифру этого числа увеличиваем на 1 в том. случае, когда отбрасываемая 5-я цифра числа есть 5 или больше 5. Так, вместо 57842 мы берем 5784, вместо 30257 берем 3026, вместо 583263 берем 5833 и т. и. Для этого округленного четырехзначного числа находим мантиссу так, как было сейчас объяснено.

Руководствуясь этими указаниями, найдем для примера логарифмы следующих чисел:

36,5; 804,7; 0,26; 0,00345; 7,2634; 3456,06.

Прежде всего, не обращаясь пока к таблицам, проставим одни характеристики, оставляя место для мантисс, которые выпишем после:

$$\log 36{,}5 = 1,.... \qquad \log 0{,}00345 = \bar{3},....$$

$$\log 804{,}7 = 2,.... \qquad \log 7{,}2634 = 0,....$$

$$\log 0{,}26 = \bar{1},.... \qquad \log 3456{,}86 = 3,....$$

Далее по таблицам выставляем прямо мантиссы:

$$\log 36{,}5 = 1{,}5623; \qquad \log 0{,}00345 = \bar{3}{,}5378;$$

$$\log 804{,}7 = 2{,}9057; \qquad \log 7{,}2634 = 0{,}8611;$$

$$\log 0{,}26 = \bar{1}{,}4150; \qquad \log 3456{,}86 = 3{,}5387.$$

280. Замечание. В некоторых четырехзначных таблицах (напр, в таблицах *В. Лорченко и Н. Оглоблина*, *С. Глазенапа*, *Н. Каменьщикова*) поправки на 4-ю цифру данного числа не помещены. Имея дело с такими таблицами, приходится поправки эти находить при помощи простого вычисления, которое можно выполнять на основании следующей истины: если числа превосходят 100, а разности между ними меньше 1, то без чувствительной погрешности можно принять, что ***разности между логарифмами пропорциональны разностям между соответствующими числами*** 4). Пусть, напр., надо найти мантиссу, соответствующую числу 5367. Мантисса эта, конечно, та же самая, что и для числа 536,7. Находим в таблицах для числа 536 мантиссу 7292. Сравнивая эту мантиссу с соседней вправо мантиссой 7300, соответствующей числу 537, мы замечаем, что если число 536 увеличится на 1, то мантисса его увеличится на 8 десятитысячных (8 есть так называемая табличная разность между двумя соседними мантиссами); если же число 536 увеличится на 0,7, то мантисса его увеличится не на 8 десятитысячных, а на некоторое меньшее число x десятитысячных, которое, согласно допущенной пропорциональности, должно удовлетворять пропорции:

$$x : 8 = 0{,}7 : 1; \text{ откуда } x = 8 \bullet 07 = 5{,}6,$$

что по округлении составляет 6 десятитысячных. Значит, мантисса для числа 536,7 (и следовательно, для числа 5367) будет: 7292 + 6 = 7298.

Заметим, что нахождение по двум рядом стоящим в таблицах числам промежуточного числа называется интерполированием. Интерполирование, описанное здесь, называется пропорциональным, так как оно основано на допущении, что изменение логарифма пропорционально изменению числа. Оно называется также линейным, так как предполагает, что графически изменение логарифмической функции выражается прямою линией.

281. Предел погрешности приближенного логарифма. Если число, которого логарифм отыскивается, есть число точное, то за предел погрешности его логарифма, найденного но 4-значным таблицам, можно, как мы говорили в § 279, принять $^1/_2$ десятитысячной доли. Если же данное число не точное, то к этому пределу погрешности надо еще добавить предел другой погрешности, происходящей от неточности самого числа. Доказано (мы опускаем это доказательство), что за такой предел можно принять произведение

$$\boldsymbol{a\ (d + 1)} \text{ десятитысячных.},$$

в котором a есть предел погрешности самого неточного числа в предположении, что *в его целой части взяты 3 цифры*, а d табличная разность мантисс, соответствующих двум последовательным трехзначным числам, между которыми заключается данное неточное число. Таким образом предел окончательной погрешности логарифма выразится тогда формулой:

$$^1/_2 + \boldsymbol{a\ (d + 1)} \text{ десятитысячных}$$

Пример. Найти log π, принимая за π приближенное число 3,14, точное до $^1/_2$сотой.

Перенеся в числе 3,14 запятую после 3-й цифры, считая слева, мы получим трехзначное число 314, точное до $^1/_2$ единицы; значит, предел погрешности неточного числа, т. е. то, что мы обозначили буквой a, есгь $^1/_2$ Из таблиц находим:

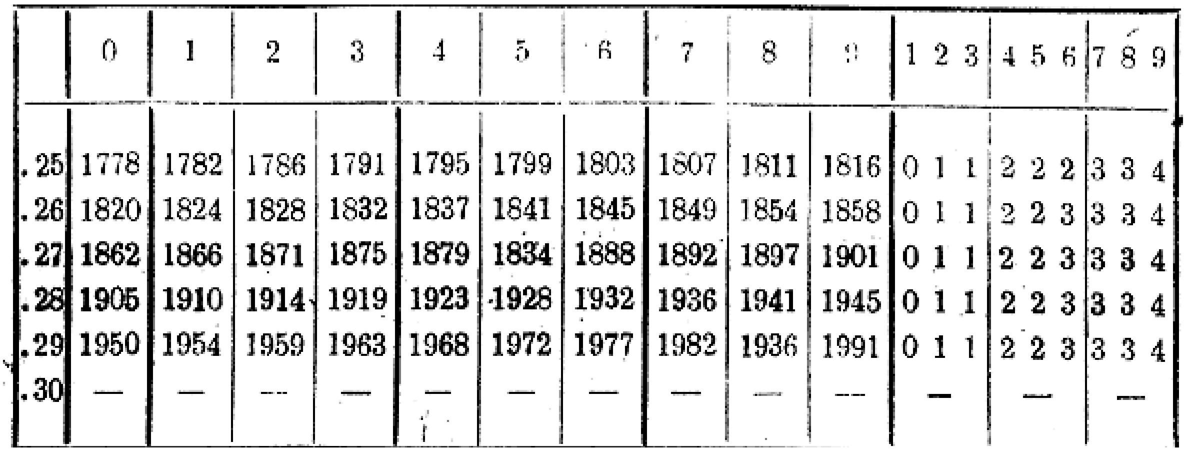
$$\mathbf{log\ 3{,}14 = 0{,}4969.}$$

Табличная разность d между мантиссами чисел 314 и 315 равна 14, поэтому погрешность найденного логарифма будет менее

$^1/_2 + ^1/_2 (14 +1) = 8$ десятитысячных.

Так как о логарифме 0,4969 мы не знаем, с недостатком ли он или с избытком, то можем только ручаться, что точный логарифм **π** заключается между 0,4969 — 0,0008 и 0,4969 + 0,0008, т. е. 0,4961 < log **π** < 0,4977.

282. Найти число по данному логарифму. Для нахождения числа по данному логарифму могут служить те же таблицы, по которым отыскиваются мантиссы данных чисел; но удобнее пользоваться другими таблицами, в которых помещены так называемые антилогарифмы, т. е. числа, соответствующие данным мантиссам. Таблицы эти, обозначенные надписью сверху „антилогарифмы", помещены в конце этой книги вслед за таблицами логарифмов; небольшая часть их помещена на этой странице (для объяснения).



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1834	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1936	1991	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—			—			—	

Пусть дана 4-значная мантисса 2863 (на характеристику не обращаем внимания) и требуется найти соответствующее целое число. Тогда, имея таблицы антилогарифмов, надо пользоваться ими совершенно так же, как было раньше объяснено для нахождения мантисс по данному числу, а именно: первые 2 цифры мантиссы мы находим в первом слева столбце. Затем продвигаемся от этих цифр по горизонтальной строке вправо до пересечения с вертикальным столбцом, идущим от 3-й цифры мантиссы, которую надо искать в верхней строке (или в нижней). В пересечении находим четырехзначное число 1932, соответствующее мантиссе 286. Затем от этого числа продвигаемся дальше по горизонтальной строке направо до пересечения с вертикальным столбцом, идущим от 4-й цифры мантиссы, которую надо найти наверху (или внизу) среди поставленных там цифр 1, 2, 3,... 9. В пересечении мы находим поправку 1, которую надо приложить (в уме) к найденному раньше числу 1032, чтобы получить число, соответствующее мантиссе 2863.

Таким образом, число это будет 1933. После этого, обращая внимание на характеристику, надо в числе 1933 поставить занятую на надлежащем месте. Например:

если **log** ***x*** = 3,2863, то ***x*** = 1933,

„ **log *x* =** 1,2863, „ ***x*** = 19,33,

,, **log *x*** = 0,2&63, „ ***x*** = 1,933,

„ **log *x*** = $\bar{2}$,2863, „ ***x*** = 0,01933

и т.п.

Вот еще примеры:

$\log x = 0{,}2287$, $x = 1{,}693$,

$\log x = \overline{1}{,}7635$, $x = 0{,}5801$,

$\log x = 3{,}5029$, $x = 3184$,

$\log x = \overline{2}{,}0436$, $x = 0{,}01106$.

Если в мантиссе указано 5 или более цифр, то берем только первые 4 цифры, отбрасывая остальные (и увеличивая 4-ю цифру на 1, если 5-я цифра есть пять или более). Напр., вместо мантиссы 35478 берем 3548, вместо 47562 берем 4756.

283. Замечание. Поправку на 4-ю и следующие цифры мантиссы можно находить и посредством интерполирования. Так, если мантисса будет 84357, то, найдя число 6966, соответствущее мантиссе 843 мы можем рассуждать далее так :: если мантисса увеличивается на 1 (тысячную), т. е. сделаетоя 844, то число, как видно из таблиц, увеличится на 16 единиц; если же мантисса увеличится не на 1 (тысячную), а на 0,57 (тысячной), то число увеличится на x единиц, причем x должно удовлетворять пропорции:

$x : 16 = 0{,}57 : 1$, откуда $x = 16 \cdot 0{,}57 = 9{,}12$.

Значит, искомое число будет 6966+ 9,12 = 6975,12 или (ограничиваясь только четырьмя цифрами) 6975.

284. Предел погрешности найденного числа. Доказано, что в том случае, когда в найденном числе запятая стоит после 3-й слева цифры, т. е. когда характеристика логарифма есть 2, за предел погрешности можно принять сумму

$$\frac{a+0{,}5}{d}+0{,}05$$

где a есть предел погрешности логарифма (выраженный в десятитысячных долях), по которому отыскивалось число, и d — разность между мантиссами двух трехзначных последовательных чисел, между которыми заключается найденное число (с запятой после 3-й цифры слева). Когда характеристика будет не 2, а какая-нибудь иная, то в найденном числе запятую придется перенести влево или вправо, т. е. разделить или умножить число на некоторую степень 10. При этом погрешность результата также разделится или умножится на ту же степень 10.

Пусть, например, мы отыскиваем число по логарифму **1,5950**, о котором известно, чго он точен до 3 десятитысячных; значит, тогда a = **3**. Число, соответствующее этому логарифму, найденное по таблице антилогарифмов, есть **39,36**. Перенеся запятую после 3-й цифры слева, будем иметь число **393,6**, заключающееся между **393** и **394**. Из таблиц логарифмов видим, что разность между мантиссами, соответствующими этим двум числам, составляет **11** десятитысячных; значит d = **11**. Погрешность числа 393,6 будет меньше

$$\frac{3+0{,}5}{11}+0{,}05=0{,}32+0{,}05=0{,}37<0{,}5.$$

Значит, погрешность числа **39,36** будет меньше **0,05**.

285. Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками. Сложение и вычитание логарифмов не представляют никаких затруднений, как это видно из следующих примеров:

$$\begin{array}{r} \overline{2},9734 \\ +\;1,8302 \\ \hline 0,8036 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{3},8384 \\ +\;\overline{5},8804 \\ \hline \overline{7},7188 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{1},0384 \\ -\;5,9630 \\ \hline \overline{7},0754 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,0052 \\ -\;\overline{4},5736 \\ \hline 3,4316 \end{array}$$

Не представляет никаких затруднений также и умножение логарифма на положительное число, напр.:

$$\begin{array}{r} \overline{3},5837 \\ \times 9 \\ \hline \overline{22},2533 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \overline{2},4735 \\ \times 34 \\ \hline 18940 \\ 14205 \\ \hline 16,0990 \\ -\;68 \\ \hline \overline{52},0990. \end{array}$$

В последнем примере отдельно умножена положительная мантисса на 34, затем отрицательная характеристика на 34.

Если логарифм о отрицательной характеристикой и положительной мантиссой умножается на отрицательное число, то поступают двояко: или предварительно данный логарифм обращают в отрицательный, или же умножают отдельно мантиссу и характеристику и результаты соединяют вместе, например:

$$\overline{3},5632 \cdot (-4) = -2,4368 \cdot (-4) = 9,7472;$$

$$\overline{3},5632 \cdot (-4) = +12 - 2,2528 = 9,7472.$$

При делении могут представиться два случая: **1)** отрицательная характеристика делится и **2)** не делится на делитель. В первом случае отдельно делят характеристику и мантиссу:

$$\overline{10},3784 : 5 = \overline{2},0757.$$

Во втором случае прибавляют к характеристике столько отрицательных единиц, чтобы образовавшееся число делилось на делитель; к мантиссе прибавляют столько же положительных единиц:

$$\overline{3},7608 : 8 = (-8 + 5,7608) : 8 = \overline{1},7201.$$

Это преобразование надо совершать в уме, так что действие располагается так:

$$\overline{3},7608 : 8 = \overline{1},7201 \quad \text{или} \quad \begin{array}{r|l} \overline{3},7608 & 8 \\ \cline{2-2} & \overline{1},7201. \end{array}$$

286. Замена вычитаемых логарифмов слагаемыми. При вычислении какого-нибудь сложного выражения помощью логарифмов приходится некоторые логарифмы складывать, другие вычитать; в таком случае, при обыкновенном способе совершения действий, находят отдельно сумму слагаемых логарифмов, потом сумму вычитаемых и из первой суммы вычитают вторую. Напр., если имеем:

$$\log x = 2{,}7305 - \bar{2}{,}0740 + \bar{3}{,}5464 - 8{,}3589,$$

то обыкновенное выполнение действий расположится так:

$$+\begin{array}{r} 2{,}7305 \\ \underline{\bar{3}{,}5464} \\ 0{,}2769 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 2{,}0740 \\ \underline{8{,}3589} \\ 6{,}4329 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 0{,}2769 \\ \underline{6{,}4329} \\ \bar{7}{,}8440 \end{array} = \log x.$$

Есть однако возможность заменить вычитание сложением. Так:

$$-\bar{2}{,}0740 = 2 - 0{,}0740 = 1{,}9260$$

$$-8{,}3589 = \overset{-1+1}{-8{,}3589} = \bar{9}{,}6411.$$

Теперь можно расположить вычисление так:

$$\begin{array}{r} 2{,}7305 \\ 1{,}9260 \\ \bar{3}{,}5464 \\ \underline{\bar{9}{,}6411} \\ \bar{7}{,}8440 \end{array} = \log\ x.$$

287. Примеры вычислений.

Пример 1. Вычислить выражение:

$$x = \frac{\sqrt[3]{A} \cdot B^4}{C^3 \cdot \sqrt[3]{D}},$$

если **A = 0,8216, B = 0,04826, C= 0,005127** и **D = 7,246.**

Логарифмируем данное выражение:

$$\log x = {}^1/_3 \log A + 4 \log B - 3 \log C - {}^1/_3 \log D$$

Теперь, для избежания излишней потери времени и для уменьшения возможности ошибок, прежде всего расположим все вычисления, не исполняя пока их и не обращаясь, следовательно, к таблицам:

$\log A = \log 0{,}8216 = \bar{1},\ \ldots\ldots$	${}^1/_3 \log A =$
$\log B = \log 0{,}04826 = \bar{2},\ \ldots\ldots$	$4 \log B =$
$\log C = \log 0{,}005127 = \bar{3},\ \ldots\ldots$	$-3 \log C =$
$3 \log C \ldots\ldots =$	$-{}^1/_3 \log D =$
$\log D = \log 7{,}246 = 0,\ \ldots\ldots$	$\log x =$
${}^1/_3 \log D \ldots\ldots = \quad \ldots\ldots$	$x =$

После этого берем таблицы и проставляем логарифмы на оставленных свободных местах:

$$\begin{aligned}
\log A &= \log 0{,}8216 = \overline{1}{,}9146\\
\log B &= \log 0{,}04826 = \overline{2}{,}6835\\
\log C &= \log 0{,}005127 = \overline{3}{,}7099\\
3\log C &\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \overline{7}{,}1297\\
\log D &= \log 7{,}246 = 0{,}8601\\
{}^1/_3 \log D &\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = 0{,}2867
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^1/_3 \log A &= \overline{1}{,}9715\\
4\log B &= \overline{6}{,}7340\\
-3\log C &= 6{,}8703\\
-{}^1/_3 \log D &= \overline{1}{,}7133\\
\hline
\log x &= 1{,}2891\\
x &= 19{,}45.
\end{aligned}$$

Предел погрешности. Сначала найдем предел погрешности числа $x_1 = 194{,}5$, равный:

$$\frac{a+0{,}5}{d} + 0{,}05$$

Значит, прежде всего надо найти ***a***, т. е. предел погрешности приближенного логарифма, выраженный в десятитысячных долях. Допустим, что данные числа **A, B, C** и **D** все точные. Тогда погрешности в отдельных логарифмах будут следующие (в десятитысячных долях):

в **logA**.......... $^1/_2$

в $^1/_3$ **log A**.........$^1/_6$ + $^1/_2$ = $^2/_3$

($^1/_2$ прибавлена потому, что при делении на 3 логарифма 1,9146 мы округлили частное, отбросив 5-ю цифру его, и, следовательно, сделали еще ошибку,меньшую $^1/_2$ десятитысячной).

в $\log B$ . . . . $^1/_2$

в $4\log B$ . . . . $^1/_2 \cdot 4 = 2$

в $\log C$ . . . . $^1/_2$

в $3\log C$ . . . . $^3/_2$

в $-3\log C$ . . . . $^3/_2$

в $\log D$ . . . . $^1/_2$

в $^1/_3\log D$ . . . . $^1/_6$

в $-{}^1/_3\log D$ . . . . $^1/_6$

Теперь находим предел погрешности логарифма:

$$a = {}^2/_3 + 2 + {}^3/_2 + {}^1/_6 = 4\,{}^1/_3 \text{ (десятитысячных).}$$

Определим далее ***d*** . Так как $x_1 = 194{,}5$, то 2 целых последовательных числа, между которыми заключается x_1 будут **194** и **195**. Табличная разность ***d*** между мантиссами, соответствующими этим числам, равна **22**. Значит, предел погрешности числа x_1 есть:

$$\frac{a+0{,}5}{22} + 0{,}05 = \frac{4^1/_3+0{,}5}{22} + 0{,}05 = \frac{4{,}33\ldots+0{,}5}{22} + 0{,}05 = 0{,}27 < 0{,}3.$$

Так как $x = x_1 : 10$, то предел погрешности в числе x равен **0,3:10 = 0,03**. Таким образом, найденное нами число **19,45** разнится от точного числа менее, чем на **0,03**. Так как мы не знаем, с недостатком или с избытком найдено наше приближение, то можем только ручаться, что

$$19{,}45 + 0{,}03 > x > 19{,}45 - 0{,}03, \text{ т. е.}$$

$$19{,}48 > x > 19{,}42,$$

и потому, если примем $x = 19{,}4$, то будем иметь приближение с недостатком с точностью до 0,1.

Пример 2. Вычислить:

$$x = (-2{,}31)^3 \sqrt[5]{72} = -(2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}.$$

Так как отрицательные числа не имеют логарифмов, то предварительно находим:

$$x' = (2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}$$

по разложению:

$$\log x' = 3 \log 2{,}31 + {}^1/_5 \log 72.$$

После вычисления окажется:

$$x' = 28{,}99;$$

следовательно,

$$x = -28{,}99.$$

Пример 3. Вычислить:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}.$$

Сплошного логарифмирования здесь применить нельзя, так как под знаком корня стоит сумма. В подобных случаях вычисляют формулу по частям.

Сначала находим $N = \sqrt[5]{8}$, потом $N_1 = \sqrt[4]{3}$; далее простым сложением определяем $N + N_1$, и, наконец, вычисляем $\sqrt[3]{N + N_1}$; окажется:

$$N = 1{,}514, \quad N_1 = 1{,}316; \quad N + N_1 = 2{,}830.$$

$$\log x = \log \sqrt[3]{2{,}830} = {}^1/_3 \log 2{,}830 = 0{,}1506;$$

$$x = 1{,}415.$$

Глава четвертая.

Показательные и логарифмические уравнения.

288. Показательными уравнениями называются такие, в которых неизвестное входит в показатель степени, а логарифмическими — такие, в которых неизвестное входит под знаком **log**. Такие уравнения могут быть разрешаемы только в частных случаях, причем приходится основываться на свойствах логарифмов и на том начале, что если числа равны, то равны и их логарифмы, и, обратно, если логарифмы равны, то равны и соответствующие им числа.

Пример 1. Решить уравнение: $\mathbf{2^x = 1024}$.

Логарифмируем обе части уравнения:

$$x \log 2 = \log 1024; \qquad x = \frac{\log 1024}{\log 2} = \frac{3{,}0103}{0{,}3010} = 10.$$

Пример 2. Решить уравнение: $a^{2x} - a^x = 1$. Положив $a^x = y$, получим квадратное уравнение:

$$y^2 - y - 1 = 0,$$

откуда:

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Следовательно,

$$a^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad a^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Так как $1-\sqrt{5} < 0$, то последнее уравнение невозможно (функция a^x всегда есть число положительное), а первое дает:

$$x = \frac{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}{\log a}$$

Пример 3. Решить уравнение:

$$\log(a+x) + \log(b+x) = \log(c+x).$$

Уравнение можно написать так:

$$\log[(a+x)(b+x)] = \log(c+x).$$

Из равенства логарифмов заключаем о равенстве чисел:

$$(a+x)(b+x) = c+x.$$

Это есть квадратное уравнение, решение которого не представляет затруднений.

Глава пятая.

Сложные проценты, срочные уплаты и срочные взносы.

289. Основная задача на сложные проценты. В какую сумму обратится капитал ***a*** рублей, отданный в рост по ***p*** сложных процентов, по прошествии ***t*** лет (***t*** — целое число)?

Говорят, что капитал отдан по сложным процентам, если принимаются во внимание так называемые „проценты на проценты", т. е. если причитающиеся на капитал процентные деньги присоединяются в конце каждого года к капиталу для наращения их процентами в следующие годы.

Каждый рубль капитала, отданного по ***p*** %, в течение одного года принесет прибыли $^{p}/_{100}$ рубля, и, следовательно, каждый рубль капитала через 1 год обратится в **1**+ $^{p}/_{100}$ рубля (напр., если капитал отдан по **5**% , то каждый рубль его через год обратится в **1**+ $^{5}/_{100}$, т. е. в **1,05** рубля).

Обозначив для краткости дробь $^{p}/_{100}$ одною буквою, напр, ***r***, можем сказать, что каждый рубль капитала через год обратится в **1** + ***r*** рублей; следовательно, ***a*** рублей обратятся через 1 год в $a(1 + r)$ руб. Еще через год, т. е. через 2 года от начала роста, каждый рубль из этих $a\ (1 + r)$ руб. обратится снова в $1 + r$ руб.; значит, весь капитал обратится в $a\ (1 + r)^{2}$ руб. Таким же образом найдем, что через три года капитал будет $a\ (1 + r)^{3}$, через четыре года будет $a\ (1 + r)^{4}$,... вообще через ***t*** лет, если ***t*** есть целое число, он обратится в $a\ (1 + r)^{t}$ руб. Таким образом, обозначив через **А** окончательный капитал, будем иметь следующую формулу сложных процентов:

$$A = a\ (1 + r)^{t} \text{ где } r = {}^{p}/_{100}.$$

<u>Пример.</u> Пусть ***a*** =**2 300 руб.,** ***p*** **= 4,** ***t*** **=20** лет; тогда формула дает:

$$r = {}^{4}/_{100} = 0{,}04; \quad A = 2\ 300 \bullet (1{,}04)^{20}.$$

Чтобы вычислить **А**, применяем логарифмы:

$$\log a = \log 2\ 300 + 20 \log 1{,}04 = 3{,}3617 + 20 \bullet 0{,}0170 = 3{,}3617 + 0{,}3400 = 3{,}7017.$$

$$A = 5031 \text{ рубль.}$$

Замечание. В этом примере нам пришлось **log 1,04** умножить на **20**. Так как число **0,0170** есть приближенное значение **log 1,04** с точностью до $^{1}/_{2}$ десятитысячной доли, то произведение этого числа на **20** будет точно только до $^{1}/_{2} \bullet 20$, т. е. до 10 десятитысячных =1 тысячной. Поэтому в сумме **3,7017** мы не можем ручаться не только за цифру десятитысячных, но и за цифру тысячных. Чтобы в подобных случаях можно было получить большую точность, лучше для числа **1** + ***r*** брать логарифмы не 4-значные, а с большим числом цифр, напр. 7-значные. Для этой цели мы приводим здесь небольшую табличку, в которой выписаны 7-значные логарифмы для наиболее употребительных значений ***p***.

p	$1+r$	$\log(1+r)$
3	1,03	0,0128 372
$3^1/_4$	1,0325	0,0138 901
$3^1/_2$	1,035	0,0149 403
$3^3/_4$	1,0375	0,0159 881
4	1,04	0,0170 333
$4^1/_4$	1,0425	0,0180 761
$4^1/_2$	1,045	0,0191 163
$4^3/_4$	1,0475	0,0201 540
5	1,05	0,0211 893

290. Основная задача на срочные уплаты. Некто занял a рублей по p % с условием погасить долг, вместе с причитающимися на него процентами, в t лет, внося в конце каждого года одну и ту же сумму. Какова должна быть эта сумма?

Сумма x, вносимая ежегодно при таких условиях, называется срочною уплатою. Обозначим опять буквою r ежегодные процентные деньги с 1 руб., т. е. число $^p/_{100}$. Тогда к концу первого года долг a возрастает до $a(1 + r)$, аза уплатою x рублей он сделается $a(1 + r)—x$.

К концу второго года каждый рубль этой суммы снова обратится в $1 + r$ рублей, и потому долг будет $[a(1 + r)—x](1 + r) = a(1 + r)^2 — x(1 + r)$, а за уплатою x рублей окажется: $a(1 + r)^2 — x(1 + r) — x$. Таким же образом убедимся, что к концу 3-го года долг будет

$$a(1 + r)^3 — x(1 + r)^2 — x(1 + r) — x,$$

и вообще и концу t-го года он окажется:

$$a(1 + r)^t — x(1 + r)^{t—1} — x(1 + r)^{t—2}... — x(1 + r) — x, \text{ или}$$

$$a(1 + r)^t — x[1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + ...+ (1 + r)^{t—2} + (1 + r)^{t—1}]$$

Многочлен, стоящий внутри скобок [], представляет сумму членов геометрической прогрессии; у которой первый член есть 1, последний $(1 + r)^{t—1}$, а знаменатель $(1 + r)$. По формуле для суммы членов геометрической прогрессии (отдел 10 глава 3 § 249) находим:

$$s = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{(1+r)^{t-1}(1+r) - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

и величина долга после t-ой уплаты будет:

$$a(1+r)^t - x\frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

По условию задачи, долг в конце t-го года должен равняться 0; поэтому:

$$a(1+r)^t - x\frac{(1+r)^t-1}{r} = 0,$$ откуда

$$x = \frac{a(1+r)^t r}{(1+r)^t - 1}$$

При вычислении этой формулы срочных уплат помощью логарифмов мы должны сначала найти вспомогательное число $N = (1 + r)^t$ по логарифму: **log N=** t **log** $(1 + r)$; найдя **N**, вычтем из него 1, тогда получим знаменатель формулы для ***x*,** после чего вторичным логарифмированием найдем:

$$\log x = \log a + \log N + \log r - \log (N - 1).$$

291. Основная задача на срочные взносы. Некто вносит в банк в начале каждого года одну и ту же сумму ***a*** руб. Определить, какой капитал образуется из этих взносов по прошествии ***t*** лет, если банк платит по ***p*** сложных процентов.

Обозначив через ***r*** ежегодные процентные деньги с 1 рубля, т. е. $^p/_{100}$, рассуждаем так: к концу первого года капитал будет $a\,(1 + r)$;

в начале 2-го года к этой сумме прибавится ***a*** рублей; значит, в это время капитал окажется $a\,(1 + r) + a$. К концу 2-го года он будет $a\,(1 + r)^2 + a\,(1 + r)$;

в начале 3-го года снова вносится ***a*** рублей; значит, в это время капитал будет $a\,(1 + r)^2 + a\,(1 + r) + a$; к концу 3-го он окажется $a\,(1 + r)^3 + a\,(1 + r)^2 + a\,(1 + r)$ Продолжая эти рассуждения далее, найдем, что к концу ***t***-го года искомый капитал **A** будет:

$$\begin{aligned} A &= a(1+r)^t + a(1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \ldots + a(1+r) = \\ &= a(1+r)\,[(1+r^{t-1}) + (1+r)^{t-2} + \ldots + 1] = \\ &= a(1+r)\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1} = a(1+r)\frac{(1+r)^t-1}{r} \end{aligned}$$

Такова формула срочных взносов, делаемых в начале каждого года.

Ту же формулу можно получить и таким рассуждением:. первый взнос в ***a*** рублей, находясь в банке ***t*** лет, обратится, согласно формуле сложных процентов, в $a\,(1 + r)^t$ руб. Второй взнос, находясь в банке одним годом меньше, т. е. $t - 1$ лет, обратится в $a\,(1 + r)^{t-1}$ руб. Подобно этому третий взнос даст $a\,(1 + r)^{t-2}$ и т. д., и, наконец, последний взнос, находясь в банке только 1 год, обратится в $a\,(1 + r)$ руб. Значит, окончательный капитал **A** руб. будет:

$$A = a\,(1 + r)^t + a\,(1 + r)^{t-1} + a\,(1 + r)^{t-2} + \ldots + a\,(1 + r),$$

что, после упрощения, дает найденную выше формулу.

При вычислении помощью логарифмов этой формулы надо поступить так же, как и при вычислении формулы срочных уплат, т. е. сначала найти число $N = (1 + r)^t$ по его логарифму: **log N=** t **log** $(1 + r)$, затем число **N— 1** и уже тогда логарифмировать формулу:

$$\log A = \log a + \log (1 + r) + \log (N - 1) - 1\text{og}\ r$$

Замечание. Если бы срочный взнос в ***a*** руб. производился не в начале, а в конце каждого года (как, напр., вносится срочная уплата ***x*** для погашения долга), то, рассуждая подобно предыдущему, найдем, что к концу ***t***-го года искомый капитал **A'** руб. будет (считая в том числе и последний взнос ***a*** руб., не приносящий процентов):

$$A' = a (1 + r)^{t - 1} + a (1 + r)^{t - 2} + \ldots + a (1 + r) + a$$

что равно:

$$A' = a\,\frac{(1+r)^t - 1}{r}\,,$$

т. е. **A'** оказывается в (**1** + ***r***) раз менее **A**, что и надо было ожидать, так как каждый рубль капитала **A'** лежит в банке годом меньше, чем соответствующий рубль капитала **A**.

1) Должно однако заметить, что Неперовы логарифмы не тождественны натуральным, а только связаны с ними некоторым соотношением. Впервые натуральные логарифмы были введены после смерти *Непера* в 1619 г. учителем математики в Лондоне, *Джоном Спейделем*. В следующем, 1620, году швейцарец *Бюрги* опубликовал свои таблицы, составленные им независимо от *Непера*.

Заметим, что в 1914 году исполнилось трехсотлетие изобретения логарифмов, так как таблицы *Непера* были им опубликованы в 1614 году (под названием *„Mirifici logarithmorum canonis descriptio"*).

2) Для выполнения этих преобразований приходится прибавить+ 1 и—1— одно из этих чисел к характеристике, а другое к мантиссе. Чтобы не ошибиться, к чему прибавить +1 и к чему — 1, полезно всегда обращать внимание на мантиссу заданного логарифма и рассуждать так: пусть в заданном логарифме мантисса отрицательна, а надо ее сделать положительной; тогда к ней, конечно, следует прибавить + 1, а потому к характеристике надо прибавить—1; пусть в заданном логарифме мантисса будет положительна, а надо ее сделать отрицательной (весь логарифм должен быть отрицательный), тогда к ней следует добавить —1, а, следовательно, к характеристике + 1.

3) В случаях, требующих большой точности, пользуются пятизначными таблицами и многда семизначными (напр. „Логарифмически-тригонометрическое руководство" бар. *Георга Вега*). Способ пользования такими таблицами объяснен во введении к ним.

4) Рассматривая график логарифмической функции **$y = \log_{10}x$**, мы замечаем, что даже для чисел небольших (напр, для чисел от 3 до 10) график очень мало отличается от прямой линии. Если бы этот график продолжить направо для чисел от 10 до 100 (т. е. на 90 единиц длины вдоль оси x-ов), то ординаты возросли бы только от 1 до 2 (так как log 10 = 1, а log 100 =2); при дальнейшем его продолжении для чисел от 100 до 1000 (т. е. на 900 единиц длины) ординаты увеличились бы снова только на 1 единицу. Значит, для чисел, больших 100, без чувствительной ошибки можно принять, что график функции **$y = \log_{10}x$**, совпадает с прямой. Но допустить это — значит принять, что для таких чисел приращения ординат пропорциональны приращениям абсцисс, т. е., другими словами, что разности между логарифмами пропорциональны разностям между числами.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ТРИНАДЦАТЫЙ.

Соединения и бином Ньютона.

Глава первая. **Соединения.**
Глава вторая. **Бином Ньютона.**

Глава первая.

Соединения.

292. Определение. Различные группы, составленные из каких-либо предметов и отличающиеся одна от другой или порядком этих предметов или самими предметами, называются вообще соединениями.

Если, например, из 10 различных цифр: 0,1, 2, 3,... 9 будем составлять группы по нескольку цифр в каждой, напр, такие: 123, 312, 8056, 5630, 42 и т. п., то будем получать различные соединения из этих цифр. Из них некоторые, напр. 123 и 312, различаются только порядком предметов, другие же, напр. 8050 и 312, разнятся самими предметами (и даже числом предметов).

Предметы, из которых составляются соединения, называются элементами и обозначаются обыкновенно буквами ***a, b, c***,...

Соединения могут быть трех родов: размещения, перестановки и сочетания. Рассмотрим их отдельно.

293. Размещения. Пусть число предметов, из которых мы составляем различные соединения, равно 3 (напр, три карты); обозначим эти предметы ***a, b,*** и ***c***. Из них можно составить соединения

по одному:	***a, b, c***,
по два:	***ab, ac, bc;*** ***ba, ca, cb,***
по три:	***abc, acb, bac, bca, cab, cba.***

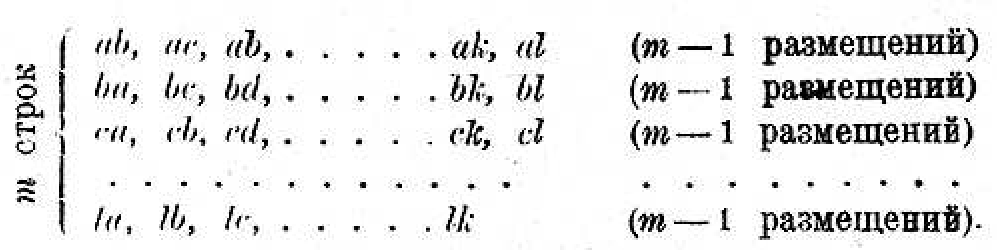
Возьмем из этих соединений соединения по 2. Они отличаются одно от другого либо предметами, напр. ***ab*** и ***ac***, либо порядком предметов, напр. ***ab*** и ***ba***, но число предметов в них одно и то же. Такие соединения называются размещениями из 3 элементов по 2.

Вообще ***размещениями из m элементов по n называются такие соединения, из которых каждое содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и которые отличаются одно от другого или предметами или порядком предметов*** (значит, предполагается, что $n \leq m$). Так, написанные выше соединения по 3 будут размещены из 3-х элементов по 3 (различаются только порядком), соединения по 2 будут размещены из 3-х элементов по 2 (различаются или предметами или порядком).

Размещения из данных ***m*** элементов могут быть по 1,по2, по 3,... и, наконец, по ***m.***

Иногда бывает нужно знать число всевозможных размещений, которые можно составить из ***m*** элементов по ***n***, не составляя самих размещений. Число это принято обозначать так: A^n_m (здесь ***A*** есть начальная буква французского слова „arrangement", что значит размещение). Чтобы найти это число, рассмотрим прием, посредством которого можно составлять всевозможные размещения.

Пусть нам дано ***m*** элементов: ***a, b, c,... k, l***. Сначала составим из них все размещения по одному. Их, очевидно, будет ***m***. Значит: $A^1_m = m$. Теперь составим все размещение по два. Для этого к каждому из ранее составленных размещений по одному приставим последовательно все оставшиеся ***m* — 1** элементов но одному. Так, к. элементу ***a*** приставим последовательно оставшиеся элементы: ***b, c,... k, l***; к элементу ***b*** приставим последовательно оставшиеся элементы: ***a, c,... k, l*** и т. д. Тогда получим следующие размещения по два:

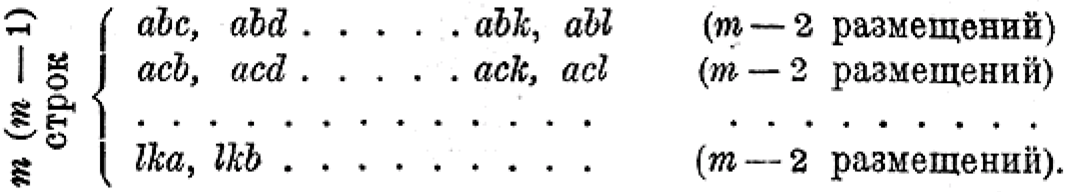


$$m\ \text{строк}\left\{\begin{array}{ll} ab,\ ac,\ ab,\ \ldots\ldots\ ak,\ al & (m-1\ \text{размещений}) \\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots\ldots\ bk,\ bl & (m-1\ \text{размещений}) \\ ca,\ cb,\ cd,\ \ldots\ldots\ ck,\ cl & (m-1\ \text{размещений}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ la,\ lb,\ lc,\ \ldots\ldots\ lk & (m-1\ \text{размещений}). \end{array}\right.$$

Так как всех элементов ***m***, то из каждого размещения по 1 элементу мы получим ***m* — 1** размещений по 2, а всего их будет (***m* — 1**) ***m***. Очевидно, что других размещений по 2 быть не может. Значит:

$$A^2_m = m\,(m - 1).$$

Чтобы составить теперь размещения по 3, берем каждое из составленных сейчас размещений по 2 и приставляем к нему последовательно по одному все ***m* — 2** оставшихся элементов. Тогда получим следующие размещения по 3:



$$m\,(m-1)\ \text{строк}\left\{\begin{array}{ll} abc,\ abd\ \ldots\ldots\ abk,\ abl & (m-2\ \text{размещений}) \\ acb,\ acd\ \ldots\ldots\ ack,\ acl & (m-2\ \text{размещений}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ lka,\ lkb\ \ldots\ldots\ldots & (m-2\ \text{размещений}). \end{array}\right.$$

Так как число всех размещений по 2 равно ***m*** (***m* — 1**) и из каждого получается (***m* — 2**) размещения по 3, то всех таких размещений окажется:

$$(m - 2)\,[m\,(m - 1)] = m\,(m - 1)\,(m - 2).$$

Таким образом:

$$A^3_m = m\,(m - 1)(m - 2).$$

Подобно этому получим:

$$A^4_m = m\,(m - 1)(m - 2)(m - 3);$$

$$A^5_m = m\,(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4),\ \text{и вообще:}$$

$$A^n_m = m\,(m - 1)(m - 2)\,\ldots\,[m - (n - 1)].$$

Такова формула размещений; ее можно высказать так: *число всевозможных размещений из **m** элементов по **n** равно произведению **n** последовательных целых чисел, из которых большее есть **m**.*

Таким образом:

$$A^2_4 = 4 \cdot 3 = 12;\ \ A^3_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24,$$

$$A^4_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680, \text{ и т. п.}$$

294. Задачи. 1) В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в день?

Всевозможные распределения уроков в день представляют собою, очевидно, всевозможные размещения из 10 элементов по 5; поэтому всех способов распределения должно быть:

$$A^5_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\ 210.$$

2) Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое выражалась бы тремя различными значащими цифрами?

Искомое число есть число размещений из 9 значащих цифр по 3; следовательно, оно равно $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

3) Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое выражалось бы тремя различными цифрами?

Из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, ... 9 можно составить размещений по три $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; но из этого числа надо исключить число тех размещений по три, которые начинаются с цифры 0. Таких размещений будет столько, сколько можно составить размещений по 2 из 9 значащих цифр, т. е. $9 \cdot 8 = 72$; следовательно, искомое число 720 — 72 = 618.

295. Перестановки. Если размещения из ***m*** элементов взяты по ***n*** (и значит, различаются только порядком элементов), то такие размещения называются перестановками. Напр., перестановки из двух элементов ***a*** и ***b*** будут размещения из 2-х по 2, т. е. ***ab*** и ***ba***, перестановки из 3-х элементов будут размещены из 3-х по 3, т. е. ***abc, acb, bac, bca, cab, cba,*** и т. п.

Число всевозможных перестановок из ***m*** элементов обозначается P_m (здесь ***P*** есть начальная буква французского слова *„permulation"*, что значит: перестановка).

Так как перестановки из ***m*** элементов — это размещения из ***m*** по ***m***, то формула перестановок будет такая:

$$P_m = A^m_m = m(m - 1)(m - 2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m - 1)\, m,$$

т. е. *число всевозможных перестановок из **m** элементов равно произведению натуральных чисел от **1** до **m**.*

296. Задачи. 1) Сколько девятизначных чисел можно написать девятью разными значащими цифрами?

Искомое число есть P_9 = 1 • 2 • 3 ... 9 = 362 880.

2) Сколькими способами можно разместить 12 лиц за столом, на котором поставлено 12 приборов?

Число способов = 1•2•3 ... 12 = 479 001 600.

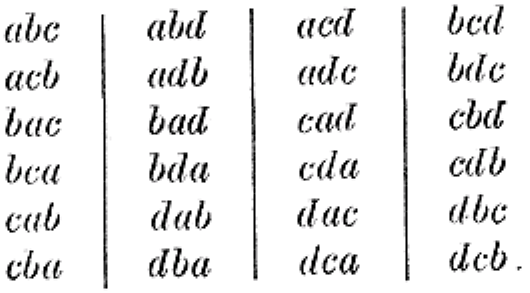
Замечание. Произведение натуральных чисел от **1** до m включительно (обозначается сокращенно так: $m\,!$) растет чрезвычайно быстро с возрастанием m; так, при m = 12 оно дает 479 001600, при m = 100 оно выражается числом, требующим 158 цифр для своего изображения.

297. Сочетания. Если из всех размещений, которые можно составить из m элементов по n, мы отберем только те, которые одно от другого разнятся, по крайней мере, одним элементом, то получим размещения, которые называются сочетаниями.

Напр., из 4 элементов ***a, b, c*** и ***d***, сочетания по 3 будут:

abc, abd, acd, bcd.

Если в каждом из этих сочетаний сделаем всевозможные перестановки, то получим всевозможные размещения из 4-х элементов по 3.



abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*.

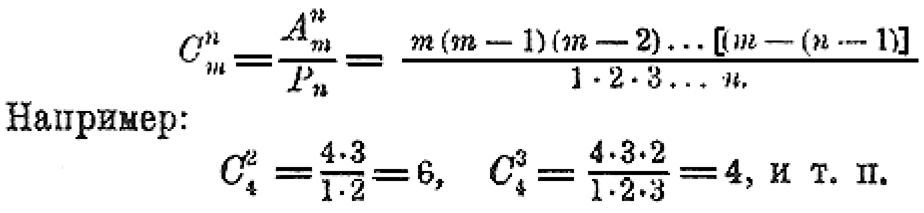
Число таких размещений равно, очевидно, 6•4 = 24.

Таким образом, число всех размещений из m элементов по n равно числу всех сочетаний из m элементов по n, умноженному на число всех перестановок, какие можно сделать из n элементов, т. е.

$$A^n_m = C^n_m P_n$$

где C^n_m означает число всех сочетаний из m по n (C есть начальная буква французского слова "*combinaison*" , что значит: сочетание).

Отсюда выводим следующую формулу сочетаний:



$$C^n_m = \frac{A^n_m}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots n.}$$

Например:

$$C^2_4 = \frac{4\cdot3}{1\cdot2} = 6, \quad C^3_4 = \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3} = 4, \text{ и т. п.}$$

298. Задачи. 1) Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должны быть выбраны трое. Сколько может быть разных случаев выборов?

Искомое число, очевидно, составляет число всевозможных сочетаний из 10 элементов по 3, т. е.

$$C_{10}^{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

2) Сколькими способами можно выбрать 13 карт из колоды в 52 карты?

Искомое число представляет собою число сочетаний из 52 по 13, т. е.

$$C_{52}^{13}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\ .\ .\ .\ .\ 40}{1\cdot 2\ .\ .\ .\ .\ .\ 13}=635\,013\,559\,600.$$

299. Другой вид формулы сочетаний. Формулу сочетаний можно привести к другому виду, если умножим числитель и знаменатель ее на произведение **1•2•3**...(***m* — *n***); тогда в числителе получим произведение:

$$m(m - n)\ ...\ [m - (n - 1)] \bullet 1\bullet 2\bullet 3\ ...\ (m - n),$$

которое, переставив сомножители, можно написать так:

$$1\bullet 2\bullet 3\ ...\ (m - n)\ [m - (n - 1)]\ ...\ m.$$

Следовательно,

$$C_m^n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ (m-1)\,m}{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ \ n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ (m-n)}=\frac{P_m}{P_n\cdot\ P_{m-n}}.$$

300.Свойство сочетаний. Заменив в этой формуле ***n*** на ***m* — *n***, получим:

$$C_m^{m-n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ (m-1)\,m}{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ (m-n)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ n}=\frac{P_m}{P_{m-n}\cdot\ P_n}.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, находим:

$$C^{n}_{m} = C^{m-n}_{m}$$

К этому выводу приводит и такое простое рассуждение: если из ***m*** элементов отберем какие-нибудь ***n***, чтобы составить из них одно сочетание, то совокупность оставшихся элементов составит одно сочетание из ***m* — *n*** элементов. Таким образом, каждому сочетанию из ***n*** элементов соответствует одно сочетание из ***m* — *n*** элементов, и наоборот; значит:

$$C^{n}_{m} = C^{m-n}_{m}$$

Это соотношение позволяет упростить нахождение числя сочетаний из ***m*** элементов по ***n***, когда ***n*** превосходит $^1/_2$ ***m***,

Например:

$$C_{100}^{97}=C_{100}^{3}\ \frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}=161\,700.$$

Глава вторая.

Бином Ньютона.

301. Произведение биномов, отличающихся только вторыми членами. Обыкновенным умножением находим:

$$
\begin{gathered}
(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab;\\
(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=\\
=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ac+bc)x+abc=\\
=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.
\end{gathered}
$$

Подобно этому найдем:

$$
\begin{gathered}
(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+\\
+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+\\
+abcd.
\end{gathered}
$$

Рассматривая эти произведения, замечаем, что все они составлены по одному и тому же закону, а именно:

Произведение составляет многочлен, расположенный по убывающим степеням буквы x.

Показатель первого члена равен числу перемножаемых биномов; показатели при x в следующих членах постепенно убывают на 1; последний член не содержит x (содержит его в нулевой степени).

Коэффициент первого члена есть 1; коэффициент второго члена есть сумма всех вторых членов перемножаемых биномов; коэффициент третьего члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по два; коэффициент четвертого члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по три. Последний член есть произведение всех вторых членов.

Докажем, что этот закон применим к произведению какого угодно числа биномов. Для этого предварительно убедимся, что если он верен для произведения m биномов:

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \dots (x + k)\ ,$$

то будет верен и для произведения (m +1) биномов:

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \dots (x + k)(x + l).$$

Итак, допустим, что верно следующее равенство:

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \dots (x + k) = x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + \dots + S_m$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= a+b+c+\ .\ .\ .\ +i+k \\ S_2 &= ab+ac+\ .\ .\ .\ +ik \\ S_3 &= abc+abd+\ .\ .\ . \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ S_m &= abc\ .\ .\ .\ ik \end{aligned}$$

Умножим обе части этого равенства на новый бином ***x* + *l***

$$\begin{gathered} (x+a)(x+b)\dots(x+k)(x+l)= \\ =(x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\dots+S_m)(x+l)=x^{m+1}+ \\ +S_1x^m+S_2x^{m-1}+\dots+S_mx+lx^m+lS_1x^{m-1}+lS_2x^{m-2}+\dots+lS_m= \\ =x^{m+1}+(S_1x+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+\dots+(S_m+lS_{m-1})x+lS_m. \end{gathered}$$

Рассматривая это новое произведение, убеждаемся, что оно подчиняется такому же закону, какой мы предположили верным для ***m*** биномов. Действительно, во-первых, этому закону следуют показатели буквы ***x***; во-вторых, ему же следуют и коэффициенты, так как коэффициент 2-го числа $S_1 + l$ есть сумма всех вторых членов перемножаемых биномов, включая сюда и ***l***, коэффициент 3-го члена $S_2 + lS_1$ есть сумма парных произведений всех вторых членов, включая сюда и ***l***, и т. д.; наконец lS_m есть произведение всех вторых членов: ***a, b, c,... k, l.***

Мы видели, что закон этот верен для 4 биномов; следовательно, по доказанному теперь, он должен быть верен для 4 + 1, т. е. для 5 биномов; если же он верен для 5 биномов, то он верен и для 5 +1, т. е. для 6 биномов, и т. д.

Изложенное рассуждение представляет так называемое "доказательство от ***m*** к ***m*** +1". Оно называется также „математической индукцией" (или „совершенной индукцией"). Заметим, что в предыдущих главах этой книги неоднократно представлялся случай применить доказательство от ***m*** к ***m*** +1 (напр, при выводе формулы любого члена прогрессии, Отдел 10 глава1 § 241, глава 2 §248 и др.). Мы этого не делали только ради простоты изложения.

302. Формула бинома Ньютона. Предположим, что в доказанном нами равенстве:

$$(x + a)(x + b) \dots (x + k) = x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + \dots + S_m$$

все вторые члены биномов одинаковы, т. е. что $a = b = c = \dots = k$. Тогда левая часть будет степень бинома $(x + a)^m$. Посмотрим, во что обратятся коэффициенты $S_1, S_2, \ . \ . \ . \ S_m$.

Коэффициент S_1 равный $a + b + c + \dots + k$, обратится в ***ma***, Коэффициент S_2, равный $ab + ac + ad + \dots$, обратится в число a^2, повторенное столько раз, сколько можно составить сочетаний из ***m*** элементов по 2, т. е. он обратится в $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2$ Коэффициент S_3 равный $abc + abd + \dots$, обратится в число a^3, повторенное столько раз, сколько можно составить сочетаний из ***m*** элементов по 3, т. е. в $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3$ и т. д.. Наконец, коэффициент S_m, равный $abc\ .\ .\ .\ k$, обратится в a^m. Таким образом мы получим:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3} + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\,.\,.\,.\,n}a^n x^{m-n} + \dots + a^m.$$

Это равенство известно как формула бинома Ньютона1), причем многочлен, стоящий в правой части формулы, называется разложением бинома. Рассмотрим особенности этого многочлена.

303. Свойства бинома Ньютона. Этих свойств мы укажем следующие 10:

1) Показатели буквы ***x*** постепенно уменьшаются на 1 от первого члена к последнему, причем в первом члене показатель ***x*** равен показателю степени бинома, а в последнем он есть 0; наоборот, показатели буквы ***a*** постепенно увеличиваются на 1 от первого члена к последнему, причем в первом члене показатель при ***a*** есть 0, а в последнем он равен показателю степени бинома. Вследствие этого сумма показателей при ***x*** и ***a*** в каждом члене одна и та же, а именно: она равна показателю степени бинома.

2) Число всех членов разложения есть ***m +1***, так. как разложение содержит все степени ***a*** от 0 до ***m*** включительно.

3) Коэффициенты равны: у первого члена 1, у 2-го члена — показателю степени бинома, у 3-го члена —числу сочетаний из ***m*** элементов по **2**, у 4-го члена —числу сочетаний из ***m*** элементов по **3**; вообще коэффициент (***n*** + **1**)-го члена есть число сочетаний из ***m*** элементов по ***n***. Наконец, коэффициент последнего члена равен числу сочетаний из ***m*** элементов по ***m***, т. е. **1**. Заметим, что все эти коэффициенты называются биномиальными.

4) Обозначая каждый член разложения буквою **T** с цифрою внизу, указывающею номер места этого члена в разложении, т. е. первый член $\mathbf{T_1}$ второй член $\mathbf{T_2}$ и т. д., мы можем написать:

$$T_{n+1} = C_m^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}a^n x^{m-n}$$

Эта формула выражает общий член разложения, так как из нее можем получить все члены (кроме первого), подставляя на место ***n*** числа: 1, 2, 3,. . .***m***.

5) Коэффициент 1-го члена от начала разложения равен 1, коэффициент 1- го члена от конца тоже равен 1. Коэффициент второго члена от начала есть ***m***, т. е. C^1_m коэффициент 2-го члена от конца есть C^{m-1}_m, но так как $C^1_m = C^{m-1}_m$, то эти коэффициенты одинаковы. Коэффициент 3-го члена от начала есть C^2_m, а 3-го члена от конца есть C^{m-2}_m; но $C^2_m = C^{m-2}_m$ поэтому и эти коэффициенты одинаковы, и т. д. Значит, ***коэффициенты членов, одинаково удаленных от концов разложения, равны между собою.***

6) Рассматривая биномиальные коэффициенты:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \dots,$$

мы замечаем, что при переходе от одного коэффициента к следующему числители умножаются на числа все меньшие и меньшие (на ***m*—1**, на ***m*—2**, на ***m*— 3** и т. д.), а знаменатели умножаются на числа все большие и большие (на **2**, на **3**, на **4** и т. д.). Вследствие этого коэффициенты сначала возрастают (пока множители в числителе остаются большими соответственных множителей в знаменателе), а затем убывают. Так как коэффициенты членов, равноотстоящих от концов разложения, одинаковы, то наибольший коэффициент должен находиться посредине разложения. При этом, если число всех членов разложения нечетное (что бывает при четном показателе бинома), то по средине будет один член с наибольшим коэффициентом; если же число всех членов четное (что бывает при нечетном показателе бинома), то посредине должны быть 2 члена с одинаковыми наибольшими коэффициентами. Например.

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4;$$
$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

7) Из сравнения двух рядом стоящих членов:

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots n}a^nx^{m-n},$$
$$T_{n+2}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\,(m-n)}{1\cdot2\cdot3\ldots n\,(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}$$

видно, что ***для получения коэффициента следующего члена достаточно умножить коэффициент предыдущего члена на показатель буквы х в этом члене и разделить на число членов, пред шествующих определяемому.***

Пользуясь этим свойством, можно сразу писать, напр.:

$$(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6\ldots$$

Теперь берем **7**, умножаем его на **6** b делим на два, получаем **21**:

$$(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5\ldots$$

Теперь берем **21**, умножаем на **5** и делим на **3**, получаем **35**:

$$(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4$$

Теперь уже выписаны члены до середины ряда, остальные получим, основываясь на свойстве 5-м:

$$(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6 x+ a^7$$

8) ***Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^m***. Действительно, положив в формуле бинома ***x = a = 1***, получим:

$$2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+1.$$

Напр., сумма коэффициентов в разложении $(x + a)^7$ равна:

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7.$$

9) Заменив в формуле бинома ***a*** на — ***a***, получим:

$$(x-a)^m = x^m + m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(-a)^2x^{m-2} + \ldots + (-a)^m,$$

т. е.

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}\ldots + (-1)^m a^m,$$

и следовательно, знаки + и — чередуются:

10) Если в последнем равенстве положим ***x*** = ***a*** =**1**, то найдем:

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + (-1)^m$$

т. е. ***сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах.***

304. Применение формулы бинома к многочлену. Формула бинома Ньютона позволяет возвышать в степень трехчлен и вообще многочлен. Так:

$$(a+b+c)^4 = [(a+b)+c]^4 = (a+b)^4 + 4c(a+b)^3 + 6c^2(a+b)^2 + 4c^3(a+b) + c^4.$$

Разложив $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, окончательно получим:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4.$$

305. Сумма одинаковых степеней членов арифметической прогрессии. Укажем одно из интересных применений формулы бинома. Пусть имеем арифметическую прогрессию, содержащую ***n + 1*** членов:

$$\div\ a, b, c, \ldots k, l.$$

Если разность ее ***d***, то ***b = a + d, c = b + d,... l = k + d***. Возвысив эти равенства по формуле бинома Ньютона в ***m + 1*** степень, получим ***n*** следующих равенств:

$$b^{m+1} = (a+d)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m d + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}a^{m-1}d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$c^{m+1} = (b+d)^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m d + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}b^{m-1}d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l^{m+1} = (k+d)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m d + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}k^{m-1}d^2 + \ldots + d^{m+1}.$$

Сложив эти равенства и положив для краткости:

$$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots + k^m,$$
$$S_{m-1} = a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \ldots + k^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_1 = a + b + c + \ldots + k,$$

получим (члены: b^{m+1}... k^{m+1} сократятся):

$$l^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)dS_m + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2} d^2 S_{m-1} + \ldots + nd^{m+1}.$$

Из этого уравнения определим S_m, если известны S_{m-1}, S_{m-2},...S_1. Полагая последовательно m = 1, 2, 3,..., найдем S_1 потом S_2 затем S_3 и т. д.

306. Сумма одинаковых степеней чисел натурального ряда. Применив выведенное в предыдущем параграфе уравнение к прогрессии:

$$\div\ 1, 2, 3, 4, \ldots n, n+1,$$

получим:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)\, S_m + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}\, S_{m-1} + \ldots + n.$$

Полагая $m = 1$, найдем:

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n; \text{ откуда: } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

При $m = 2$ получим:

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n = 1 + 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

откуда:

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} =$$
$$= \frac{n(2n^2 + n + n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} = S_1 \cdot \frac{2n+1}{3} \text{ (ср. § 244).}$$

При $m = 3$ находим:

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = 1 + 4S_3 + n(n+1)(2n+1) +$$
$$+ 2n(n+1) + n,$$

откуда:

$$S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_1{}^2.$$

Подобным же образом можно было бы найти S_4, S_5 и т. д.

1) *Исаак Ньютон*, знаменитый английский математик, жил от 1642 г. по 1724 г. Формула бинома, не только для ***m*** целого положительного, но и для отрицательного и дробного, была им указана около 1665 г. Однако строгого доказательства ее он не дал. Для целых положительных показателей формула была впервые доказана *Яковом Бернулли* (1645—1705) с помощью теории соединений.

АЛГЕБРА   В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ.

УЧЕНИЕ О ПРЕДЕЛАХ.

Глава первая. **Основные свойства пределов.**
Глава вторая.**Применение учения о пределах к вопросам элементарной геометрии.**

Глава первая.

Основные свойства пределов.

307. Определения. Возьмем сумму членов бесконечной убывающей Г. П.:

$$\mathbf{l} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{8}} + \ldots \text{ (знам. } {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}\text{).}$$

Сумма эта при неограниченном увеличении числа членов увеличивается, приближаясь (ч. I, отдел 10 глава 3 § 252) к постоянному числу 2 так, что разность

$$\mathbf{2 — (l} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{8}} + \ldots)$$

при достаточном увеличении числа слагаемых делается меньше любого данного положительного числа (напр., меньше 0,000001) и при дальнейшем увеличении числа слагаемых остается всегда меньше этого числа.

При этих условиях мы говорим, что **2** есть предел суммы **l** + $^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}$ + $^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}}$ + $^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{8}}$ + ... если число слагаемых в ней увеличивается неограниченно.

В этом примере переменное число (сумма членов прогрессии), приближаясь к своему пределу, остается меньше его. Но могут быть случаи, когда переменное число, приближаясь к своему пределу, остается больше его. Напр., если предположим, что в сумме

$$1 + {}^{\mathbf{1}}/_{\boldsymbol{x}}$$

буква $\boldsymbol{x}$ означает переменное положительное число, неограниченно увеличивающееся, то сумма эта будет приближаться к пределу **1**, оставаясь всегда больше **1**.

Может даже случиться, что переменное число так изменяется, что оно делается то больше, то меньше своего предела. Такой случай мы уже видели, когда говорили о пределе суммы членов бесконечно убывающей Г. П. (ч. I, отдел 10 глава 3 § 253):

$$\mathbf{2, — l}\text{ , + } {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}\text{ , — } {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}}\text{ , + } {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{8}}\text{ , ...)(знам.—} {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}\text{).}$$

Предел этот равен **1** $^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}}$, и суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии переходят через значения:

$$\mathbf{2 — 1 = 1} < \mathbf{1}\, {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}}; \qquad \mathbf{2 — l} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}} = \mathbf{1}{}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}} > \mathbf{1}\, {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}};$$

$$\mathbf{2, — l} + {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}} — {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} = \mathbf{1}\, {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} < \mathbf{1}\, {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}};$$

которые попеременно то больше, то меньше своего предела.

После этих примеров будет понятно следующее определение предела: ***если переменное число x при своем изменении приближается к постоянному числу a таким образом, что абсолютная величина разности a — x делается и при дальнейшем процессе изменения x всегда остается меньше любого данного положительного числа (как бы мало оно ни было), то это постоянное число a называется пределом переменного x.***

Вместо того чтобы говорить: „число x имеет предел a", часто говорят короче: „x стремится к a" и письменно выражают это так:

$$x \longrightarrow a.$$

Если абсолютная величина переменного числа увеличивается неограниченно (беспредельно), то условно говорят, что оно стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ (смотря по его знаку), если же абсолютная величина переменного числа делается и остается меньшей любого данного положительного числа, то говорят, что оно стремится к нулю.

Переменное число, стремящееся к ∞, называется часто бесконечно большим, а переменное число, стремящееся к нулю, называется бесконечно малым. Должно однако помнить, что эти названия не означают „число очень большое", или „число очень малое"; они характеризуют не самое число, а процесс его изменения: число, называемое „бесконечно большим", изменяется так, что оно делается и остается (по абсолютной величине) больше любого данного числа, а число, называемое „бесконечно малым", изменяется так, что оно делается и остается (по абсолютной величине) меньше любого данного положительного числа.

Если воспользоваться в этом смысле названием „бесконечно малое число", то определение предела можно высказать короче так:

Постоянное число a называется пределом переменною числа x, если разность x — a есть бесконечно малое число.

Встречается еще название „конечное число". Так называется всякое число, которое не стремится к ± ∞. Постоянное число тоже может быть названо конечным.

308. Некоторые свойства бесконечно малых чисел.

1) ***Алгебраическая сумма бесконечно малых чисел бесконечно мала (если число слагаемых не увеличивается беспредельно).***

Возьмем, напр., три бесконечно малых числа α, β и γ (они могут быть положительные и отрицательные). Чтобы показать, что сумма их $\alpha + \beta + \gamma$ бесконечно мала, надо убедиться, что абсолютная величина этой суммы делается и остается меньше всякого данного положительного числа, напр., меньше 1 миллионной. Действительно, так как числа α, β и γ бесконечно малы, то это значит, что при своем изменении абсолютная величина каждого из них делается и остается меньше любого данного числа, в том числе и меньше $^1/_3$ миллионной; значит, тогда абсолютная величина суммы $\alpha + \beta + \gamma$ делается и остается меньше $^1/_3 + {}^1/_3 + {}^1/_3$ т. е. меньше 1 миллионной.

Заметим, что если одновременно с уменьшением слагаемых число их будет возрастать, то сумма их может оказаться и не бесконечно малой. Возьмем, напр., такие суммы:

$$^1/_{10} + {^1/_{10}} + {^1/_{10}} + ... + {^1/_{10}}$$ **(10 слагаемых);**

$$^1/_{100} + {^1/_{100}} + {^1/_{100}} + ... + {^1/_{100}}$$ **(100 слагаемых);**

....

Вообще $^1/_n + {^1/_n} + {^1/_n} + ... + {^1/_n}$ (***n*** **слагаемых**).

Несмотря на то, что с увеличением знаменателя слагаемые уменьшаются неограниченно, сумма их остается неизменной (она равна **1**).

Возьмем еще такие суммы:

$$^1/_{10} + {^1/_{10}} + {^1/_{10}} + ... + {^1/_{10}}$$ **(10^2 слагаемых);**

$$^1/_{100} + {^1/_{100}} + {^1/_{100}} + ... + {^1/_{100}}$$ **(100^2 слагаемых);**

....

Вообще $^1/_{10} \bullet + {^1/_n} + {^1/_n} + ... + {^1/_n}$ (**n^2 слагаемых**).

Суммы эти вырастают неограниченно: первая равна $^1/_{10} \bullet 100 = 10$, вторая $^1/_{100} \bullet 1000 = 100$, последняя $^1/_n \bullet n^2 = n$.

2) ***Произведение бесконечно малого числа на постоянное число бесконечно мало.***

Напр., произведение 100α , в котором α какое-нибудь бесконечно малое число, делается и остается (по абсолютной величине) меньшим любого данного положительного числа, напр., меньшим **1** миллионной, так как α делается и остается меньшим всякого данного положительного числа, в том числе меньшим и **1/100** миллионной.

3) ***Произведение бесконечно малого числа на другое бесконечно малое число бесконечно мало.***

Если произведение бесконечно малого числа на постоянное число способно сделаться так малым, как угодно, то произведение бесконечно малого числа на другое бесконечно малое число и подавно может сделаться как угодно малым (с уменьшением множителя произведение уменьшается).

4) ***Частное от деления бесконечно малого числа на постоянное число бесконечно мало.***

Напр., частное α : **1/10** бесконечно мало, так как оно равно произведению $\alpha \bullet 10$, т. е. произведению бесконечно малого числа на постоянное число.

Замечание. Частное от деления бесконечно малого числа на другое бесконечно малое число может иногда равняться постоянному числу, иногда бесконечно малому и иногда бесконечно большому; все зависит от того, по какому закону уменьшается делимое и по какому закону уменьшается делитель. Возьмем, напр., такие три частные:

$$\frac{2\alpha}{\alpha}; \qquad \frac{\alpha^2}{\alpha}; \qquad \frac{\alpha}{\alpha^2}$$

Положим, что α есть бесконечное малое число. Тогда первое частное, всегда равное 2, есть число постоянное; второе частное, равное α, есть число бесконечно малое и третье частное, равное дроби $^1/_\alpha$ есть число бесконечно большое, так как дробь, у которой числитель постоянное число, а знаменатель неограниченно уменьшается, увеличивается беспредельно (ч. 1, отдел 4 глава 2 § 130).

309. Некоторые свойства пределов. 1) ***Переменное число, изменяющееся по определенному закону, не может иметь более одного предела.***

Предположим противное, а именно, что переменное число x, изменяясь по некоторому определенному закону, стремится к двум различным пределам, напр., к **5** и **5,1**. Тогда, согласно определению предела, разности $x — 5$ и $x — 5{,}1$ должны быть бесконечно малые числа (положительные или отрицательные). Пусть $x — 5 = \alpha$ и $x — 5{,}1 = \beta$; тогда $x = 5 + \alpha$ и $x = 5{,}1 + \beta$; следовательно, $5 + \alpha = 5{,}1 + \beta$, откуда $\alpha — \beta = 0{,}1$

Но это равенство невозможно, так как разность $\alpha — \beta$, представляющая собою алгебраическую сумму $\alpha + (— \beta)$ бесконечно малых чисел, бесконечно мала и, следовательно, она не может равняться постоянному числу. Значит, нельзя допустить, чтобы число x имело два различных предела.

2) ***Если разность двух переменных чисел (х и у) бесконечно мала (или равна нулю) и одно из них имеет предел, то и другое имеет тот же предел.***

Допустим, напр., что число x имеет предел **2**. Тогда можно положить, что $x = 2 + \alpha$, где α бесконечно малое число (положительное или отрицательное). Допустим, кроме того, что разность $x — y$ равна бесконечно малому числу β (или нули,). Тогда:

$$(2 + \alpha) — y = \beta, \quad \text{откуда} \quad 2 — y = \beta — \alpha.$$

Так как разность $\beta — \alpha$ есть число бесконечно малое, то из последнего равенства видно, что **2** есть предел числа y.

3) (Обратная истина). ***Если два переменных числа (х и у) имеют общий предел, то их разность бесконечно мала (или равна 0).***

Положим, напр., что числа x и y оба имеют один предел 10.
Тогда $x = 10 + \alpha$ и $y = 10 + \beta$ где α и β бесконечно малые числа.

Следовательно,

$$x — y = (10 + \alpha) — (10 + \beta) = \alpha — \beta.$$

Так как разность $\alpha — \beta$ бесконечно мала или равна нулю, то и левая часть равенства, т. е. разность $x — y$, бесконечно мала или равна **0**.

4) ***Предел алгебраической суммы переменных чисел равен алгебраической сумме пределов этих чисел*** (если число слагаемых ие бесконечно велико).

Положим, мы имеем сумму трех переменных чисел: $x + y + z$, и пусть $x —> 3$, $y —> 2$ и $z —> — 5$. Тогда можно написать равенства:

$$x = 3 + \alpha; \qquad y = 2 + \beta; \qquad z = -5 + \gamma,$$

где α, β и γ бесконечно малые числа. Следовательно,

$$x + y + z = (3 + \alpha) + (2 + \beta) + (-5 + \gamma) = (3 + 2 - 5) + (\alpha + \beta + \gamma).$$

Откуда:

$$(x + y + z) - (3 + 2 - 5) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Правая часть этого равенства есть сумма бесконечно малых слагаемых, а потому она сама бесконечна мала; а из этого надо заключить, что переменная сумма $x + y + z$ стремится к пределу $3 + 2 - 5$, т. е. к алгебраической сумме пределов.

Это рассуждение можно повторить о четырех, пяти и более слагаемых, лишь бы число их не возрастало беспредельно (в противном случае сумма $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ могла бы и не оказаться бесконечно малым числом).

5)***Предел произведения переменных чисел равен произведению пределов этих чисел.***

Пусть имеем произведение xy двух переменных чисел, из которых первое стремится, положим, к пределу **2**, а второе к пределу **3**. Тогда:

$$x = 2 + \alpha \quad \text{и} \quad y = 3 + \beta$$

и следовательно,

$$xy = (2 + \alpha)(3 + \beta) = 2 \cdot 3 + 3\alpha + 2\beta + \alpha\beta;$$

откуда:

$$xy - 2 \cdot 3 = 3\alpha + 2\beta + \alpha\beta.$$

Произведения 3α, 2β и $\alpha\beta$ бесконечно малые числа; поэтому и сумма их бесконечно мала; а это означает, что $xy \longrightarrow 2 \cdot 3$, т. е.

$$xy = (\text{пред. } x) \cdot (\text{пред. } y).$$

Этот вывод можно обобщить на произведение трех, четырех и более сомножителей. Так, рассматривая произведение xyz, как произведение только двух сомножителей xy и z, мы можем написать: пред. (xyz) = (пред, xy)•(пред. z) = (пред. x)•(пред. y)•(пред. z).

6) ***Предел частного от деления переменных чисел равен частному от деления пределов этих чисел, если только предел делителя не равен нулю.***

Пусть $x \longrightarrow 2$ и $y \longrightarrow 3$; тогда $x = 2 + \alpha$ и $y = 3 + \beta$, где α и β бесконечно малые числа. Следовательно,

$$\frac{x}{y} - \frac{2}{3} = \frac{2+\alpha}{3+\beta} - \frac{2}{3} = \frac{(2+\alpha)3 - (3+\beta)^2}{(3+\beta)3} = \frac{3\alpha - 2\beta}{(3+\beta)3}$$

В дроби, стоящей в правой части этого равенства, числитель бесконечно малое число, так как он есть алгебраическая сумма двух бесконечно малых чисел; знаменатель же, имея пределом число $\mathbf{3^2}$, не равное нулю, не может стремиться к нулю. Если же числитель дроби бесконечно мал, а знаменатель не бесконечно мал, то такая дробь бесконечна мала.

Значит, из написанного выше равенства мы должны заключить, что

$$\frac{x}{y} \longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\text{пред. } x}{\text{пред. } y}$$

7) ***Предел степени, в которой основание есть переменное число, а показатель постоянное, равен той же степени предела основания.***

Ограничимся случаем, когда показатель степени есть число целое положительное. В этом случае теорема эта представляет собою простое следствие теоремы о пределе произведения. Так:

$$\text{пред. } (x^3) = \text{пред. } (xxx) \text{ — } (\text{пред. } x)\ (\text{пред. } x)\ (\text{пред. } x) = (\text{пред. } x)^3.$$

Добавим еще без доказательства, как допущения, следующие две истины о пределах:

8) ***Если переменное число все возрастает, оставаясь однако меньше какою-нибудь постоянною числа, то оно имеет предел.***

Возьмем, напр., приближенные значения $\sqrt{\mathbf{2}}$**,** взятые с недостатком и вычисленные с точностью сначала до 1, потом до $^1/_{10}$, затем до $^1/_{100}$ и т. д. Мы получим тогда бесконечный ряд чисел:

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; и т. д.

Числа эти, по мере удаления от начала ряда, все увеличиваются, но остаются всегда меньше некоторого постоянного числа, напр., меньше **1,5**; при этих условиях мы должны допустить, что взятый нами ряд, по мере его продолжения, стремится к какому-то определенному пределу (этот предел есть иррациональное число$\sqrt{\mathbf{2}}$).

9) ***Если переменное число все убывает, оставаясь однако больше какою-нибудь постоянного числа, то оно имеет предел.***

Возьмем для примера ряд приближенных значений $\sqrt{\mathbf{2}}$ взятых с избытком, с точностью до1 до $^1/_{10}$, до $^1/_{100}$ и т. д:

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; и т. д.

По мере удаления от начала ряда числа эти все уменьшаются, но остаются постоянно больше 1,4; при этих условиях мы должны допустить, что ряд стремится к пределу (он равен иррациональному числу $\sqrt{\mathbf{2}}$).

Глава вторая.

Применение учения о пределах к вопросам элементарной геометрии.

310. Длина окружности. Предварительно докажем следующие три вспомогательные истины (леммы):

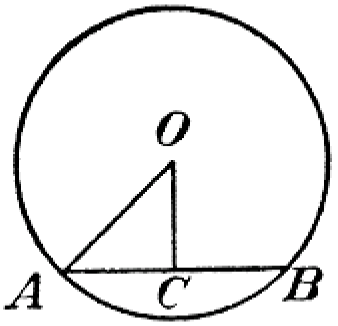
1) ***При неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в данную окружность, длина его стороны стремится к нулю.***

Пусть ***p*** есть периметр какого-нибудь правильного многоугольника, вписанного в окружность, и ***n*** число его сторон. Тогда длина одной стороны этого многоугольника выразится дробью $^{p}/_{n}$ Положим, что число сторон ***n*** неограниченно возрастает при том же радиусе окружности. Тогда в этой дроби знаменатель будет неограниченно возрастать, тогда как числитель не может возрастать беспредельно, так как он постоянно остается меньше периметра любого описанного многоугольника (напр., описанного квадрата; в геометрии доказывается, что периметр выпуклого объемлемого многоугольника меньше периметра объемлющего многоугольника.).

Вследствие этого дробь $^{p}/_{n}$, выражающая длину одной стороны многоугольника, должна стремиться к 0.

2) ***Разность между радиусом данной окружности и апофемою правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, стремится к нулю, если число сторон многоугольника увеличивается неограниченно.***

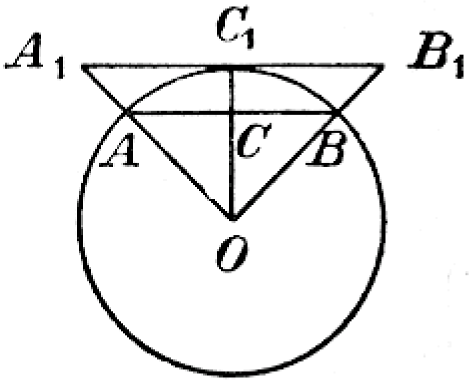
Пусть **AB** есть сторона правильного вписанного многоугольника, **OA** радиус и **OC** апофема . Из треугольника **OAC** выводим: **AO—OC<AC**. При неограниченном увеличении числа сторон вписанного правильного многоугольника длина стороны **AB**, как мы сейчас видели, стремится к 0; следовательно, отрезок **AC**, составляющий половину **AB**, также стремнтся к 0.



Поэтому разность **OA — OC**, будучи меньше **AC**, и подавно стремится к нулю.

3) ***Разность между периметрами одноименных правильных многоугольников одного описанного, другого вписанного в данную окружность стремится к нулю, когда число сторон в этих многоугольниках неограниченно увеличивается.***

Пусть **AB** будет сторона какого-нибудь правильного вписанного многоугольника, $\mathbf{A_1B_1}$ сторона одноименного правильного описанного многоугольника; **OC** —апофема и $\mathbf{OC_1}$— радиус. Так как правильные одноименные многоугольники подобны, то их периметры относятся как радиусы кругов, вписанных или описанных.



Поэтому, обозначив периметры многоугольников: вписанного ***p*** и описанного ***P***, можем написать пропорцию:

$$\frac{P}{p}=\frac{OC_1}{OC}$$

Из этой пропорции составим производную (ч. I, отдел 2, глава 7 § 98):

$$\frac{P-p}{p}=\frac{OC_1-OC}{OC};$$

откуда:

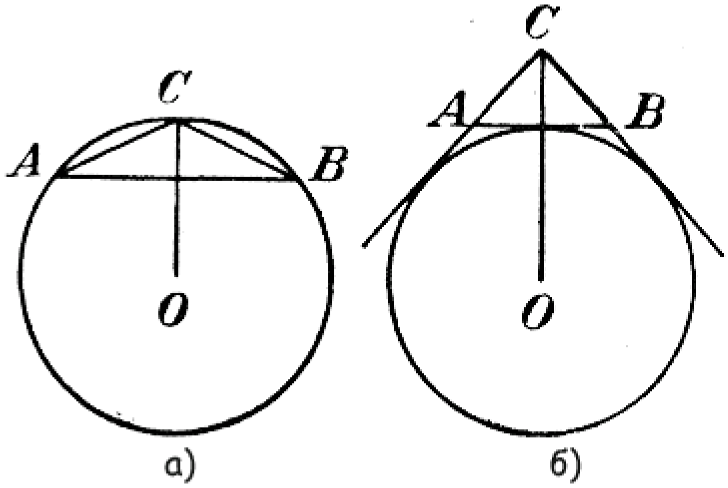
$$P-p=\frac{p(OC_1-OC)}{OC}.$$

Вообразим теперь, что число сторон многоугольников неограниченно увеличивается. Тогда разность **OC₁ — OC** будет стремиться к нулю, периметр ***p*** постоянно остается меньшим периметра любого описанного многоугольника, а знаменатель **OC** увеличивается. Из этого следует, что дробь, стоящая в правой части последнего равенства, стремится к нулю; следовательно, и левая часть равенства, т. е. ***P—p***, стремится к нулю.

311. Основная теорема. Теперь мы можем установить следующую теорему, на которой основано определение длины окружности.

Периметр правильного многоугольника, вписанною в данную окружность, при неограниченном удвоении числа сторон этого многоугольника стремится к пределу; предел этот не зависит от того, с какого многоугольника мы начали удвоение.

Положим, мы начали удвоение с правильного треугольника, беря 6-угольник, потом 12-угольник, 24-угольник и т. д. без конца. Обозначим через ***p*** переменный периметр многоугольника, изменяющегося по этому закону удвоения. Вообразим еще, что строя правильные вписанные многоугольники, мы каждый раз строим и соответственные правильные описанные многоугольники, т. е., напр., построив правильный 6-угольник вписанный, мы строим также правильный 6-угольник описанный, и т. д. Обозначим через **P** переменный периметр изменяющегося описанного многоугольника.



Так как при каждом удвоении числа сторон вписанного многоугольника мы вместо прямой ***AB*** (черт. **а)**) берем ломаную **ACB**, а при каждом удвоении числа сторон описанного многоугольника мы вместо ломаной **ACB** (черт. **б)**) берем прямую **AB**, то при неограниченном удвоении числа сторон переметр ***p*** увеличивается, а периметр **P** уменьшается, причем первый, увеличиваясь, остается однако меньше периметра любого описанного многоугольника, а второй, уменьшаясь, остается больше периметра любого вписанного многоугольника. Из этого следует, что (согласно допущению 8-у § 309) ***p*** имеет предел, также (согласно допущению 9-у того же §) и **P** имеет предел. Пределы эти должны быть одинаковы (§ 309,2), так как разность $\mathbf{P}—p$, по доказанному, стремится к нулю.

Остается доказать, что этот общий предел не зависит от того, с какого многоугольника мы начали удвоение. Пусть $\mathbf{P}$ и p будут переменные периметры описанного и вписанного многоугольников, получаемые удвоением числа сторон какого-нибудь одного начального многоугольника (напр, треугольника), а $\mathbf{P_1}$, и p_1 переменные периметры описанного и вписанного многоугольников, получаемые удвоением числа сторон какого-нибудь другого начального многоугольника (напр, квадрата). Пусть $\mathbf{T}$ есть общий предел для $\mathbf{P}$ и p и $\mathbf{T_1}$ общий предел для $\mathbf{P_1}$, и p_1 Надо доказать, что $\mathbf{T=T_1}$.

Примем во внимание, что при неограниченном удвоении числа сторон обе разности $\mathbf{P}— p$ и $\mathbf{P_1}— p_1$ по доказанному, стремятся к нулю; следовательно, и сумма этих разностей стремится к нулю. Эту сумму можно представить так:

$$(\mathbf{P}— p) + (\mathbf{P_1}— p_1) = (\mathbf{P}— p_1) + (\mathbf{P_1}— p) —>\mathbf{0}.$$

Так как $\mathbf{P} > p_1$ и $\mathbf{P_1} > p$, то обе разности, стоящие в скобках, положительные числа. Если же сумма положительных чисел стремится к нулю, то каждое слагаемое и подавно, будучи меньше суммы, стремится к нулю. Итак:

$$(\mathbf{P}— p_1) —>\mathbf{0}; \qquad (\mathbf{P_1}— p) —>\mathbf{0}.$$

Поэтому (§ 309, 2) пред. $\mathbf{P}$ = пред. p_1 и пред.$\mathbf{P_1}$= пред. p, т. е.

$$\mathbf{T=T_1}.$$

Теперь мы можем высказать следующее определение: ***общий предел, к которому, при неограниченном удвоении числа сторон, стремятся периметры правильных многоугольников как вписанных в окружность, так и описанных около нее, принимается за длину этой окружности.***

312. Отношение длины окружности к ее диаметру. Пусть имеем две окружности с радиусами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R_1}$ Впишем в ту и в другую окружность какие-нибудь одноименные многоугольники. Пусть их периметры будут p и p_1 Тогда, вследствие их подобия:

$$p : p_1 = \mathbf{R} : \mathbf{R_1}.$$

Обозначим длины этих окружностей через $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C_1}$ и положим, что $p = \mathbf{C}— \alpha$ и $p_1 = \mathbf{C_1} — \alpha_1$ Подставив эти разности в пропорцию, получим:

$$(\mathbf{C}— \alpha) : (\mathbf{C_1} — \alpha_1) = \mathbf{R} : \mathbf{R_1}$$

Пусть все величины, входящие в эту пропорцию, выражены числами. Тогда пропорция становится числовою, и мы можем из нее вывести:

$$(\mathbf{C}— \alpha)\mathbf{R_1} = (\mathbf{C_1} — \alpha_1)\mathbf{R}, \text{ т. е. } \mathbf{CR_1}— \alpha\mathbf{R_1} = \mathbf{C_1R}— \alpha_1\mathbf{R}$$

откуда:

$$\mathbf{CR_1}— \mathbf{C_1R} = \alpha\mathbf{R_1}— \alpha_1\mathbf{R}$$

Вообразим теперь, что число сторон вписанных многоугольников неограниченно удваивается. Тогда переменные периметры p и p_1 будут стремиться к своим пределам

C и **C**$_1$ и потому числа α и α_1 будут стремиться к нулю; равенство же, выведенное нами сейчас, сохраняется при всяких значениях чисел α и α_1. Левая часть этого равенства есть разность постоянных чисел; такая разность равна или нулю, или какому-нибудь другому постоянному числу. Значит, и правая часть равенства должна быть равна или нулю, или другому постоянному числу. Но разность переменных чисел, из которых каждое стремится к нулю, не может равняться никакому постоянному числу, отличному от нуля; значит, необходимо, чтобы эта разность равнялась нулю. Тогда и

$\mathbf{CR_1 — C_1R = 0}$, откуда: $\mathbf{C : C_1 = R : R_1}$.   (ч. I,отдел 2 глава 7 § 94.)

Умножив оба члена второго отношения на 2, мы не изменим этого отношения, следовательно,

$$\mathbf{C : C_1 = 2R : 2R_1}, \text{ откуда: } \mathbf{C : 2R = C_1 : 2R_1}$$

т. е. ***отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное для всех окружностей.***

Число это, обозначаемое греческою буквою π, равно **3,1415...**

Из равенства $\mathbf{C : 2R = \pi}$ выводим:

$$\mathbf{C=2\pi R}.$$

313. Площадь круга. Пусть **P**, p и a будут площадь, периметр и апофема какого-нибудь правильного многоугольника, вписанного в круг радиуса **R**. Тогда, как известно,

$$\mathbf{P} = {}^1/_2\ pa$$

Если станем неограниченно удваивать число сторон этого многоугольника, то величины **P**, p и a сделаются переменными, причем p стремится к пределу, называемому длиною **C** окружности, а a стремится к **R**. Так как предел произведения равен произведению пределов, то

$$\text{пред.}\mathbf{P} = \text{пред.}{}^1/_2\ p \bullet \text{пред.}a$$

Этот предел принимается за меру площади круга. Подставив вместо **C** произведение **2πR**, найдем:

$$\textbf{площадь круга} = \pi \mathbf{R}^2.$$

314. Боковая поверхность цилиндра и конуса. Пусть p и a будут периметр и апофема правильного многоугольника, вписанного в окружность основания цилиндра или конуса, **H** — высота цилиндра и **L** — образующая конуса. Впишем в цилиндр призму и в конус пирамиду, приняв за их основания правильные многоугольники, вписанные в окружность основания. Тогда:

$$\text{бок. пов. призмы} = p\mathbf{H};$$

$$\text{бок. пов. пирамиды} = {}^1/_2\ pl,$$

где l есть апофема вписанной пирамиды. Вообразим теперь, что число сторон вписанного многоугольника (следовательно, и число боковых сторон призмы и пирамиды) неограниченно удваиваются. Тогда ***p*** стремится к **C** и ***l*** к **L**; следовательно:

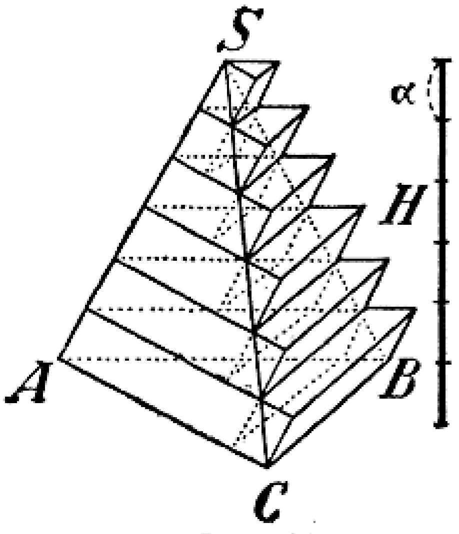
$$\text{пред. бок, пов. призмы} = \mathbf{CH};$$

$$\text{пред. бок, пов. пирамиды} = {}^{1}/_{2}\,\mathbf{CL}.$$

Пределы эти принимаются за численные величины боковых поверхностей цилиндра и конуса.

315. Объем пирамиды.

Пусть **SABC** будет трехгранная пирамида. Обозначим ее объем **V**, площадь основания **P** и высоту **H** (она изображена отдельно). Разделим высоту на ***p*** равных частей (на чертеже высота разделена на 6 равных частей) и через точки деления проведем секущие плоскости, параллельные основанию **ABC.** В сечениях получатся треугольники, подобные **ABC** и площади которых относятся между собою, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.



Беря каждый из этих треугольников за основание, построим, как видно из чертежа, ряд трехгранных призм, выходящих некоторою своею частью за пирамиду и имеющих высоту ${}^{1}/_{n}\,\mathbf{H} = \alpha$. Всего таких призм, очевидно, окажется ***n***. Сумма их объемов, конечно, больше объема пирамиды. Докажем, что при неограниченном увеличении ***n*** эта сумма стремится к пределу, равному объему **V** пирамиды. Для этого, беря каждый треугольник сечений за верхнее основание призмы, построим еще ряд призм, входящих внутрь пирамиды (на чертеже их боковые ребра изображены пунктирными линиями) и имеющих каждая высоту ${}^{1}/_{n}\,\mathbf{H} = \alpha$. Таких призм окажется, очевидно, ***n* — 1**. Сумма их объемов менее объема пирамиды, так что величина объема пирамиды **V** заключена между суммой ***n* — 1** объемов призм входящих и суммою ***n*** объемов призм выходящих. Поэтому, если мы докажем, что разность между этими двумя суммами стремится к нулю, когда число ***n*** делений высоты (следовательно, и число призм) неограниченно увеличивается, то- отсюда заключим, что **V** есть общий предел двух этих сумм.

Сравнивая призмы выходящие с призмами входящими, замечаем, что первая сверху выходящая призма равна первой сверху входящей призме, вторая выходящая равна второй входящей, и т. д. до предпоследней (***n* — 1**)-й выходящей, которая равна последней входящей. Поэтому разность между суммою объемов выходящих и суммою объемов входящих призм равна объему одной выходящей нижней призмы, т. е. равна произведению $\mathbf{P}\alpha$ (так как объем призмы равен произведению площади основания на высоту). При неограниченном увеличении числа делений ***n*** число $\alpha = \mathbf{H} : n$ стремится к нулю, а потому и произведение $\mathbf{P}\alpha$ стремится к нулю. Но так как разность между суммою объемов выходящих призм и объемом **V** пирамиды, очевидно, меньше разности между суммою объемов выходящих призм и суммою объемов входящих, то первая разность и подавно стремится к нулю; а это значит, что **V** есть предел суммы объемов выходящих призм (а также и входящих).

Найдем теперь сумму всех объемов выходящих призм и затем предел этой суммы, который и будет служить чиоленною величиною объема пирамиды.

Обозначим объемы выходящих призм, начиная с верхней, буквами $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, а площади их оснований буквами pvpit $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n$= **P**= пл. **ABC**. Тогда:

$$v_1 = p_1\alpha; \quad v_2 = p_2\alpha; \quad v_3 = p_3\alpha; \quad \ldots \quad v_n = p_n\alpha;$$

Следовательно,

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = \alpha(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)$$

Но

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{a^2}{(na)^2} = \frac{1}{n^2};\ \frac{p^2}{p_n} = \frac{(2a)^2}{(na)^2} = \frac{2^2}{n^2};\ \ldots\ \frac{p_{n-1}}{p_n} = \frac{[(n-1)a]^2}{(na)^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

Поэтому:

$$p_1 = p_n \cdot \frac{1}{n^2};\ p_2 = p_n \cdot \frac{2^2}{n^2};\ p_3 = p_n \cdot \frac{3^2}{n^2};\ \ldots p_{n-1} = p_n \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

Добавим к этим равенствам еще одно: $p_n = p_n \frac{n^2}{n^2}$ и сложим все их:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = p_n \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^2}$$

Так как

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

то

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = ap_n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} =$$
$$= p_n an \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = PH \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

(так как p_n = **P** и αn = **H**).

Дробный множитель, стоящий в этом выражении, может быть представлен так:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда видно, что предел этого множителя, когда n неограниченно увеличивается, равен

$$^{1}/_{6} \cdot 1 \cdot 2 = {}^{2}/_{6} = {}^{1}/_{3}$$

Следовательно,

$$V=\text{пред.}\ (v_1 + v_2 + v_3 +....+ v_n) = \mathbf{PH} \bullet {}^1/_3 = {}^1/_3\,\mathbf{PH},$$

т. е. ***объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

Теорему эту можно распространить на всякую многогранную пирамиду, так как такую пирамиду диагональными плоскостями можно разбить на несколько трехгранных пирамид.

316. Объемы цилиндра и конуса. Рассматривая эти объемы как пределы объемов правильных вписанных призм (для цилиндра) и пирамид (для конуса), мы найдем:

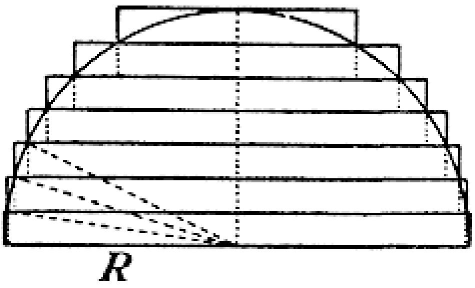
Объем цилиндра = **QH**,

„ конуса= $^1/_3$ **QH**,

где **Q** есть площадь основания и **H** высота.

317. Объем шара.

Чертеж представляет вертикальный разрез полушария, радиус которого обозначим **R** и объем **V**. Разделим радиус, перпендикулярный к плоскости основания, на произвольное число ***n*** равных частей и через точки деления проведем секущие плоскости, параллельные основанию.



Приняв каждый круг сечений за нижнее основание цилиндра, построим ***n*** цилиндров, выходящих некоторою частью из шара, высотою каждой в $^1/_n R = \alpha$. Затем, приняв каждый круг сечений за верхнее основание цилиндра, построим еще ряд цилиндров, входящих внутрь шара, с высотою у каждого в $^1/_n R = \alpha$. Таких цилиндров будет $n - 1$. Обозначим объемы выходящих цилиндров, начиная снизу, буквами: $v_1, v_2, v_3, ...v_n$. Тогда объемы входящих цилиндров будут, очевидно, начиная опять снизу: $v_2, v_3, v_4, ...v_n$ и разность между суммою выходящих цилиндров и суммою входящих равна одному объему $v_1 = \pi R^2\alpha$.

Если вообразим, что число делений ***n*** неограниченно увеличивается, то число $\alpha = {}^1/_n R$ будет стремиться к **0**. А так как объем полушария меньше суммы объемов выходящих цилиндров, но больше суммы объемов входящих, то разность между первою суммою и объемом полушария **V**, а также и разность между **V** и второю суммою, и подавно будет стремиться к нулю. Из этого заключаем, что объем **V** есть общий предел как суммы выходящих цилиндров, так и суммы входящих.

Найдем теперь сумму объемов выходящих цилиндров. Обозначив радиусы оснований этих цилиндров, начиная с нижнего, буквами $r_1 = R$; $r_2, r_3, ...r_n$, мы будем иметь:

$$v_1 + v_2 + v_3 +....+ v_n = \pi\,\alpha\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ...+ r_n^2)$$

Из чертежа усматриваем:

$$r_1^2 = R^2; \quad r_2^2 = R^2 - \alpha^2; \quad r_3^2 = R^2 - (2\alpha)^2; \; \ldots, \quad r_n^2 = R^2 - [(n-1)\alpha]^2.$$

Следовательно:

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = nR^2 - a^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2] = \\ = nR^2 - a^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \pi\left[anR^2 - a^3\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$

Но

$$an = R \text{ и } a = \frac{R}{n}$$

поэтому:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] = \\ = \pi R^3\left(1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\right) = \\ = \pi R^3\left(1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\right).$$

Найдем теперь предел этого выражения, если $n \longrightarrow \infty$:

$$\text{пред.}\frac{n-1}{n} = \text{пред.}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$
$$\text{пред.}\frac{2n-1}{n} = \text{пред.}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Следовательно,

$$\text{пред.}\ (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = \pi R^3\left(1 - \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

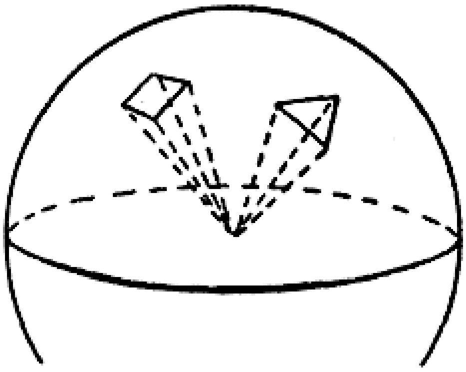
Отсюда:

$$\text{Объем шара} = 2V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D^3,$$

где **D** означает диаметр шара.

Таким же путем можно найти объем сферического слоя и объем сфери ческого сегмента.

318. Поверхность шара. Эту поверхность можно найти как предел поверхности, производимой вращением правильной ломаной линии, вписанной в полуокружность, вокруг диаметра этой полуокружности. Но если предварительно найдена формула, выражающая объем шара, то величину поверхности шара можно найти весьма просто. Для этого можно воспользоваться таким простым рассуждением (не вполне, впрочем, строгим).



Вообразим, что вся поверхность шара разделена на очень большое число маленьких участков (произвольной формы) и что из всех точек контура каждого участка проведены к центру радиусы. Тогда шар разобьется на очень большое число маленьких тел, из которых каждое можно уподобить пирамиде с вершиною в центре шара, с основанием, равным участку поверхности шара, и с высотою, равною радиусу шара.

Объем каждой из этих пирамидок равен $^1/_3\mathbf{sR}$, если **s** означает поверхность участка и **R** радиус шара. При сложении объемов всех пирамидок можно вынести за скобки общим множителем $^1/_3\mathbf{R}$; тогда внутри скобок получится сумма всех участков, которая составит полную поверхность **S** шара. Значит, объем шара равен $^1/_3\mathbf{RS}$. Но так как, с другой стороны, тот же объем шара равен $^4/_3\,\pi\,\mathbf{R}^3$ мы можем написать уравнение:

$$^1/_3\mathbf{RS} = {}^4/_3\,\pi\,\mathbf{R}^3$$

откуда:

$$\mathbf{S} = {}^4/_3\,\pi\,\mathbf{R}^3 : {}^1/_3\mathbf{R} = 4\pi\,\mathbf{R}^2$$

Так как $\pi\,\mathbf{R}^2$ выражает площадь большого круга шара, то можно сказать, что ***поверхность шара равна учетверенной площади большого круга.***

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ПЯТНАДЦАТЫЙ.

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ.

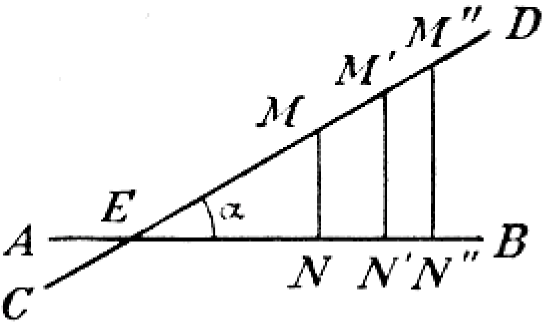
Глава первая. **Подъем прямой и кривой.**
Глава вторая. **Понятие о производной функции, как выражающей подъем кривой.**
Глава третья. **Общие обозначения.**
Глава четвертая. **Признаки возрастания или убывания функций.**
Признаки вогнутости или выпуклости кривой.
Глава пятая. **Производная как средство нахождения скорости и ускорения.**
Глава шестая. **Функция третьей степени.**
Глава седьмая. **Функция вида** $y = {}^{a}/_{x}$

Глава первая.

Подъем прямой и кривой.

319. Подъем прямой. Подъемом какой-нибудь прямой **CD** по отношению к горизонтальной прямой **AB** называется иногда угол ***α***, образуемый этими прямыми.

Напр., говорят: „дорога идет в гору с подъемом в 5°". Но чаще подъем выражается не самим углом ***α***, а его тангенсом. Для нахождения величины тангенса вообразим, что на прямой **CD** мы взяли произвольную точку **M** и из нее провели $MN \perp AB$. Тогда из тр-ка **MEN** находим:



Черт. 1

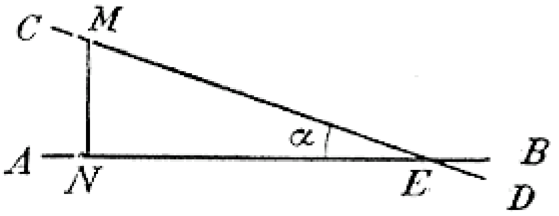
$$tg\,\alpha = \frac{MN}{EN}.$$

Точку **M** можно брать на прямой **CD** произвольно, так как если возьмем другие точки **M '**,**M''**,..., то, проведя перпендикуляры **M'N'**, **M"N"**, мы получим подобные треугольники, из которых видно, что

$$\frac{MN}{EN} = \frac{M'N'}{EN'} = \frac{M''N''}{EN''} = \dots$$

Если, напр., $MN = {}^{1}/_{100}EN$, то и $M'N' = {}^{1}/_{100}EN'$, $M''N'' = {}^{1}/_{100}EN''$ и т. д.; тогда можно сказать, что подъем прямой **CD** равен **1/100** (или что все равно— равен 1 метру на протяжении 100 метров по горизонтальному направлению).

На чертеже изображена прямая **CD**, тоже наклонная к горизонтальной прямой **AB**, но идущая (слева направо) не в гору, а вниз. Тогда речь может итти не о подъеме прямой **CD**, а об ее уклоне.



Черт 2.

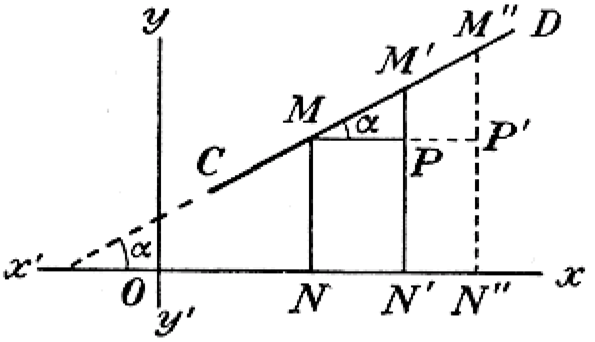
Уклон этот тоже измеряется чаще всего тангенсом угла *α* , образованного **CD** с **AB**, так что

$$\text{уклон} = \frac{MN}{EN}.$$

Можно условиться рассматривать уклон как отрицательный подъем; тогда, если **MN** = $^1/_2$**EN**, то можно сказать, что уклон прямой **CD** равен $^1/_2$, или — другими словами — что подъем прямой **CD** равен— $^1/_2$.

Очевидно, что когда прямая **CD** не наклонна к **AB**, а параллельна ей или сливается с нею, тогда подъем равен нулю.

Положим теперь, что горизонтальная прямая будет ось *x*-ов . Тогда подъем прямой **CD** будет тангенс угла *α*, образованного этой прямою (продолженной, если нужно) с положительным направлением оси *x*-ов. Этот подъем можно найти и не продолжая **CD** до пересечения с осью *x*-ов.



Черт 3.

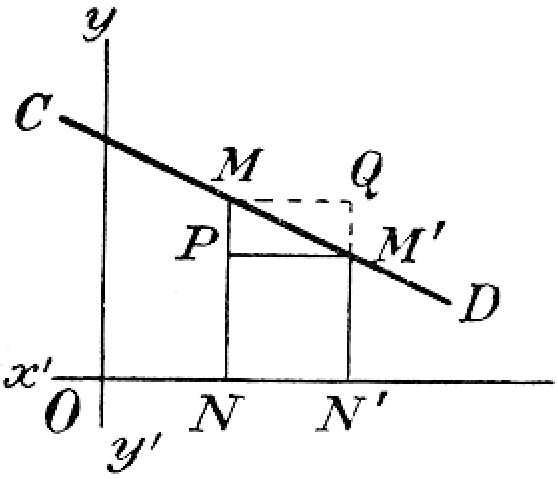
Для этого возьмем две какие-нибудь точки на прямой **CD** , напр..

M и **M',** проведем их ординаты **MN** и **M'N'** и прямую **MP** || **O***x*. Тогда мы получим прямоугольный тр-к **MM'P**, у которого угол **M** равен *α*. Следовательно, подъем прямой **CD** равен отношению **M'P** к **MP**. Отрезок **MP**, равный **NN'**, показывает, насколько увеличилась абсцисса **ON** при переходе от точки **M** к точке **M'**; отрезок **M'P** показывает, насколько при этом переходе увеличилась ордината **MN**. Значит, отрезок **MP**, равный **NN'**, есть приращение абсциссы, полученное ею при переходе от точки **M** к точке **M'**, а **M'P**—приращение ординаты, соответствующее приращению абсциссы на **NN'**. Конечно, если абсциссе **ON** дадим иное приращение, напр. **NN"**, то и ордината **MN** получит иное приращение **M"P'**, но тангенс угла *α* по-прежнему будет отношение **M"P'** к **NN"**. Таким образом:

$$\text{подъем прямой} = \frac{\text{приращение ординаты}}{\text{приращение абсциссы}}$$

в предположении,.. что эти два приращения соответствуют друг другу.

Если прямая **CD** образует отрицательный подъем то при положительном приращении абсциссы **ON** на отрезок **NN'** приращение ординалы будет отрицательное, а именно — **QM'** = — **MP**. Тогда отношение отрицательного приращения ординаты к положительному приращению абсциссы будет число отрицательное, что и должно быть, так как уклон есть отрицательный подъем.



Черт. 4

Положим, для примера, что прямая **CD** есть график такой линейной функции:

$$y = -{}^{1}/_{3}\ x + 2$$

Дадим абсциссе *x* произвольное значение, напр, *x* = 4; тогда функция у будет равна:

$$y = -{}^{1}/_{3} \cdot 4 + 2 = -{}^{4}/_{3} + 2 = {}^{2}/_{3}$$

Пусть теперь абсцисса **4** получит какое-нибудь приращение, напр. **1**. Тогда ордината ***y*** будет:

$$y = -{}^{1}/_{3} \cdot 5 + 2 = -{}^{5}/_{3} + 2 = {}^{1}/_{3}$$

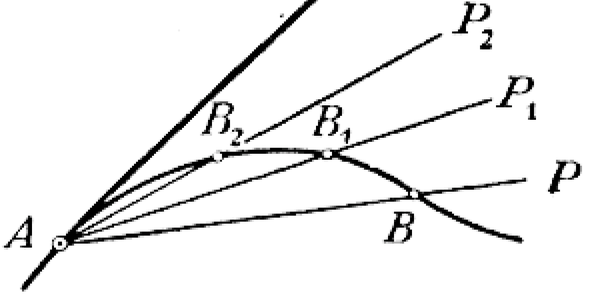
и, следовательно, приращение ***y*** окажется ${}^{1}/_{3} - {}^{2}/_{3} = -{}^{1}/_{3}$

Поэтому $\text{подъем} = \frac{-{}^{1}/_{3}}{1} = -\frac{1}{3}$

Так оно и должно быть, потому что из уравнения прямой: $y = -{}^{1}/_{3}\ x + 2$ видно, что угловой коэффициент есть $-{}^{1}/_{3}$, а коэффициент этот, будучи равен тангенсу угла, образованного прямою с положительным направлением оси ***x*** - ов, выражает подъем прямой (в данном случае уклон).

320. Общее определение касательной к кривой.

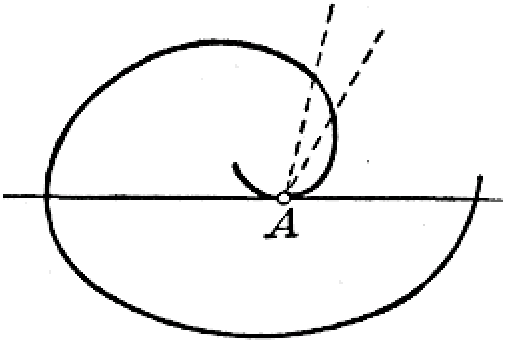
Возьмем на кривой какие-нибудь 2 точки **A** и **B** и проведем через них секущую **AP**. Вообразим, что точка **B**, двигаясь по кривой, проходит через положения B_1, B_2... и приближается к точке **A**. Тогда секущая **AP** будет занимать последовательно положения AP_1 AP_2...



Черт. 5

Если допустим, что точка **B** приближается к **A** неограниченно близко, то секущая приближается все более и более к некоторому предельному положению **AQ** так, что угол между прямою **AQ** и секущей делается и остается меньшим любого данного угла, как бы мал он ни был. ***Это предельное положение секущей называется касательной к кривой в точке A.***

Вспомним, что когда в геометрии говорилось о касательной к окружности, то там она определялась как такая прямая, которая с окружностью имеет только одну общую точку. Это определение, верное относительно окружности, применимо однако не ко всякой кривой. Во-первых, прямая, имеющая с кривой только одну общую точку, может в этой точке пересекаться с кривой (незамкнутой, какова, напр., парабола); во-вторых, прямая —касающаяся кривой в какой-нибудь точке, может, кроме этой точки, иметь с кривою еще и другие общие точки (как это видно на чертеже).

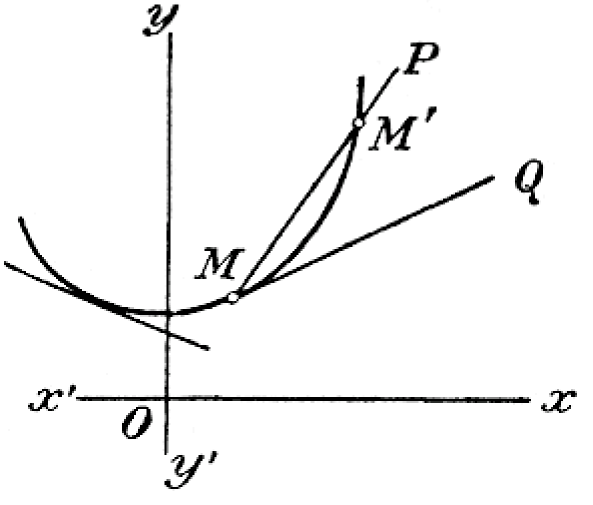


Черт. 6

Определение, рассматривающее касательную, как предельное положение секущей, есть общее определение касательной, так как оно применимо ко всякой кривой.

321. Подъем кривой.

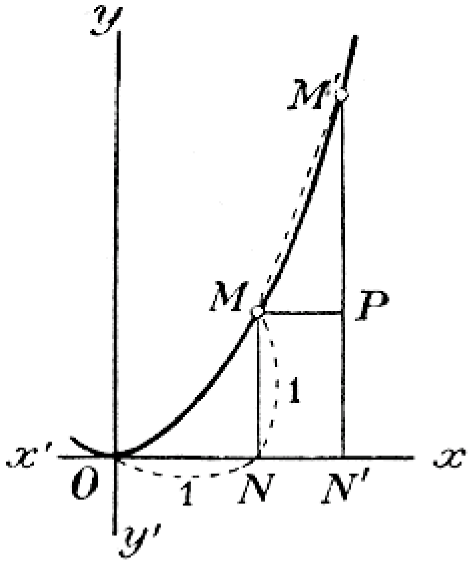
Возьмем на кривой, изображенной на чертеже , 2 какие-нибудь точки **M** и **M'** и проведем через них секущую **MP**. Подъем этой секущей выразит нам-то, что называется средним подъемом кривой на участке ее от **M** до **M'**. Вообразим, что точка **M'** неограниченно приближается к **M**. Тогда секущая будет все ближе и ближе подходить к касательной **MQ**, проведенной к кривой в точке **M**, и средний подъем кривой, все ближе и ближе будет подходить к равенству с подъемом касательной.



Черт. 7

Условимся ***принимать подъем касательной, проведенной к кривой, за подъем самой кривой в точке касания.***

322. Подъем параболы $y = x^2$.



Черт. 8

Положим, что кривая будет парабола, выражаемая уравнением $y = x^2$. Вычислим подъем ее в точке **M** , у которой абсцисса равна **1**. Тогда ее ордината будет **MN = ON² = l² = l**. Чтобы найти подъем кривой в точке **M**, предварительно вычислим средний подъем на участке от точки **M** до какой-нибудь другой точки **M'** ,у которой абсцисса **ON'= ON + NN'** и ордината **M'N' = M'P + PN' = — M'P + MN**. Чтобы перейти от **M** к **M'**, надо абсциссе **ON**, дать приращение **NN'**; тогда ордината получит соответствующее приращение **M'P** и

$$\text{подъем секущей} = \frac{M'P}{MP} = \frac{M'P}{NN'}$$

Пусть **NN' = 0,9**. Тогда **ON' = 1+ 0,9 = 1,9** и **M'N' =1,9 =3,61**.

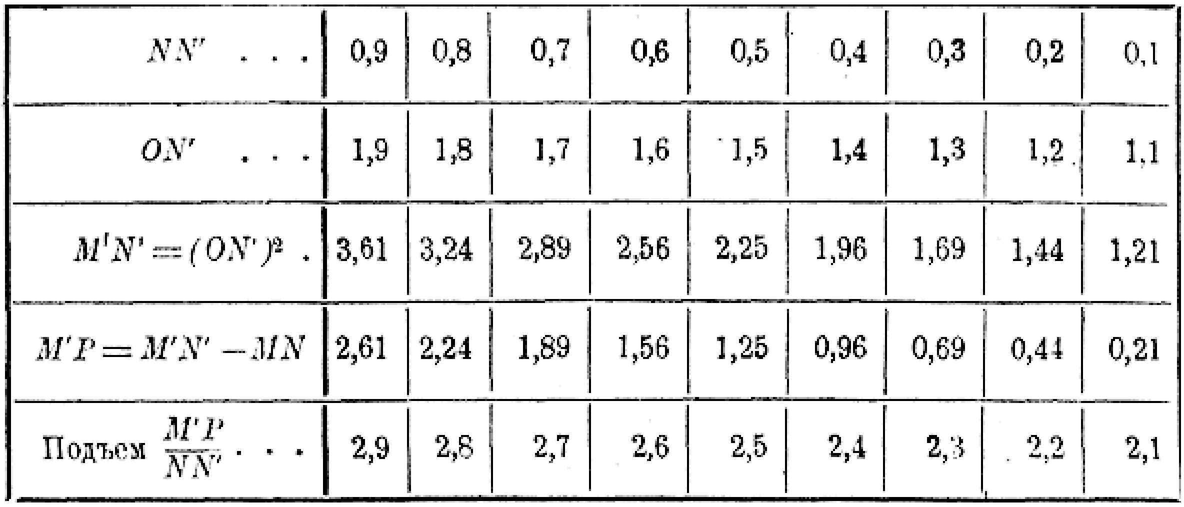
Значит, **M'P =3,61 —1 = 2,61** и

подъем секущей = ^{2,61} / $_{0,9}$ = 2,9.

Станем теперь уменьшать приращение **NN'**, приближая, его к нулю: тогда точка **M** будет приближаться все ближе и ближе к точке **M**, и средний подъем кривой будет приближаться к равенству с подъемом кривой в точке **M** (с подъемом касательной в точке **M**). Будем, напр., для **NN'** назначать такие последовательно уменьшающиеся числа:

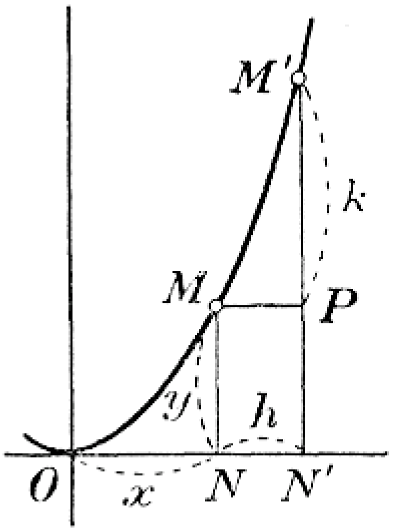
0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; ... 0,1.

Выпишем все числа, которые при этом получаются, в такой таблице:



NN' . . .	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
ON' . . .	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$M'N' = (ON')^2$.	3,61	3,24	2,89	2,56	2,25	1,96	1,69	1,44	1,21
$M'P = M'N' - MN$	2,61	2,24	1,89	1,56	1,25	0,96	0,69	0,44	0,21
Подъем $\frac{M'P}{NN'}$ . . .	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1

Мы видим из этой таблицы, что по мере приближения точки **M'** к **M** подъем секущей все уменьшается, приближаясь все более и более к числу **2**, так что весьма вероятно, что подъем секущей (средний подъем кривой) стремится к пределу **2**, когда приращение **NN'—>0.** Если это так, то подъем параболы в точке **M**, имеющей абсциссу **1** и ординату **1**, равен **2**. Мы сейчас увидим, что это действительно так.



Черт. 9

Положим, мы взяли на параболе точку **M**, у которой абсцисса не **1**, как мы сейчас предположили, а какое-нибудь иное число ***x*** единиц. Тогда у этой точки ордината тоже будет не **1**, а другое число ***y***, определяемое уравнением $y = x^2$.

Дадим числу ***x*** приращение, которое мы обозначим одною буквою ***h***, так что теперь абсцисса сделается **ON'** = ***x* + *h***. Тогда ***y*** получит приращение **M'P**, которое обозначим ***k***.

Из чертежа видно, что

$$k = M'N - MN = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 =$$
$$= 2hx + h^2 \text{ и}$$
$$\text{подъем секущей} = \frac{k}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h.$$

Положим теперь, что ***h*** —> **0**, следовательно, точка **M'** неограниченно приближается к **M**. Найдем предел, к которому при этом стремится отношение $^k/_h$, равное сумме ***2x* + *h***. Так как ***x*** остается без изменения, то очевидно, что если ***h*** —> **0**, то ***2x* + *h*** —> ***2x***.

Значит, подъем параболы в точке с абсциссой ***x*** равен ***2x***. Например, для точки с абсциссой **1** подъем будет **2•1 = 2**, что мы и предвидели, когда вычисляли подъем для уменьшающихся приращений: **0,9; 0,8; 0,7;... 0,1.** Для точки с абсциссой **2** подъем будет **2•2 = 4**, для точки с абсциссой **2** $^1/_2$ он окажется **2** $^1/_2$ **• 2 = 5** и т. п.

Глава вторая.

Понятие о производной функции, как выражающей подъем кривой.

323. Определение и обозначение. Мы видели в предыдущем параграфе, что подъем кривой зависит от величины абсциссы той точки, в которой определяется подъем: он есть некоторая функция от абциссы ***x***.

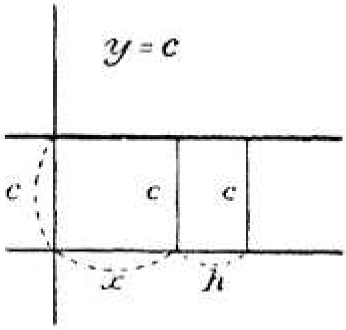
Функция, выражающая подъем кривой в какой нибудь-точке ее в зависимости от абсциссы этой точки, называется производной функцией от той функции, которая выражает эту кривую.

Так, для параболы $y = x^2$, как мы видели, подъем кривой в точке с абциссой ***x*** равен ***2x***; эта функция ***2x*** называется производной (функцией) от функции x^2.

Производную функцию принято обозначать посредством знака **'** , поставленного с правой стороны над выражением той функции, от которой берется производная. Так, если функция обозначена одною буквой y, то производная от нее обозначается **y'** если функция задана каким-нибудь алгебраическим выражением, то производную можно обозначать тем же выражением, но со знаком **'**. Так, можно написать: $(x^2)' = 2x$, что читается так: производная от x^2 равна $2x$.

324. Производная от постоянного числа.

Пусть функция задана уравнением: $y = c$, где c есть какое нибудь постоянное число. Уравнение это, как мы знаем (ч. I, отдел 3, глава 3, § 117), выражет прямую, параллельную оси x-ов и отсекающую от оси y-ов отрезок c . Подъем такой прямой во всякой точке ее равен нулю; значит, $c' = 0$, т. е. ***производная от постоянного числа равна нулю.***

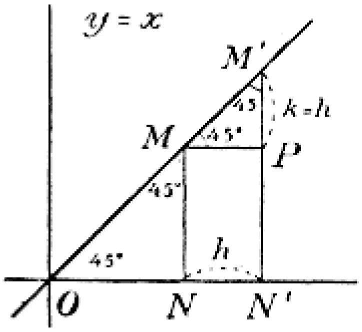


Черт. 10

И действительно, какое бы приращение h мы не дали абсциссе x, ордината y остается неизменной (равной c): значит, приращение к ординаты всегда равно нулю, а потому и отношение $^k/_h$ при всяком h равно нулю.

325. Производная от функции $y = x$.

Функция эта выражает, как мы видели (ч. I, отдел 3, глава 2§ 111), биссектрису углов xOy и xOy' (черт. 79). Для такой прямой при всякой абциссе x = **ON** соответствующая ордината **MN** равна этой абсциссе и при всяком приращении h абсциссы соответствующее приращение ординаты k будет также h (треугольник **M'PM** равнобедренный). Следовательно,



Черт. 11

$$\textbf{подъем прямой} = {}^k/_h = {}^h/_h = 1.$$

Таким образом:

$$x' = 1$$

т. е. ***производная от переменного независимого равна 1***.

Это же видно и из уравнения $y = x$, в котором угловой коэффициент, выражающий подъем, есть **1**.

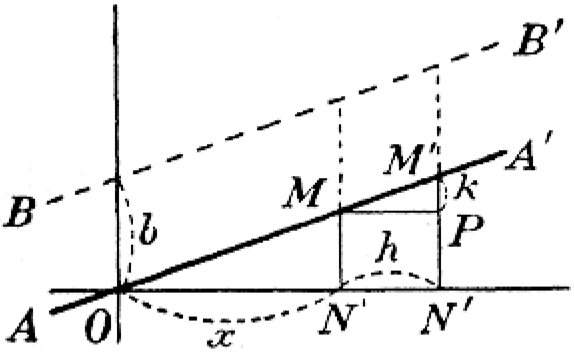
326. Производная от функции $y = ax$.

Эта функция выражает прямую **AA'** , проходящую через начало координат (ч. I, отдел 3, глава 2§ 109). Если **ON** = x получает приращение **NN'** = h то y получит приращение **M'P=**k, равное:

$$\mathbf{M'N'} - \mathbf{MN} = a(x + h) - ax = ah.$$

Значит:

$$\textbf{подъем} = (ax)' = {}^{k}/_{h} = {}^{ah}/_{h} = a,$$



Черт. 12

т. е. производная от функции $y = ax$ равна угловому коэффициенту.

327.Производная от функции $y = ax + b$.

Эта функция выражается прямой **BE** (Черт. 12), отсекающей от оси y-ов отрезок b и имеющей угловой коэффициент a. Если дадим абсциссе x приращение x, то ордината y получит приращение k, равное

$$k = [a(x + h) + b] - (ax + b) = ax + ah + b - ax - b = ah.$$

Следовательно,

$$(ax + b)\ ' = \textbf{подъем} = {}^{k}/_{h} = {}^{ah}/_{h} = a,$$

что и надо было ожидать, так как подъем прямой во всякой ее точке равен угловому коэффициенту.

Обратим внимание на то, что в этом примере производная от суммы $ax + b$ равна сумме производных от слагаемых.

Действительно, $(ax)' = a$, $b' = 0$ и $a + 0 = a$; а это есть $(ax + b)\ '$.

328. Производная от функции $y = ax^2$. Эта функция геометрически выражается, как мы знаем (ч. I, отдел 6, глава 3 § 158), параболой. Чтобы найти подъем этой параболы в точке с абсциссой x (черт. 9), дадим этой абсциссе приращение h; тогда ордината y получит приращение

$$k = a(x + h)^2 - ax^2 = ax^2 + 2ahx + ah^2 - ax^2 = 2ahx + ah^2.$$

Следовательно, средний подъем параболы $y = ax^2$ на участке от точки с абсциссой x до точки с абсциссой $x + h$, будет

$$\frac{k}{h} = \frac{2\,ahx + ah^2}{h} = 2\,ax + ah.$$

Если $h \longrightarrow 0$, то и $ah \longrightarrow 0$, а $2ax$ остается без изменения; след., подъем будет:

$$(ax^2)' = \textbf{пред.}\ {}^{k}/_{h} = \textbf{пред.}\ (2ax + ah) = 2ax.$$

Таким образом, производная от одночлена ax^2 равна показателю при x, умноженному на такой же одночлен, у которою только показатель уменьшен на 1.

Так:

$$(x^2)' = 2x; \quad (2x^2)' = 4x; \quad (3x^2)' = 6x; \quad \text{и т. п.}$$

Глава третья.

Общие обозначения.

329. Общее обозначение функциональной зависимости.

Чтобы кратко обозначить, что переменное число y есть функция от переменного независимого числа x, принято писать так:

$$y = f(x).$$

Здесь буква f есть первая буква французского слова „*fonction*", что значит: „функция". Следовательно, равенство это читается так: *y есть функция от x*. Какая это функция, этим обозначением не выражается; выражается только, что y есть некоторая функция от x. Напр., в частных случаях может быть:

$$f(x) = 3x; \quad f(x) = x^2; f(x) = ax^2; \quad f(x) = x^2 — 2x + 5 \quad \text{и т. п.}$$

Вместо f иногда употребляются буквы F, φ, Φ и некоторые другие. Если, напр., написано:

$$y = f(x), u = F(x),$$

то этим выражено, что переменные числа y и u суть некоторые функции от одного и того же переменного числа x, но функции эти различны.

Если функция обозначена $f(x)$, то ее производную можно обозначить $f' (x)$. Так, из равенства: $f(x) = ax^2$ выводим: $f' (x) = 2ax$.

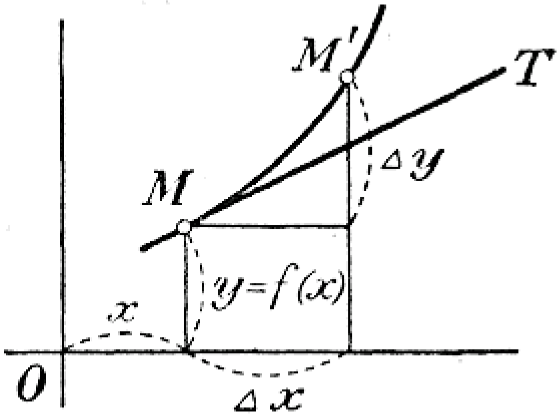
330. Общее обозначение приращений. До сего времени мы обозначали приращение переменного независимого числа x (аргумента функции) буквою h, а соответствующее приращение самой функции y буквою k. Принято также обозначать слово „приращение" греческою буквою **Δ** (дельта,), поставленною перед обозначением того переменного независимого или той функции, которая получает приращение. Так, Δx означает: „приращение числа x"; равным образом $\Delta f(x)$ означает: „приращение функции $f(x)$". Значит, в таких обозначениях буква **Δ** не означает числа, а заменяет слово „приращение", подобно тому, как в выражении $f(x)$ буква f не означает числа, а только слово „функция".

331. Определение производной как предела отношения приращений.

Пусть функция $y = f\{x)$ изображена посредством координатных осей в виде кривой на чертеже 13-м и пусть на этой кривой взяты 2 точки
M(x, y) и **M'** $(x + \Delta x,\ \ y + \Delta y)$.

Тогда на участке кривой от точки **M** до **M'**

$$\textbf{средний подъем} = {}^{\Delta y}/_{\Delta x}$$



Черт.13

Предел этого среднего подъема, когда $\Delta x \longrightarrow 0$, есть подъем кривой в точке **M** (подъем касательной **MT**) и называется, как мы говорили, производной функцией от $f(x)$. Значит, мы можем написать:

$$f'(x) = \text{пред.}{}^{\Delta y}/_{\Delta x}\text{, если } \Delta x \longrightarrow 0.$$

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) — f(x)$, то это равенство можно переписать так:

$$f'(x) = \text{пред.}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad \text{если } \Delta x \longrightarrow 0.$$

Таким образом можно высказать следующее определение производной:

Производной функцией от функции f (x) называется предел, к которому стремится отношение приращения этой функции к соответствующему приращению переменного независимого x, если это последнее приращение стремится к нулю.

332. Производная от произведения постояного числа на функцию.

Пусть $y = a\,f(x)$, где a есть постоянное число и $f(x)$ какая-нибудь функция. Согласно данному сейчас определению, мы будем иметь:

$$[af(x)]' = \text{пред.}\frac{a\,f(x+\Delta x)-a\,f(x)}{\Delta x},\ (\text{если } \Delta x \longrightarrow 0) =$$
$$= \text{пред. } a\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a\ \text{пред.}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = af'(x),$$

что можно высказать так:

Производная от произведения какой-нибудь функции на постоянное число равна произведению этого постоянною числа на производную от функции.

Напр., $(ax)' = ax' = a \bullet 1 = a$; $(ax^2)' — a(x^2)' = a \bullet 2x = 2ax.$

333. Производная от алгебраической суммы. Мы уже видели раньше (§ 327) что

$$(ax + b)' = (ax)' + b' = a + 0 = a,$$

т. е. что производная от суммы равна сумме производных от слагаемых. Убедимся теперь в общности этого свойства. Пусть u, v и w будут какие-нибудь функции от одного и того же переменного независимого x и пусть y есть алгебраическая сумма этих функций, напр., такая:

$$y = u + v — w.$$

Если x получит приращение Δx, то функции u, v , w и y получат некоторые приращения Δu, Δv, Δw; и Δy, причем очевидно, что в нашем примере:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v — \Delta w.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Так как предел алгебраической суммы равен той же сумме пределов слагаемых, то когда **Δx—>0:**

Ду Дм , Ли &w

$$\text{пред.}{}^{\Delta y}/_{\Delta x} = \text{пред.}{}^{\Delta u}/_{\Delta x} + \text{пред.}{}^{\Delta v}/_{\Delta x} — \text{пред.}{}^{\Delta w}/_{\Delta x},$$

т. е.

$$y' = u' + v' — w'$$

Таким образом:

Производная от алгебраической суммы равна той же сумме производных от слагаемых.

Пользуясь этим свойством, мы легко можем найти *производную от трехчлена 2-й степени*. Напр.:

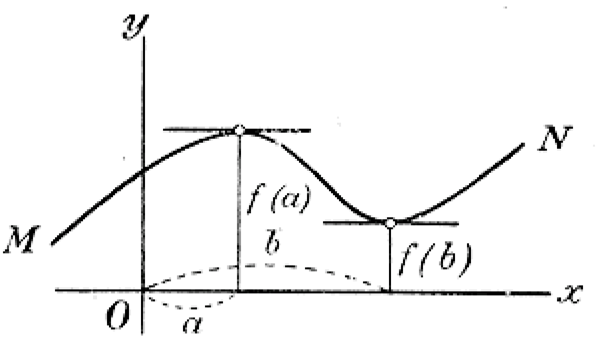
1) $(2x^2 + 5x — 3)' = (2x^2)' + (5x)' — (3)' = 4x + 5 — 0 = 4x + 5$.

2) $({}^1/_2\ x^2 + 2)' = ({}^1/_2\ x^2)\ ' + 2' = {}^1/_2 \cdot 2x + 0 = x$.

Глава четвертая.

Признаки возрастания или убывания функций. Признаки вогнутости или выпуклости кривой.

334. Maximum и minimum.



Положим, что функция $y = f(x)$ графически изображается в виде некоторой непрерывной кривой **MN** (черт. 14). Рассматривая эту кривую, мы видим, что когда x возрастает (положим, от нуля), функция сначала возрастает до некоторого значения $f(a)$ при $x = a$, а потом убывает. Тогда значение $f(a)$ называется ***maximum*** функции, или ее наибольшим значением; при этом разумеется, что это значение не есть наибольшее из всех возможных значений, а только из всех значений, соседних с ***f{a)*** как справа, так и слева.

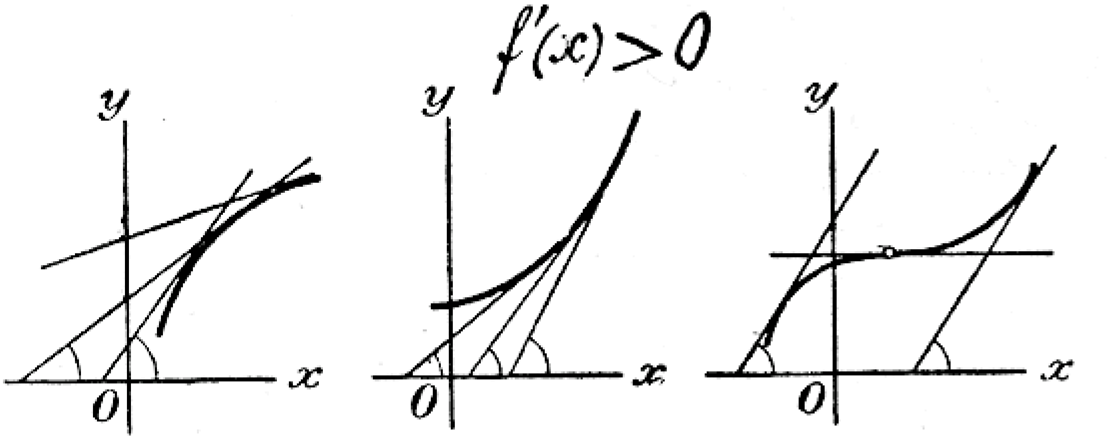
Черт.14

Из того же чертежа видно, что при дальнейшем возрастании x функция убывает до некоторого значения $f(b)$ при $x = b$, а затем возрастает. Тогда значение $f(b)$ называется ***minimum*** функции, или ее наименьшим значением, причем опять-таки разумеется, что это значение не есть наименьшее из всех возможных, а только из всех соседних значений как справа, так и слева.

Иногда случается, что при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ функция все возрастает, или все убывает, или же остается неизменной; тогда функция не имеет ни *maximum*, ни *minimum*. Таковы, напр., линейная функция $y = ax + b$, показательная функция $y = a^x$ (ч. I, отдел 11 глава 5 чертеж) и логарифмическая функция $y = \log_a x$ (ч. I, отдел 12 глава 1 чертеж).

335. Признаки возрастания или убывания функций. Если при возрастании x функция $f(x)$ тоже возрастает (такая функция называется возрастающей), то, как видно из чертежа 15-го,

Возрастающая функция

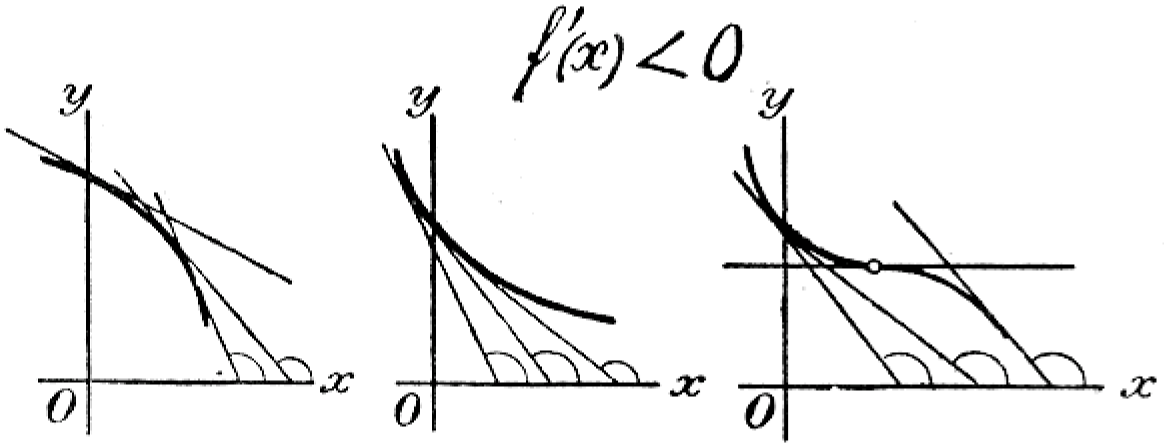


Черт.15

касательные, проведенные к кривой, изображающей функцию, образуют о положительным направлением оси x-ов острые углы, причем для некоторых отдельных (особых) точек кривой (напр., для точки, указанной кружком, чертеж 15-й, правый) касательная может образовать и угол в 0°.

Если же при возрастании x функция убывает (такая функция называется убывающей),

Убывающая функция



Черт.16

то касательные (черт. 16) образуют с положительным направлением оси ***x***-ов тупые углы, причем для некоторых отдельных точек кривой касательная может образовать и угол 0° (черт. 16-й, правый). Так как тангенсы острых углов положительны, а тупых — отрицательны, и тангенсы углов, образованных касательными с положительным направлением оси ***x***-ов, равны производным, то мы приходим к таким выводам:

1) Если ***f(x)*** при изменении ***x*** между какими-нибудь границами есть функция возрастающая, то ее производная для значений ***x***, лежащих между этими границами, положительна, причем для отдельных значений ***x*** она может равняться нулю (черт. 15).

2) Если ***f(x)*** при изменении ***x*** между какими-нибудь границами, есть функция убывающая, то ее производная для значений ***x***, лежащих между этими границами, отрицательна, причем для отдельных значений ***x*** она может равняться нулю (черт.16).

3) Наконец, если ***f(x)*** при изменении ***x*** между какими-нибудь границами не изменяется (есть постоянное число), то ее производная для значений ***x***, лежащих между этими границами, равна нулю, так как производная постоянного числа есть нуль.

Заметив все это, мы можем высказать и обратные предложения:

1) Если при изменении ***x*** между какими-нибудь границами производная положительна (причем для отдельных значений она может равняться нулю), то функция между этими границами возрастает.

2) Если при изменении ***x*** между какими-нибудь границами производная отрицательна (причем для отдельных значений она может равняться нулю), то функция между этими границами убывает.

3) Если при изменении ***x*** между какими-нибудь границами производная остается равной нулю, то функция равна постоянному числу.

Из чертежа 14-го видно, что если при некотором значении ***x* = *a*** (или ***x* = *b***) функция ***y=f(x)*** имеет наибольшее или. наименьшее значение, то касательная к кривой, изображающей функцию, проведенная через точку с абсциссой ***a*** (или ***b***), параллельна оси ***x*** - ов (другими словами, образует с нею угол в **0**°); следовательно, производная функция при ***x* = *a*** (или ***x* = *b***) должна равняться нулю. Но так как производная может равняться нулю и в других случаях (черт. 15 правый или черт. 16 правый), то обратное предложение нельзя считать верным, т. е. если при некотором значении $x = a$ производная равна нулю, то из этого одного еще не следует, чтобы при $x = a$ функция имела наибольшее или наименьшее значение.

Для примера приложим все сказанное к такому трехчлену: второй степени:

$$y = 2x^2 — 3x + l.$$

Производная этого трехчлена для всякого значения x равна

$$y' = 4x — 3.$$

Чтобы узнать, для каких значений x эта производная положительна и для каких отрицательна, надо решить два неравенства:

1) $4x — 3 > 0$; откуда $x > {}^3/_4$:

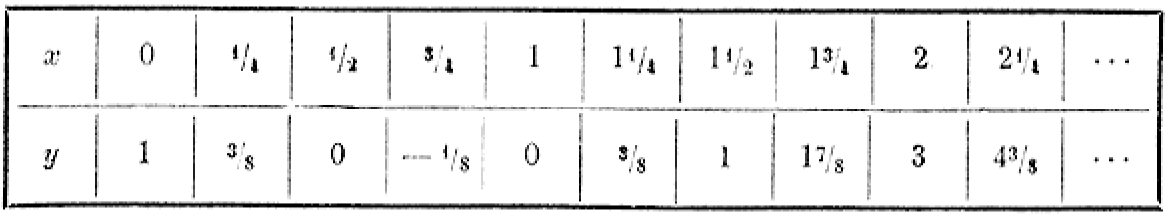
2) $4x — 3 < 0$; откуда $x < {}^3/_4$:

Значит, для всех значений x, больших ${}^3/_4$, трехчлен возрастает, а для всех значений x, меньших ${}^3/_4$ он убывает. Следовательно, при $x = {}^3/_4$ трехчлен переходит через наименьшее значение, которое равно:

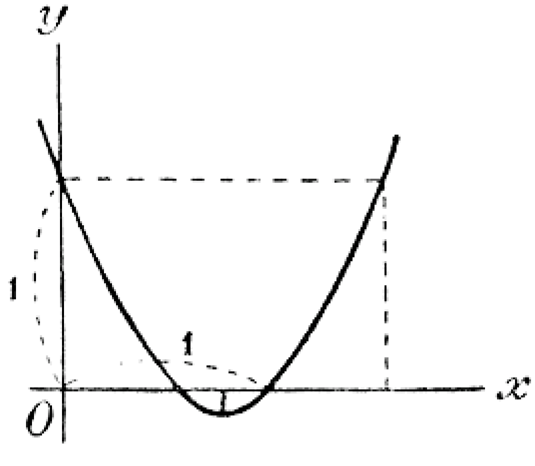
$$2 \bullet ({}^3/_4)^2 — 3 \bullet ({}^3/_4) + l = {}^9/_8 — {}^9/_4 + l = — {}^1/_8$$

Следующая таблица и чертеж 17-й наглядно изображают процесс изменения данного трехчлена:

$$y = 2x^2 — 3x + l$$



x	0	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1	$1\,^1/_4$	$1\,^1/_2$	$1\,^3/_4$	2	$2\,^1/_4$	...
y	1	$^3/_8$	0	$-\,^1/_8$	0	$^3/_8$	1	$1\,^7/_8$	3	$4\,^3/_8$	...



Черт.17

Возьмем еще трехчлен в общем виде:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Производная этого трехчлена равна:

$$y' = 2ax + b.$$

Решим теперь два следующих неравенства:

1) $2ax + b > 0$;   откуда: $x > -\,{}^b/_{2a}$,   если $a > 0$ и $x < -\,{}^b/_{2a}$,   если $a < 0$;

2) $2ax + b < 0$;   откуда: $x < -\,{}^b/_{2a}$,   если $a > 0$ и $x > -\,{}^b/_{2a}$,   если $a < 0$;

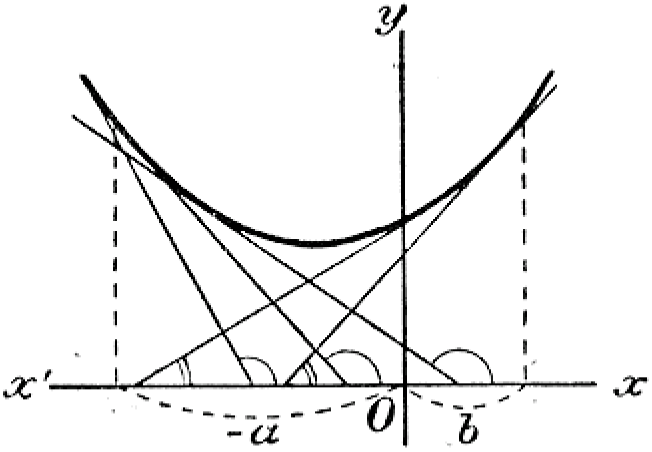
Значит, если $a > 0$, то трехчлен возрастает при $x > -\,{}^b/_{2a}$ и убывает при $x < -\,{}^b/_{2a}$; если $a < 0$, то, наоборот, при $x > -\,{}^b/_{2a}$ трехчлен убывает, а при $x < -\,{}^b/_{2a}$ он возрастает

Отсюда, следует, что при $x = -\,{}^b/_{2a}$ трехчлен получает наименьшее значение при $a > 0$ и наибольшее при $a < 0$; и то и другое равно:

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2-2b^2}{4a}+c=$$
$$=\frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Все это вполне согласуется со сказанным нами ранее в § 227, ч. I. отдел 9 глава 2

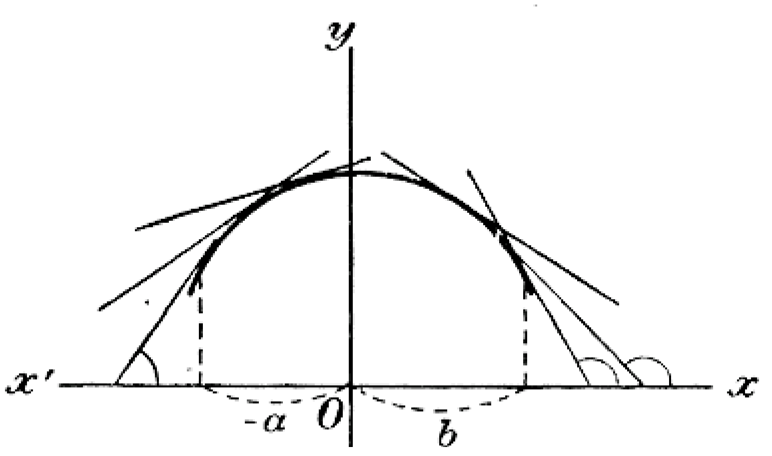
336. Признаки выпуклости или вогнутости кривой. Предположим, что при возрастании x производная от данной функции тоже возрастает. В геометрическом смысле это значит, что при возрастании x подъем кривой, выражающей данную функцию, увеличивается; другими словами, увеличиваются тангенсы углов, образованных касательными с поле жительным направлением оси x-ов. Но если увеличиваются тангенсы, то и самые углы увеличиваются



Черт.18

Такой случай изображен на чертеже 18-м на котором видно, что при возрастании абсциссы x точки касания от $-\,a$ до $+\,b$ углы, образованные касательными с положительным направлением оси x-ов, становятся все больше и больше, вследствие чего вогнутость кривой обращена кверху (а выпуклость книзу).

Если же допустим, что при возрастании x производная уменьшается, то это значит, что уменьшается подъем кривой, и, значит, уменьшаются углы, образованные касательными о положительным направлением оси x-ов.



Черт.19

Такой случай изображен на чертеже 19-м из которого видно, что при возрастании x от — a до + b углы, образованные касательными, уменьшаются, вследствие чего вогнутость кривой обращена вниз (выпуклость вверх).

Таким образом, ***если при возрастании x производная возрастает, то вогнутость кривой направлена вверх, а если она при этом убывает, то вогнутость направлена вниз.***

Если же производная не возрастает и не убывает, то кривая не имеет выпуклости (т. е. она прямая).

Напр., производная трехчлена $2x^2 — 3x + l$, о котором мы говорили в предыдущем параграфе, есть $4x — 3$. Очевидно, она возрастает при возрастании x, и вогнутость параболы, изображающей этот трехчлен, направлена вверх (черт. 17).

Наоборот, трехчлен $— x^2 + x + 2$ имеет производную $— 2x + 1$, которая при возрастании x убывает, вследствие чего вогнутость параболы обращена вниз.

Глава пятая.

Производная как средство нахождения скорости и ускорения.

337. Средняя скорость. Движение материальной точки называется переменным, или неравномерным, если в одинаковые промежутки времени точка проходит неодинаковые пространства , причем оно называется ускорительным, если пространства, проходимые в равные промежутки времени, следующие друг за другом, все увеличиваются, и замедлительным, если эти пространства все уменьшаются.

Напр., всякое тело, свободно падающее с какой-нибудь высоты, движется ускоренно, проходя в первую секунду 4,9 м (приблизительно), во вторую секунду 14,7 м, в третью 24,5 м и т. д. Наоборот, тело, брошенное вертикально вверх, движется эамедлительно, проходя в каждую следующую секунду пространства все меньшие и меньшие, пока, достигнув некоторой наибольшей высоты, не станет падать вниз ускоренно;

При равномерном движении скорость остается одна и та же во все время движения, при переменном же движении она меняется с каждым моментом времени. Поэтому, говоря о скорости переменного движения, необходимо добавлять, к какому моменту мы относим эту скорость. Напр., при падении тела скорость в конце **1**-й секунды от начала падения будет одна, в конце **2**-й секунды другая, в конце $2\,{}^1/_2$ секунд третья и т. д. Чтобы выяснить, что называется скоростью переменного движения в данныйй момент времени, предварительно разъясним, что такое средняя скорость переменного движения за данный промежуток времени..

Пусть железнодорожный поезд вышел со станции в **12** ч. дня и пришел на следующую станцию, отстоящую на **15** км от первой, в **12** ч. **20** м. дня. Значит, в течение промежутка времени, равного **20** мин., поезд прошел путь в **15** км. Если бы в течение этих **20** минут поезд двигался вполне равномерно и прошел бы тот же самый путь в **15** км, то скорость такого равномерного движения былабы $15 : 20 = {}^3/_4$ *км в мин*. или ${}^3/_4 \cdot 60 = 45$ *км в час*. Эта скорость и есть средняя для промежутка времени от **12** часов до **12** ч. **20** м.

Таким образом:

Среднею скоростью переменною движения за данный промежуток времени называется скорость такого равномерного движения, при котором тело в тот же промежуток времени прошло бы путь такой же длины, какой оно прошло при переменном движении.

Пусть за данный промежуток времени, продолжавшийся t единиц времени, тело прошло переменным движением e единиц длины; тогда, если бы оно двигалось равномерно, то скорость такого равномерного движения была бы равна частному $e : t$. Это частное и выражает среднюю скорость за данный промежуток времени.

338. Скорость в данный момент. В течение данного промежутка времени движущееся неравномерно тело, конечно, имело множество различных скоростей, из которых некоторые были меньше, а другие больше средней скорости; но ясно, что чем меньше промежуток, за который вычисляется средняя скорость, тем меньше разница между этою среднею скоростью и каждою из истинных скоростей, которые тело имело за этот промежуток.

Поэтому понятно будет следующее определение:

За величину истинной скорости переменного движения в данный момент времени принимается предел, к которому стремится средняя скорость, вычисленная для промежутка времени, непосредственно следующего за данным моментом (или ему предшествующего - все равно), ***если этот промежуток стремится к нулю.***

339. Свободное падение тела. Для примера рассмотрим свободное падение тела с некоторой высоты. Из опыта найдено, что пространство (обыкновенно, оно обозначается буквою h), которое при этом тело проходит в t секунд, выражается (если не считать сопротивления воздуха) формулой:

$$h = {}^1/_2\, gt^2,$$

где g есть постоянное число, равное приблизительно 980 см = 9,8 м (около 10 м). Пользуясь этой формулой, вычислим скорость падения, положим, в конце 2-й секунды от начала падения. Для этого возьмем какой-нибудь небольшой промежуток времени, следующий за концом 2-й секунды, напр., в **0,1** сек., и найдем среднюю скорость падения за этот промежуток. Для этого надо найти пространство, которое падающее тело проходит за этот промежуток, и разделить его на **0,1**. Пространство это мы найдем так:

в **2** сек. тело проходит $^1/_2\, g \cdot 2^2 = 2g;$

в **2,1**сек. „ „ $^1/_2\, g \cdot 2{,}1^2 = {}^1/_2\, g \cdot 4{,}41 = 2{,}205g$

следовательно, в промежуток от конца **2**-й сек. до конца **2,1** сек. тело проходит $2{,}205g - 2g = 0{,}205g$;

средняя скорость за этот промежуток = $^{0,205g}/_{0,1} = 2{,}05g$.

Подставив вместо g число 980 см, мы получим для средней скорости число 2009 см = 20 м 9 см в секунду,

Уменьшим, наконец, промежуток; напр., возьмем **0,01** секунды. Тогда:

в **2** сек. тело проходит $^1/_2\, g \cdot 2^2 = 2g;$

в **2,1**сек. „ „ $^1/_2\, g \cdot 2{,}01^2 = {}^1/_2\, g \cdot 4{,}0401 = 2{,}02005g$

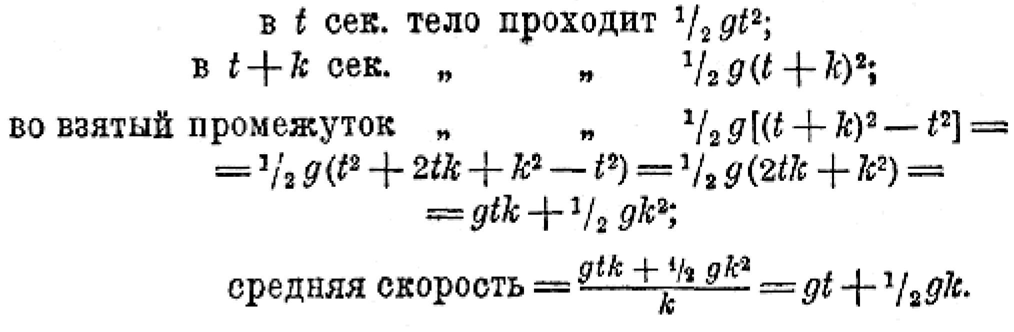
в промежуток от конца **2**-й сек. до конца **2,01** сек. тело проходит

$$2{,}02005g - 2g = 0{,}02005g;$$

средняя скорость за этот промежуток = $^{0,02005g}/_{0,01} = 2{,}005g$..

Мы видим, что средняя скорость приблизилась к $2g$. Если бы еще уменьшить промежуток, напр., взять, 0,001 сек., то средняя скорость еще более приблизилась бы к $2g$ (она тогда была бы **2,0005**g), так что надо ожидать, что предел, к которому стремится средняя скорость (когда промежуток времени стремится к нулю), равен в точности $2g$. Чтобы убедиться в этом, мы возьмем промежуток времени, выраженный буквою, составим формулу, выражающую среднюю скорость падения тела для этого буквеннного промежутка, и затем найдем предел этой формулы, когда промежуток будет стремиться к нулю. Вместе с тем мы обобщим теперь вопрос: будем искать скорость падения тела не в конце 2-й секунды, а в конце t -й секунды (от начала падения).

Пусть мы берем промежуток времени в k секунд (k— какая-нибудь малая дробь), следующий за концом t -й сек., т. е. промежуток от конца t -й сек. до конца $(t+k)$-й сек. Среднюю скорость за этот промежуток мы находим так же, как находили ее сейчас для конца 2-й сек., а именно:



в t сек. тело проходит $^1/_2\, gt^2$;

в $t+k$ сек. „ „ $^1/_2\, g(t+k)^2$;

во взятый промежуток „ „ $^1/_2\, g[(t+k)^2 - t^2] =$

$$= {}^1/_2\, g(t^2 + 2tk + k^2 - t^2) = {}^1/_2\, g(2tk + k^2) =$$

$$= gtk + {}^1/_2\, gk^2;$$

$$\text{средняя скорость} = \frac{gtk + {}^1/_2\, gk^2}{k} = gt + {}^1/_2 gk.$$

Найдем предел, к которому стремится средняя скорость, когда $k \to 0$. Так как предел суммы равен сумме пределов слагаемых и gt есть число постоянное, а предел слагаемого $^1/_2 gk$ есть **0**, то, если $k \to 0$,

предел средней скорости = gt.

В частности для конца 2-й секунда этот предел равен $g \cdot 2 = 2g$, как мы и ожидали раньше.

Так как предел средней скорости принимается за величину истинной скорости в момент, от которого мы брали промежуток времени, то, обозначая эту скорость буквою v, можем написать:

$$v = gt.$$

Заметив, что произведение gt есть производная от функции $^1/_2\, gt^2$, выражающей пространство h, проходимое падающим телом в t секунд, мы можем написать:

$$v = (\,^1/_2\, gt^2\,)' = gt$$

Таким образом на этом примере мы приходим к заключению:

Скорость переменною движения в конце t -й секунды равна производной от функции, выражающей зависимость пространства, проходимою при этом движении, от времени t , в течение которого это пространство проходится.

Мы сейчас увидим, что это заключение применимо ко всякому движению.

340. Соотношение между скоростью и производной. Пусть вообще дано движение, в котором пространство e, проходимое телом в t секунд, выражается некоторой функцией от времени t:

$$e = f(t).$$

Найдем скорость этого движения в конце t-й секунды. Для этого дадим времени t какое-нибудь приращение Δt сек., вычислим среднюю скорость для промежутка времени от конца t-й секунды до конца ($t + \Delta t$)-й сек. и затем найдем предел этой средней скорости, когда $\Delta t \longrightarrow 0$:

в t сек. тело проходит $f(t)$;

в $t + \Delta t$ сек. „ „ $f(t + \Delta t)$;

в указанный промежуток „ „ $f(t + \Delta t) - f(t)$;

$$\text{средняя скорость} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t};$$

$$\text{скорость в конце } t\text{-й секунды} = \text{пред. } \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Разность $f(t + \Delta t) - f(t)$ выражает приращение функции $f(t)$, соответствующее приращению переменного независимого t на Δt. Предел отношения этого приращения к приращению переменного независимого называется производной функцией от $f(t)$.

Значит, обозначив скорость в конце t-й секунды буквой v, мы можем последнее выведенное нами равенство переписать так:

$$v = f'(t).$$

Мы видим таким образом, что заключение, которое мы вывели для скорости падения тела, применимо ко всякому движению.

341. Движение тела, брошенного вертикально вверх. Как пример применения найденной нами зависимости между производной и скоростью рассмотрим еще движение тела, брошенного вертикально вверх с начальною скоростью v_0 (*см* в секунду). Из физики известно, что высота h, на которую такое тело подымается в t сек., выражается следующей функцией от времени:

$$h = v_0t — {}^1/_2\, gt^2,$$

где g есть то постоянное число (равное приблизительно 980 см), которое мы встречали в формулах свободного падения тела. Скорость v такого движения в конце t-й секунды, согласно сказанному в предыдущем §, выразится так:

$$v = (v_0t — {}^1/_2\, gt^2)'$$

Производная от алгебраической суммы равна той же сумме производных от слагаемых (§ 333); поэтому:

$$v = (v_0\, t)' — ({}^1/_2\, gt^2)'$$

Мы видели (§§ 326, 328), что $(ax)'= a$ и $(ax^2)' = 2ax$. Значит, заменяя x на t, мы будем иметь:

$$(v_0\, t)' = v_0\, t \quad \text{и} \quad ({}^1/_2\, gt^2)' = 2 \bullet {}^1/_2\, gt = gt$$

Следовательно,

$$v = v_0 — gt.$$

Из этой формулы видно, что с возрастанием времени скорость уменьшается и притом равномерно, так как с каждым увеличением времени на одну единицу скорость уменьшается на одну и ту же величину g. Такое движение называется равномерно-замедлительным, а величина, на которую скорость уменьшается в течение каждой секунды, называется отрицательным ускорением этого движения (при свободном падении тела ускорение положительное). Два движения — равномерно-ускорительное и равномерно-замедлительное носят общее название „равномерно-переменное движение".

Когда время настолько увеличится, что разность $v_0 — gt$, а следовательно, и скорость v, обратятся в нуль, тогда начнется обратное движение — равномерно-ускоренное падение вниз.

Разрешим 4 следующие вопроса: 1) как велико время **T**, в течение которого тело достигнет наивысшей точки; 2) какова высота **H**, на которую оно при этом поднимается; 3) какое время T_1понадобится, чтобы тело с верхней точки упало вниз, и 4) какую скорость v оно приобретет при возвращении назад.

1) Так как при наивысшем поднятии скорость v должна обратиться в нуль, то время **T** мы найдем из уравнения:

$$v_0 — g\mathrm{T}= 0,$$

откуда:

$$T = \frac{v_0}{g}$$

Напр., при начальной скорости v_0 = **4900** см в секунду, это время равно **4900 : 980 = 5** сек.

2) Высоту поднятия **H** получим из уравнения $h = v_0 t - {}^1/_2\, gt^2$, если на место t подставим $T = \frac{v_0}{g}$:

$$H = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}\, g \cdot \frac{v_0{}^2}{g^2} = \frac{v_0{}^2}{g} - \frac{v_0{}^2}{2g} = \frac{2v_0{}^2 - v_0{}^2}{2g} = \frac{v_0{}^2}{2g}\,.$$

Напр., при начальной скорости **4900** см в сек. получим:

$$H = \frac{4900^2}{1960} = 12250\ \text{см} = 122{,}5\ \text{м}.$$

3) Для решения третьего и четвертого вопросов надо пользоваться формулами свободного падения тел:

$$h = {}^1/_2\, gt^2, \text{ и } v = gt.$$

Так как высота **H**, с которой тело падает вниз, нам уже известна, то время падения T_1 найдется из формулы пространства, если вместо h подставим $H = \frac{v_0{}^2}{2g}$:

$$\frac{v_0{}^2}{2g} = \frac{gT_1{}^2}{2}; \quad v_0{}^2 = g^2 T_1{}^2; \quad T_1{}^2 = \frac{v_0{}^2}{g^2}; \quad T_1 = \frac{v_0}{g}\,.$$

Таким образом, время падения с верхней точки вниз равно времени поднятия.

4) Скорость v, которую тело получит при возвращении назад, найдется из формулы скорости: $v = gt$, если вместо t подставим $T_1 = \frac{v_0}{g}$:

$$v = g \cdot \frac{v_0}{g} = v_0$$

Таким обрааом тело, возвратившись назад, приобретает ту же скорость, с какою началось поднятие вверх.

Должно однако иметь в виду, что эти выводы верны лишь в предположении, что движение совершается в безвоздушном пространстве, так как сопротивление воздуха уменьшает высоту поднятия и уменьшает скорость в конце возвращения.

342. Ускорение при движении. При равномерно-переменном движении ускорением называется положительное или отрицательное приращение скорости в одну единицу времени. При движении равномерно-переменном это приращение одинаково для каждой единицы времени; так. при свободном падении тела оно равно круглым числом +10 *м* в секунду, при движении тела, брошенного вертикально вверх, оно составляет около —10 *м* в секунду. Но движение может быть и не равномерно-переменное, когда изменение скорости в течение равных промежутков времени не одно и то же. В таком движении каждому моменту соответствует свое особое ускорение. Чтобы уяснить себе, что при движении неравномерно-переменном принимается за меру ускорения в данный момент, надо предварительно определить так называемое среднее ускорение за данный промежуток времени.

Положим, что за промежуток времени Δt, следугощий за концом t-й единицы времени, скорость v данного движения получила приращение (положительное или отрицательное) Δv. Тогда частное $\Delta v : \Delta t$ будет означать прирашение скорости в одну единицу времени, если в течение промежутка Δt скорость изменяется равномерно. Частное это называется средним ускорением движения за промежуток Δt, следующий за концом t-й единицы времени. В действительности скорость v изменялась за этот промежуток неравномерно, и потому в продолжение его могло быть бесчисленное множество различных по величине ускорений. Но очевидно, что разность между средним ускорением и каждым из этих ускорений тем меньше, чем меньше промежуток Δt, для которого вычислено среднее ускорение. Поэтому мы можем дать такое определение:

За ускорение неравномерно-переменною движения в данный момент принимается предел, к которому стремится среднее ускорение, вычисленное для промежутка времени, следующею за данным моментом (или ему предшествующего - все равно), ***когда этот промежуток стремится к нулю***.

Таким образом,

$$\textbf{ускорение в данный момент = пред. } {}^{\Delta v}/_{\Delta t}\ , \qquad \text{если } \Delta t \longrightarrow 0.$$

343. Соотношение между ускорением и производной от скорости.

Положим, что скорость v есть некоторая функция от времени:

$$v = f(t)$$

Тогда приращение Δv, полученное скоростью в течение промежутка Δt, следующего за концом t-й единицы времени, может выразиться так:

$$\Delta v = f(t + \Delta t) — f(t);$$

следовательно,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Значит, ускорение в конце t-й единицы времени (обозначим его w), будет:

$$w = \text{пред.}\ \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},\ \text{ если }\ \Delta t \to 0.$$

Но предел этот есть производная от $f(t)$; поэтому:

если $v = f(t)$, то $w = f\,'(t)$,

что можно высказать так:

Ускорение равно производной от функции, выражающей скорость в зависимости от времени.

Как мы видели (§ 340), функция, выражающая скорость, сама есть производная от пространства, выраженного в зависимости от времени; значит, ускорение равно производной от этой производной, т. е. так называемой второй производной от пространства (обозначается знаком ″).

Например, при свободном падении тела (§ 339):

$$h = {}^1/_2 gt^2, \quad v = ({}^1/_2 gt^2)' = gt$$

и

$$w = ({}^1/_2 gt^2)'' = (gt)' = g,$$

т. е. ускорение постоянно для всех моментов и равно ***g*** (= **980** *см в сек.*).

При движении тела, брошенного вертикально вверх (§ 341):

$$h = v_0 t - {}^1/_2 gt^2; \quad v = (v_0 t - {}^1/_2 gt^2)' = v_0 - gt$$

и

$$w = (v_0 t - {}^1/_2 gt^2) = (v_0 - gt)' = - g.$$

Вообще, если пространство ***e***, проходимое телом в ***t*** единиц времени, выражается трехчленом 2-й степени:

$$e = at^2 + bt + c, \qquad \text{то}$$

$$v = (at^2 + bt + c)' = 2at + b$$

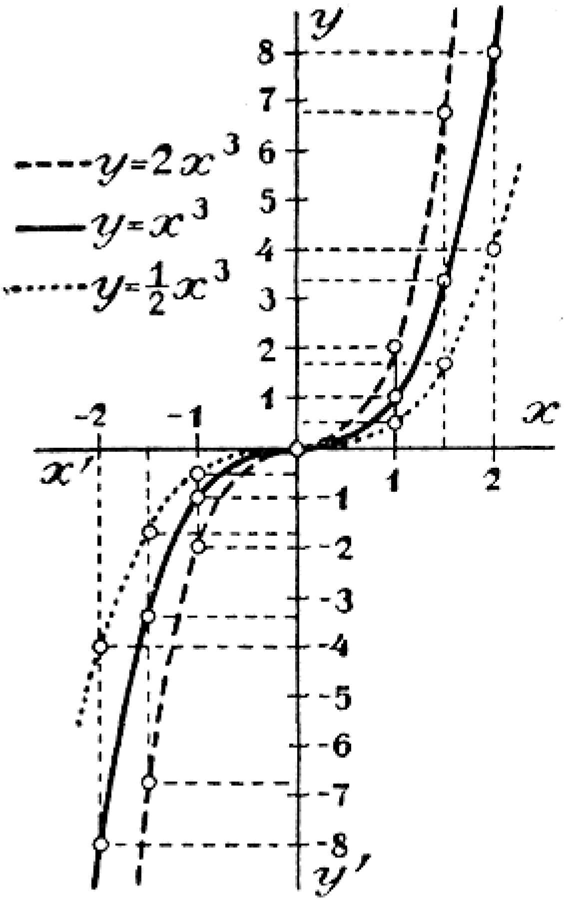
и

$$w = (at^2 + bt + c)'' = (2at + b)' = 2a.$$

Глава шестая.

Функция третьей степени.

344. Производная от функций $y = x^3$ и $y = ax^3$. Главнейшие особенности этих функций мы уже рассмотрели ранее (ч. I, отдел 6 глава 5 §§ 162, 163); тогда же мы построили графики этих функций (черт. 20). Найдем теперь их производные.



Черт.20

Положим, что переменному независимому числу мы дали какое-нибудь приращение ***h***, начиная от произвольного его значения ***x***. Тогда функция x^3 получит некоторое приращение ***k***, равное:

$$k = (x + h)^3 — x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3$$

Следовательно,

$$k/h = 3x^2 + 3hx + h^2$$

Если

$$h \text{—>} 0, \text{ то } 3hx \text{—>} 0 \text{ и } h^2 \text{—>} 0;$$

поэтому:

$$(x^3)' = \text{пред. } k/h = 3x^2.$$

Производную от функции $y = ax^3$ мы легко найдем, основываясь на том, что (§ 332):

$$[af(x)]' = af(x).$$

Следовательно,

$$(ax^3)' = a\,(x^3)' = a \cdot 3x^2 = 3ax^2.$$

Так:

$(^1/_2\,x^3)' = 3\bullet{}^1/_2\,x^2 = {}^3/_2\,x^2$; $(2ax^3)' = 3\bullet\, 2ax^2 = 6ax^2$.

Применение. Воспользуемся этими производными для определения направления выпуклости и вогнутости кривых:

$y = x^3$, $y = {}^1/_2\,x^3$, $y = 2x^3$ (черт. 20).

Производные этих функций, равные $3x^2$, ${}^3/_2\,x^2$ и $6x^2$, очевидно, возрастают при возрастании положительного значения x и убывают при возрастании отрицательного значения x. Так, если дадим числу x возрастающие значения: — 2,—1, 0, 1, 2..., то производная $3x^2$ будет: 12, 3, 0, 3, 12..., т. е. она убывает, пока отрицательные значения числа x возрастают, и возрастает при возрастании положительных значений x. Вследствие этого, согласно признакам вогнутости кривых (§ 336), рассматриваемые кривые обращены вогнутостью вверх для положительных значений x и вниз, для отрицательных, что мы и видим на чертеже 20. При переходе через значение x = 0 кривые меняют выпуклость на вогнутость и потому в начале координат они имеют так называемую точку перегиба.

345. Исследование полной функции третьей степени (на частных примерах).

Пример 1-й. $f(x) = {}^1/_3\,x^3 — x^2 — 3x + 5$.

Желательно исследовать эту функцию, т. е. решить следующие вопросы:

1) всегда ли функция возможна и получает ли она при данном значении x только одно значение, или несколько;
2) при каких значениях x функция возрастает и при каких убывает;
3) найти *maxitum* и *minitum* функции, если таковые существуют;
4) найти, если можно, нулевые значения функции (корни уравнения ${}^1/_3\,x^3 — x^2 — 3x + 5 = 0$) и
5) найти предельные значения функции при $x = \pm\infty$ и при x = 0.

Последний вопрос решается без помощи производной. Подставив вместо x число 0, мы прямо найдем, что тогда данная функция обращается в + **5**. С другой стороны, представив функцию в виде произведения:

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right),$$

мы видим, что когда x —> ± ∞, многочлен, стоящий внутри скобок, имеет пределом ${}^1/_3$, а множимое x^3 стремится к + ∞, если x—>+ ∞ и к — ∞, если x —>∞. Значит, $f(x)$—>+ ∞ в первом случае и к — ∞ во втором.

Для решения вопроса о возрастании или убывании функции, надо составить ее производную. Так как производная от алгебраической суммы равна той же сумме производных от слагаемых, то:

$$({}^1/_3\,x^3 — x^2 — 3x + 5)' = ({}^1/_3\,x^3)' — (x^2)' — (3x)' + (5)' = x^2 — 2x — 3.$$

Чтобы судить теперь, при каких значениях x данная функция возрастает или убывает, надо (§ 335) узнать, при каких значениях x производная положительна и при каких отрицательна, т. е., другими словами, надо решить 2 неравенства;

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ и } x^2 - 2x - 3 < 0.$$

Для их решения мы. предварительно разложим трехчлен $x^2 - 2x - 3$ на множители, для чего найдем корни этого трехчлена:

$$x^2 - 2x - 3 = 0; \quad x = 1 \pm\sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2;$$
$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1.$$

Теперь выполним разложение {ч. I,отдел 9 глава 2 § 221):

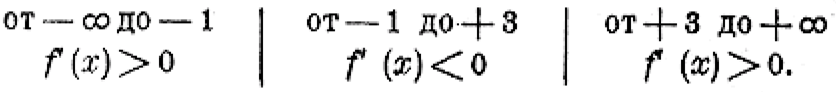
$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)\,[x - (-1)].$$

Следовательно, неравенства можно написать так:

$$(x - 3)\,[x - (-1)] \gtrless 0.$$

Произведение двух сомножителей тогда положительно, когда оба сомножителя положительны или когда оба отрицательны. Первое будет иметь место тогда, когда x больше большего из двух корней, т. е. когда $x > 3$ (тогда и подавно. $x > -1$), второе тогда, когда x меньше меньшего корня, т. е. когда $x < -1$ (тогда и подавно $x < 3$). Значит, в этих двух случаях производная положительна. Если же один из двух сомножителей положительный, а другой отрицательный, то произведение отрицательно. Это может быть только тогда, когда значение x заключается между меньшим и большим корнем трехчлена, т. е. когда $3 > x > -1$.

Следовательно, при изменении x



от $-\infty$ до -1	от -1 до $+3$	от $+3$ до $+\infty$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0.$

и поэтому (§ 336):

$f(x)$ возрастает | $f(x)$ убывает | $f(x)$ возрастает.

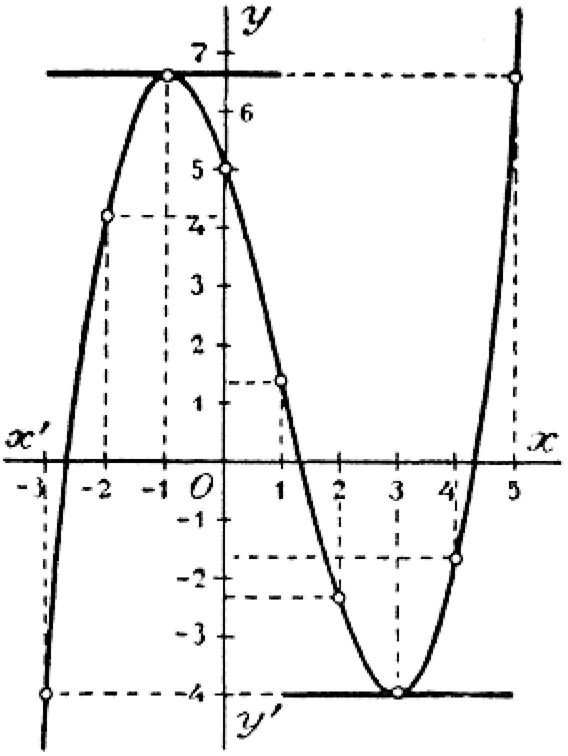
Отсюда видно, что при переходе x через -1 данная функция получает *maximum* а при переходе через $+3$ она получает *minimum*. Значения эти равны:

$$maximum \text{ (при } x = -1) = -\tfrac{1}{3} - 1 + 3 + 5 = 6\tfrac{2}{3};$$
$$minimum \text{ (при } x = +3) = 9 - 9 - 9 + 5 = -4$$

Для более подробного представления о ходе изменения данной функции составим таблицу ее частных значений, например, такую:

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	..	$+\infty$
y	$-\infty$	...	-4	$4\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	5	$1\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{3}$	-4	$-1\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$	..	$+\infty$

Нанеся все эти значения на чертеж в виде отдельных точек и обведя эти точки непрерывною кривою, мы получим следующий график данной функции (черт.21):



Черт.21

Кривая эта пересекает ось **x**-ов в трех точках, которых абсциссы лежат: одна между **—2** и **—3**, другая между **1** и **2** и третья между **4** и **5**. Значит кубичное уравнение

$$^{1}/_{3}\,x^{3} - x^{2} - 3x + 5 = 0$$

имеет три вещественных корня, лежащих между указанными границами (если выполнить чертеж на миллиметровой бумаге возможно точно, то корни уравнения можно найти с большею точностью).

Решим вопрос о вогнутости кривой. Для этого надо (§ 336) узнать при каких значениях x производная возрастает и при каких убывает. По виду нашей производной

$$f'(x) = x^{2} - 2x - 3$$

это определить затруднительно.

Но можно воспользоваться признаками возрастания или убывания функции (§ 335): найти производную от $f'(x)$ (иначе сказать, найти вторую производную от $f(x)$ и определить, когда она положительна и когда отрицательна.

Производная от функции $f'(x) = x^{2} - 2x - 3$ будет $f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$.

Очевидно, что при $x > 1$ она положительна, а при $x < 1$ отрицательна.Значит, при $x > 1$ производная $f'(x)$ возрастает, а при $x < 1$ она убывает. Следовательно, для всех значений $x > 1$ вогнутость кривой направлена вверх, а при всех значениях $x < 1$ она направлена вниз (таким образом, точка с абсциссой **1** есть точка перегиба). Это и подтверждается на нашем чертеже.

346. Пример 2-й. $f(x) = x^{3} - 12x^{2} + 48x - 13$;

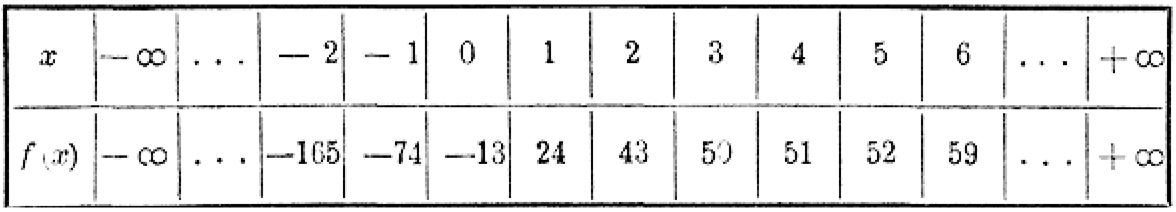
$$f'(x) = 3x^{2} - 24x + 48 = 3(x^{2} - 8x + 16) = 3(x - 4)^{2}.$$

Так как произведение $3(x - 4)^{2}$ при всяком значении x есть число положительное (кроме значения $x = 4$, когда оно равно нулю), то данная функция при изменении x от —

∞ до $+\infty$ постоянно возрастает и потому она не имеет ни *maximum*, ни *minimum*. При $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ производная равна нулю; это значит, что касательная, проведенная через точку с абсциссой **4**, параллельна оси $\boldsymbol{x}$-ов. Но касательная может быть параллельной оси $\boldsymbol{x}$-ов только в трех случаях: когда кривая в точке касания или имеет *maximum*, или имеет *minimum*, или перегибается в этой точке. Наша кривая не имеет совсем ни *maximum*, ни *minimum*, значит, точка с абсциссой **4** есть точка перегиба.

Мы можем в этом убедиться еще иначе, если определим, для каких значений $\boldsymbol{x}$ кривая вогнута, и для каких —выпукла. Для этой цели можно было бы воспользоваться вторую производного, но в данном примере благодаря особому виду первой производной: $\boldsymbol{f'(x) = 3\,(x - 4)^2}$ мы можем сразу определить, при каких значениях x эта производная возрастает и при каких — убывает. Очевидно, что при изменении $\boldsymbol{x}$ от **4** до $+\infty$ разность $\boldsymbol{x - 4}$ возрастает от 0 до $+\infty$; следовательно, при этом возрастает и $\boldsymbol{f'(x)}$ от **0** до $+\infty$ При изменении $\boldsymbol{x}$ от $-\infty$ до **4**, разность $\boldsymbol{x - 4}$ возрастает от $-\infty$ до **0**; следовательно, квадрат этой разности$\boldsymbol{(x - 4)^2}$ при этом изменяется от $+\infty$ до **0**; значит, $\boldsymbol{f'(x)}$ убывает от $+\infty$ до **0**. Таким образом, для всех значений $\boldsymbol{x}$, меньших **4**, вогнутость кривой направлена вниз, а для всех значений $\boldsymbol{x}$, больших **4**, она направлена вверх, и потому точка с абсциссой **4** есть точка перегиба.

Для изображения графика данной функции составим предварительно таблицу частных значений:



x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	...	-165	-74	-13	24	43	50	51	52	59	...	$+\infty$

Так как $\boldsymbol{f(x)}$ выражается числами с очень большой абсолютной величиной, то для удобства чертежа можно уменьшить все их в 10 раз (конечно, от этого чертеж окажется сжатым в вертикальном направлении в 10 раз). Предлагаем читателям самим исполнить этот чертеж.

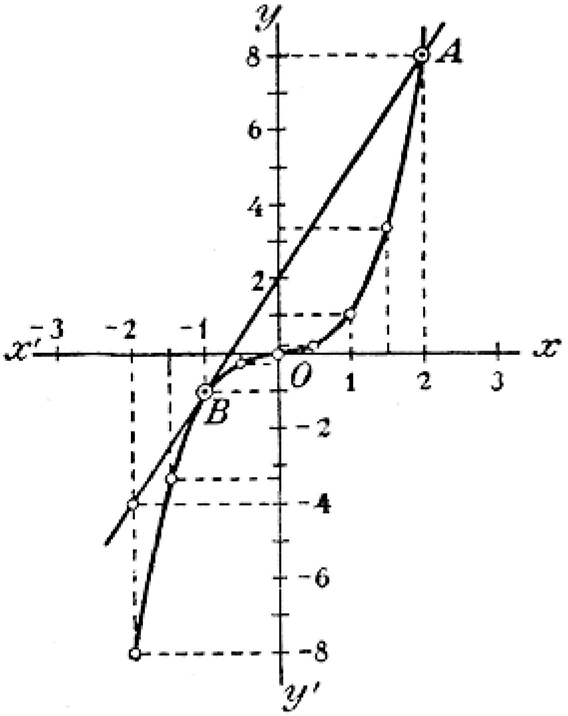
347. Графическое решение кубичного уравнения вида $\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$. Графическим способом можно решить кубичное уравнение так же, как решается квадратное уравнение (ч. I, отдел 9 глава 2 § 226), а именно: перенеся все члены уравнения в левую часть, строят график функции 3-й степени, стоящей в левой части уравнения, и затем на чертеже находят величины абсцисс точек, в которых этот график пересекается с осью $\boldsymbol{x}$-ов. Так, из чертежа 21 видно, что уравнение $\boldsymbol{{}^1/_3\, x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0}$ имеет 3 корня, один отрицательный и 2 положительных, приблизительные величины которых можно найти на чертеже, изготовленном на миллиметровой бумаге.

Более удобен следующий способ, применяемый тогда, когда кубичное уравнение имеет вид: $\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$ (в нем недостает члена с $\boldsymbol{x^2}$) К такому виду можно привести уравнение $\boldsymbol{x^3 + ax^2 + bx + c = 0}$, если введем вспомогательное неизвестное $\boldsymbol{y}$, связанное с $\boldsymbol{x}$ равенством: $\boldsymbol{x = y - {}^a/_3}$.

Пусть, например, требуется решить уравнение $\boldsymbol{x^3 - 3x - 2 = 0}$. Для этого, представив уравнение в виде $\boldsymbol{x^3 = 3x + 2}$, построим графики двух функций $\boldsymbol{y_1 = x^3}$ и $\boldsymbol{y_2 = 3x + 2}$ и затем определим абсциссы точек пересечения этих, двух графиков. (черт. 22).

График функции $y_1 = x^3$ построим, как было указано ранее(ч. I, отдел 6 глава 5 § 162). График второй функции: $y_2 = 3x + 2$ есть прямая линия, которую мы можем построить по 2 точкам, например, таким: $x = 0$, $y_2 = 2$ и $x = — 2$, $y_2 = — 4$. Из чертежа видно, что эта прямая пересекается с кривой в точке **A**, имеющей абсциссу **2**, и касается кривой в точке **B**, имеющей абсциссу **—1**. Эти абсциссы и будут корнями уравнения $x^3 = 3x + 2$, так как при этих абсциссах ординаты кривой и прямой одни и те же.

Таким образом, если имеем заранее изготовленное лекало, выражающее параболу 3-й степени: $y = x^3$, то при его помощи мы легко можем находить на чертеже корни кубичного уравнения вида: $x^3 + px + q = 0$



Черт.22

Глава седьмая.

Функция вида $y = {}^{a}/_{x}$

348. Особенности этой функции. Функция $y = {}^{a}/_{x}$, в которой a постоянное число, выражает, как мы видели (ч. 1, отдел 2 глава 8 §105), обратную пропорциональную зависимость между переменными числами и x. Когда мы говорили о графическом изображении этой зависимости (ч. I, отдел 3 глава 2 § 112), мы тогда строили график этой функции, но только для положительных значений x. Теперь мы построим кривую, выражающую функцию $y = {}^{a}/_{x}$ не только для положительных, но и для отрицательных значений x, и кроме того рассмотрим некоторые особенности этой функции.

Возьмем случай, когда $a = 1$, т. е. когда функция имеет вид $y = {}^{1}/_{x}$. Очевидно, что при всяком значении x, отличном от нуля (как положительном, так и отрицательном), функция эта возможна и получает единственное значение, причем для положительных значений x она положительна, а для отрицательных значений x — отрицательна. При $x = 0$ функция ${}^{1}/_{x}$перестает существовать (деление на 0 невозможно), но если число x не равно **0**, а только приближается к **0**, оставаясь положительным (например, если x переходит через значения: 0,1; 0,01; 0,001; и т. д.), то функция возрастает неограниченно (она делается равной 10, 100, 1000 и т. д.), иначе сказать, она стремится к + ∞. Если же x приближается к **0**, оставаясь отрицательным (например, если x переходит через значения — 0,1;— 0,01; —0,001; и т. д.), то функция — стремится к — ∞ (переходя через значения —10,— 100, —1000 и т. д.). С другой стороны, если x—>+ ∞ или если x—> — ∞, функция и в том и в другом случае стремится к **0**. Таким образом,

если x возрастает от — ∞ до **0**, то функция убыв, от **0** до — ∞	если x возрастает от **0** до + ∞, то функция убыв, от + ∞ до **0**.

Таким образом, при переходе ***x*** через нулевое значение от отрицательных значений к положительным функция сразу переходит от — ∞ к +∞. При всех же значениях ***x***, неравных нулю, функция изменяется непрерывно, т. е. бесконечно малому приращению числа ***x*** соответствует и бесконечно малое приращение функции $y = {}^1/_x$. Действительно, если дадим числу ***x*** какое-нибудь приращение ***h***, то функция получит приращение ***k***, равное

$$\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)\,x}=\frac{-h}{(x+h)\,x}.$$

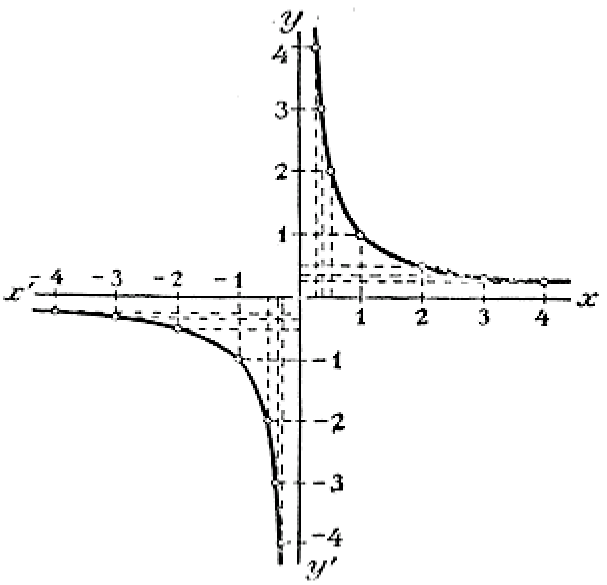
Если ***h*** —> **0**, то числитель полученной дроби стремится к нулю а знаменатель к x^2 , т. е. к числу, не равному нулю (если только ***x*** не равен нулю); значит, правая часть полученного нами равенства (следовательно, и его левая часть) стремится к **0,** когда ***h*** —> **0**. Из этого следует, что при непрерывном изменении числа ***x***, если только ***x*** не переходит через нулевое значение, функция $y = {}^1/_x$ изменяется тоже непрерывно; при переходе же ***x*** через нуль функция претерпевает разрыв непрерывности, переходя скачком от — ∞ к + ∞.

Заметив все это, построим теперь график нашей функции при помощи, например, таких таблиц частных значений:

x	0	. . .	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2	3	4	. . .	$+\infty$
y	∞	. .	4	2	1	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_4$	. . .	0

x	0	. . .	$-{}^1/_4$	$-{}^1/_2$	-1	-2	-3	-4	. . .	$-\infty$
y	$-\infty$	. . .	-4	-2	-1	$-{}^1/_2$	$-{}^1/_3$	$-{}^1/_4$	. . .	0

Обведя все точки непрерывной кривой, получим график (черт.23), состоящий из двух ветвей: одна расположена в угле ***xOy***, другая в угле ***x'Oy'***. Обе эти ветви выражают одну и ту же функцию $y = {}^1/_x$, только первая ветвь выражает эту функцию для положительных значений ***x***, а другая для отрицательных. Ветви эти образуют кривую, называемую гиперболой.



Черт.23

Рассмотрим главнейшие ее свойства.

1. Асимптоты. Ветвь кривой, расположенная в угле ***xOy,*** по мере возрастания ***x***, все более и более приближается к полуоси ***Ox***, но никогда ее не достигает вполне (так как дробь $^{1}/_{x}$ ни при каком значении x не равна нулю).

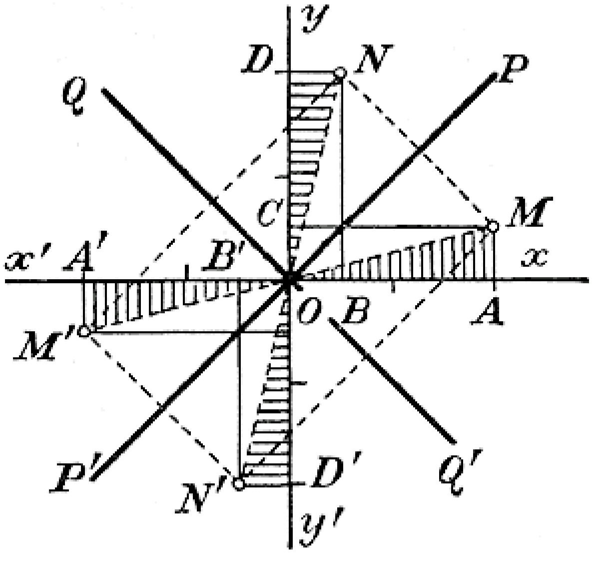
Равным образом, ветвь кривой, лежащая в угле $x'Oy'$, по мере продолжения ее налево, неограниченно приближается к полуоси Ox'**,** никогда ее не достигая. При неограниченном уменьшении положительного значения x ветвь кривой в угле xOy приближается все более и более к полуоси Oy, никогда ее однако не достигая (так как дробь $^{1}/_{x}$ при $x = \mathbf{0}$ перестает существовать); также при неограниченном уменьшении абсолютной величины отрицательного значения x ветвь кривой в угле $x'Oy'$ все более и более приближается к полуоси Oy'никогда ее не достигая.

Прямая, к которой кривая неограниченно приближается, никогда ее однако не достигая,называется асимптотой. Гипербола имеет 2 асимптоты: ось x-ов и ось y-ов.

2. Оси симметрии. Центр симметрии. Уравнение $y = ^{1}/_{x}$ можно написать так: $xy = \mathbf{1}$. Из этого вида замечаем, что переменные x и y играют в уравнении одинаковую роль, т. е. если мы заменим y на x, а x на y, то уравнение от этого не изменится (такие уравнения называются симметричными). Поэтому если мы нашли, что такому уравнению удовлетворяет какая-нибудь пара значений: $x = a$ и $y = b$, то ему же удовлетворяет и другая пара значений: $x = b$, $y = a$, составленная из первой пары заменою x на y, и наоборот. Например, как видно из таблицы значений, приведенной выше, на гиперболе лежат точки ($^{1}/_{2}$, **2**) и (**2**, $^{1}/_{2}$). Уравнение $xy = \mathbf{1}$ также не изменяется, если мы вместо **x** возьмем — x и вместо y возьмем — y. Значит, если на гиперболе имеется точка (a, b), то на ней же (на другой ветви) должна находиться и точка (—a,—b). Например, из той же таблицы видно, что на гиперболе лежат точки ($^{1}/_{2}$, **2**) и (—$^{1}/_{2}$ — **2**), или точки (**3**, $^{1}/_{3}$) и (— **3**, —$^{1}/_{3}$). Заметив это, возьмем такие 4 точки (черт. 24).

M (2, $^{1}/_{2}$), N ($^{1}/_{2}$, 2), M ' (— 2 — $^{1}/_{2}$) , N ' (— $^{1}/_{2}$ — 2).

Эти 4 точки лежат на гиперболе. Проведя прямые **OM, ON, OM'** и **ON'**, мы получим четьюе прямоугольные треугольника **OMA, OND, OM'A'** и **ON'D'** (покрытые на чертеже штрихами). Эти треугольники равны между собою (по равенству катетов). Значит, их гипотенузы равны, а также равны и острые углы при общей вершине **O**. Из равенства этих углов следует, что **OM** есть продолжение **OM'** и **ON** продолжение **ON'**. Проведя прямые **MN, M'N', M'N и MN',** мы получим равнобедренные треугольники попарно равные: **OMN=OM'N'** и **OM'N = OMN'**. Проведем еще биссектрисы **PP'** и **QQ'** прямых углов, образуемых осями координат.



Черт.24

Из чертежа легко усмотреть, что эти., биссектрисы делят пополам 4 угла указанных равнобедренных треугольников, лежащие при общей вершине **O**, и потому они делят пополам основания этих треугольников и перпендикулярны к ним. Отсюда следует, что точки **M** и **N**, а также и точки **M'** и **N'**, симметрично расположены относительно прямой **PP'** а точки **M** и **N'**, а также и точки **N** и **M'**, симметрично лежат относительно прямой **QQ'**. Так как сказанное о 4 точках **M, N, M'** и **N'** может быть повторено о всяких других 4 точках, расположенных подобным же образом на гиперболе, то заключаем, что гипербола имеет 2 оси симметрии, именно биссектрисы прямых углов, образуемых осями координат. Пересечение этих осей, т. е. точка **O**, служит центром симметрии, так как прямые **MM'** и **NN'** делятся этою точкою пополам.

Предположим теперь, что в функции $y = {}^{a}/_{x}$ число a не равно **1**, а есть какое-нибудь положительное число, большее или меньшее **1**. Тогда она выразится такою же гиперболою, как и функция ${}^{1}/_{x}$, только абсолютные величины ординат ее будут больше (если $a > 1$), или меньше (если $a < 1$) соответствующих ординат гиперболы — в одном и том же отношении $a : 1$ (ч. I, черт., § 112)

Если a будет число отрицательное (например, $y = —{}^{1}/_{x}$), то положительным значениям x будут соответствовать отрицательные значения y, и наоборот. Значит, ветви гиперболы будут расположены в углах $x'Oy$ и xOy', свойства же кривых останутся те же самые, как и для положительных значений числа a.

349. Производная от функции $y = {}^{a}/_{x}$.

Сначала найдем производную от функции $y = {}^{1}/_{x}$. Для этого дадим числу x какое-нибудь приращение h. Тогда y получит приращение k, равное

$$k = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = -\frac{h}{(x+h)x}.$$

Следовательно,

$$\frac{k}{h} = -\frac{1}{(x+h)x}$$

и потому

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \text{пред.}\left(\frac{k}{h}\right)_{h\longrightarrow 0} = -\frac{1}{x^2},$$

так как

$$\text{пред.}\Big[(x+h)x\Big]_{h\longrightarrow 0} = x^2.$$

Для функции $y = {}^{a}/_{x}$ производная будет (§ 332):

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = \left(a\cdot\frac{1}{x}\right)' = a\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}.$$

Применения. Воспользуемся производной для суждения о возрастании и убывании функции, а также и вогнутости и выпуклости кривой.

Производная от функции $y = {}^{1}/_{x}$, равная $-\frac{1}{x^2}$ при всяком значении x, как положительном, так и отрицательном, всегда отрицательна (при $x = \mathbf{0}$ она не существует). Поэтому (§ 335) при возрастании x от $—\infty$ до $+\infty$ функция ${}^{1}/_{x}$ постоянно убывает (при $x = 0$, она как мы видели, претерпевает разрыв непрерывности). Значит, функция не имеет ни *maximum* ни *minimum*.

При возрастании числа x от — ∞ до 0, число x^2 убывает; значит, дробь $+\frac{1}{x^2}$ при этом возрастает, а дробь $-\frac{1}{x^2}$ убывает. Это показывает (§ 336), что в угле ***x'Oy'*** вогнутость гиперболы направлена вниз. При возрастании x от **0** до+ ∞, число x^2 возрастает, дробь $+\frac{1}{x^2}$, убывает, а дробь $-\frac{1}{x^2}$ возрастает. Это означает, что в угле ***xOy*** вогнутость гиперболы направлена вверх. Это и подтверждается чертежом 23.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ШЕСТНАДЦАТЫЙ.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Глава первая. **Прямая линия.**
Глава вторая. **Окружность и эллипс.**
Глава третья. **Гипербола.**
Глава четвертая.**Парабола.**

Глава первая.

Прямая линия.

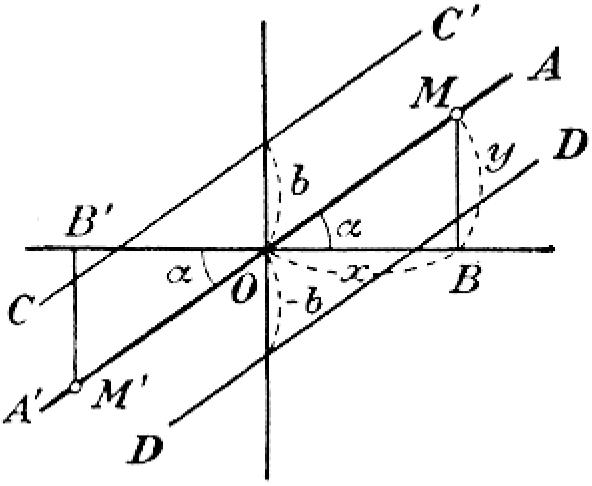
350. Уравнение прямой. Мы знаем (ч. I, отдел 3 глава 3 § 115), что уравнение 1-й степени с 2-мя неизвестными вида

$$y = ax + b$$

выражается помощью координатных осей в виде прямой линии, которая образует с положительным направлением оси x-ов угол α, определяемый равенством: **tg** $\alpha = a$, и отсекает от оси y-ов отрезок, равный b. Так как к такому виду может быть приведено всякое уравнение 1-й степени с 2-мя неизвестными x и y, то такое уравнение выражается при помощи координатных осей в виде прямой линии (почему оно и называется линейным уравнением).

Покажем теперь, что, обратно, *всякая прямая линия может быть выражена уравнением 1-й степени с двумя неизвестными* x *и* y.

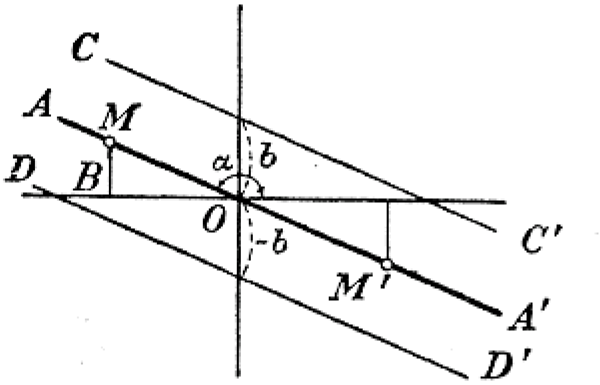
Сначала допустим, что прямая **AA'** (черт. 1) проходит через начало координат O, образуя с Ox острый угол α.



Черт.1

Возьмем на этой прямой произвольную точку **M**, абсцисса которой есть x = **OB** и ордината y = **MB**. Из треугольника **OMB** видно, что $y = x$ **tg** α, или $y = ax$, если **tg** α обозначим a. Выведенное нами уравнение $y = ax$ верно не только для точек полупрямой **OA**, но и для точек полупрямой **OA'**. Возьмем, напр., точку **M'**, которой координаты будут: x = — **OB'**, y = — **M'B'**. Из тр-ка **OB'M'** находим: **M'B'** = **B'O tg** α, т. е. — y = — x **tg** α, или $y = x$ **tg** α. Таким образом, уравнение $y = ax$ верно для всякой точки прямой **AA'**.

Теперь допустим, что прямая **AA'** проходит через начало координат, но образует с ***Ox*** не острый угол, а тупой ***α*** (черт. 2).



Черт.2

Если **M** есть какая-нибудь точка этой прямой, то ее абсцисса x = — **OB** и ордината y = **MB**, и мы из тр-ка **OMB** находим:

$$MB = OB \operatorname{tg} MOB,$$

т. е.

$$y = — x \operatorname{tg} MOB.$$

Но $\operatorname{tg} MOB = \operatorname{tg}(180°—\alpha) = — \operatorname{tg} \alpha$; значит, $y = — x(— \operatorname{tg} \alpha)= x \operatorname{tg} \alpha = ax$, если попрежнему обозначим $\operatorname{tg} \alpha$ через a. Подобное же уравнение получим и для любой точки **M**, расположенной на **OA'.**

Наконец, допустим, что дана прямая **CC'** или **DD'** (черт. 1 и 2), не проходящая через **O**, а отсекающая от оси y-ов отрезок, равный b (или — b). Тогда, проведя через точку **O** вспомогательную прямую **AA'** || **CC'**(или || **DD'**), мы получим для этой щямой уравнение $y = ax$, где $a = \operatorname{tg} \alpha$. Но очевидно, что при одной и той же абсциссе x ординаты точек прямой **CC'** больше ординат точек прямой **AA'** на b, а прямой **DD'** меньше на b; значит, уравнение прямой **CC'** будет $y = ax + b$, а прямой **DD'** $y = ax — b$, где a есть попрежнему тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси x-ов.

Частные случаи. 1) Если $a = 0$, т. е. если данная прямая параллельна оси x-ов, то уравнение будет: $y = b$. Если она при этом сливается с осью x-ов, то уравнение окажется:

$$y = 0.$$

2) Если данная прямая параллельна оси y-ов и отсекает от оси x-ов отрезок k, то уравнение такой прямой будет: $x = к$ (ордината, как не входящая в уравнение, остается произвольной).

351. Уравнение прямой, проходящей через данную точку.

Если прямая $y = ax + b$ проходит через точку (x_1, y_1), то мы должны иметь равенство

$$y_1 = ax_1 + b$$

Вычтя почленно это равенство из уравнения $y = ax + b$, получим:

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Что прямая, определяемая этим уравнением, действительно проходит через точку (x_1, y_1), видно из уравнения непосредственно: подставив вместо x и y соответственно y_1 и x_1 получим тождество: **0 = 0**.

Угловой коэффициент a остается неопределенным, так как через одну точку может проходить бесчисленное множество прямых.

Примеры. Уравнение прямой, проходящей через:

точку (**2,3**) будет: $y - 3 = a(x - 2)$;
„ (— **2,3**) „ $y - 3 = a(x + 2)$;
„ (— **2,—3**) „ $y + 3 = a(x + 2)$;
,, (**0,3**) „ $y - 3 = ax$;
,, (**0,0**) „ $y = ax$.

352. Уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки.

Положим, что прямая:

$$y - y_1 = a(x - x_1), \qquad (1)$$

проходящая через точку (x_1, y_1), проходит еще через другую точку (x_2, y_2). Тогда координаты этой другой точки должны удовлетворять уравнению прямой, и следовательно:

$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1)$, откуда находим:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Мы нашли таким образом угловой коэффициент прямой, проходящей через 2 данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Теперь уравнение (1) можно написать так:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

что можно изобразить в таком удобном для запоминания виде:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Что прямая, удовлетворяющая этому уравнению, проходит через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), видно из уравнения непосредственно; подставив вместо x и y соответственно x_1, y_1 или x_2, y_2 получим тождества:

$$\frac{y_1-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_1-x_1}{x_2-x_1},\text{ т. е. } 0=0$$

$$\frac{y_2-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1},\text{ т. е. } 1=1$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точки **А (2, 3)** и **В(— 2, 1)**, будет:

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-2}{-2-2},$$

т. е.

$$\frac{y-3}{-2}=\frac{x-2}{-4},\text{ или}\frac{y-3}{2}=\frac{x-2}{4},$$

что после упрощения дает: $x - 2y = -4$.

Глава вторая.

Окружность и эллипс.

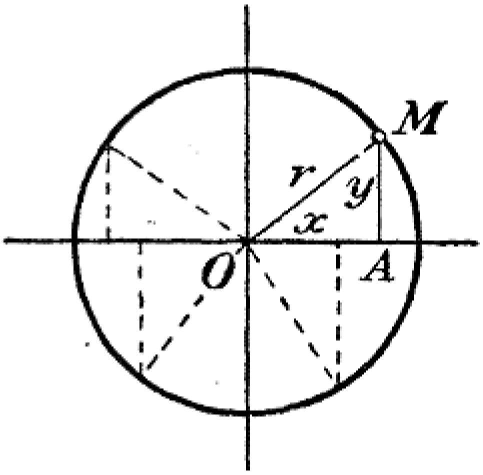
353. Уравнение окружности.

Пусть центр окружности радиуса r совпадает с началом координат **О** (черт. 3).

Возьмем на окружности какую-нибудь точку **М**, координаты которой будут x = **ОА** и y = **МА**. Из прямоугольного тр-ка **ОМА** находим:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Уравнение это остается верным не только для координат точек, лежащих на окружности в угле xOy, но и для координат точек окружности, лежащих в других углах.



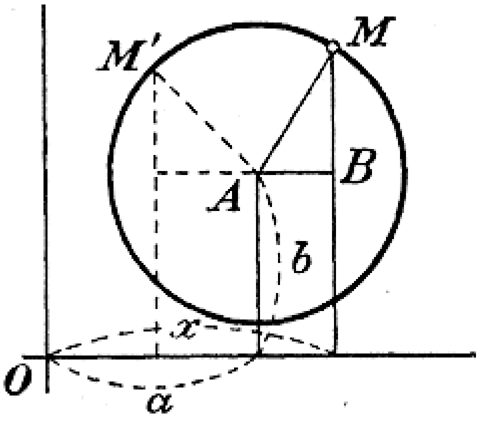
Черт.3

Действительно, в каком бы угле мы ни взяли точку окружности, координаты ее всегда будут катетами пряумоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть r; только катеты эти иногда приходится брать со знаком +, иногда со знаком—.
Но так как $(+x)^2=(-x)^2$ и $(+y)^2=(-y)^2$, то уравнение $x^2+y^2=r^2$ останется в силе для любой точки окружности, и потому его можно назвать уравнением окружности, у которой центр совпадает с началом координат.

Если центр окружности лежит (черт. 4) не в начале координат, а в какой-нибудь точке **A (*a*, *b*)**, то из тр-ка **AMB** находим (**B** вершина прямого угла): $AB^2 + MB^2 = AM^2$.
Но **AB**= ***x* — *a***, **MB** = ***y* — *b*** и **AM** = ***r***; следовательно,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Легко проверить, что уравнение это применимо для всякой точки окружности. Напр., для точки **M'** получим:



Черт.4

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = r^2$$

что тождественно уравнению, выведенному для точки **M.**

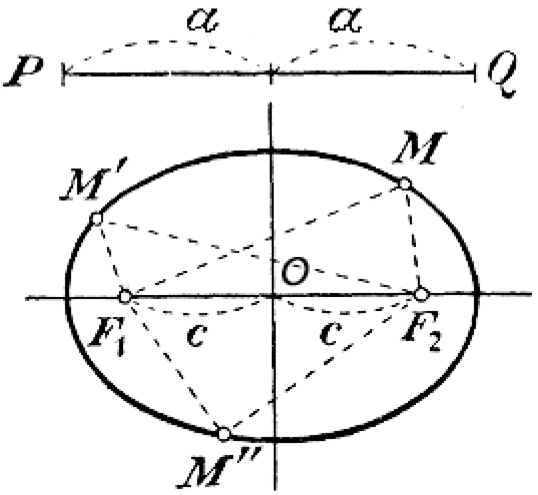
354. Определение эллипса.

Эллипсом ***называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстоянии которых от двух данных точек этой плоскости есть величина постоянная.***

Пусть, напр., даны 2 точки F_1 и F_2(черт. 5) и какой-нибудь отрезок прямой **PQ.** Если отыщем такие точки **M, M' M''**..., которые удовлетворяют требованию

$$MF_1 + MF_2 = M'F_1 + M'F_2 = M''F_1 + M''F_2$$

то эти точки принадлежат эллипсу. Конечно, существование подобных точек возможно только тогда, когда $PQ > F_1F_2$.



Черт.5

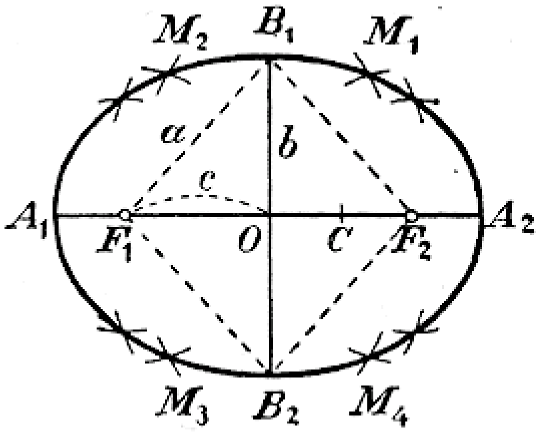
355. Построение эллипса непрерывным движением. Эллипс можно начертить непрерывным движением карандаша. Для этого возьмем нить, длина которой равна **PQ** (черт. 5) и укрепим ее концы в точках F_1 и F_2 . Затем, натянув нить острием карандаша, станем двигать карандашом по бумаге, наблюдая, чтобы нить всегда была в натяжении. При движении карандаш опишет замкнутую кривую, все точки которой находятся на таких расстояниях от F_1 и F_2 ,что их сумма равна длине нити, т. е. отрезку **PQ**.

Длина данного отреза **PQ** обозначается обыкновенно $2a$ **,** а расстояние между точками F_1 и F_2 обозначается $2c$. Точки эти называется фокусами, а прямые MF_1 и MF_2 соединяющие какую-нибудь точку **M** эллипса с фокусами, называется радиусами-векторами.

Точка **O**, означающая середину отрезка F_1F_2, называется центром эллипса. Всякая хорда эллипса, проходящая через центр, называется диаметром.

Из тр-ка $\mathbf{F_1MF_2}$ видно, что $\mathbf{MF_1 + MF_2 > F_1F_2}$ т. е. $2a > 2c$ и следовательно, $a > c$.

356. Построение эллипса по точкам (черт. 6).



Черт.6

Отложим $\mathbf{OA_1 = OA_2} = a$. Полученные точки $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ принадлежат эллипсу, так как
$\mathbf{A_1F_1=A_2F_2}$ и, следовательно,
$\mathbf{A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_1F_2} = 2a$ и также
$\mathbf{A_2F_2 + A_2F_1 = A_2F_2 + A_2F_1} = 2a$.

Дав теперь циркулю расстворение, равное $\mathbf{A_1O} = a$, опишем этим расстворением из центра $\mathbf{F_1}$и затем из центра $\mathbf{F_2}$ две дуги, которые пересекутся в точках $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$.

Эти точки тоже принадлежат эллипсу, так как $\mathbf{B_1F_1+B_1F_2} = 2a$ и $\mathbf{B_2F_1+B_2F_2} = 2a$ (прямая, проходящая через $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$, перпендикулярна к $\mathbf{A_1A_2}$ и делит $\mathbf{A_1A_2}$ пополам в точке **O**).

Четыре точки $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ **,** $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ называются вершинами эллипса.
Отрезки прямых $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{B_1B_2}$ называются осями эллипса, причем $\mathbf{A_1A_2}$ есть большая ось, а $\mathbf{B_1B_2}$ — малая ось. Длина малой оси обозначается $2b$.

Из тр-ка $\mathbf{F_1B_1O}$, в котором $\mathbf{F_1B_1} = a$, $\mathbf{OB_1} = b$ и $\mathbf{F_1O} = c$, видно, что $b^2 = a^2 — c^2$.

Кроме четырех вершин можно построить сколько угодно других точек эллипса таким образом. Возьмем на отрезке $\mathbf{F_1F_2}$ какую-нибудь точку **C** и, дав циркулю расстворение, равное $\mathbf{A_1C}$, описываем этим расстворением 4 небольшие дуги: две из центра $\mathbf{F_1}$, (одну выше прямой $\mathbf{A_1A_2}$, другую ниже ее, обе направо от $\mathbf{B_1B_2}$) и две из центра $\mathbf{F_2}$ (одну выше $\mathbf{A_1A_2}$ другую ниже, обе налево от $\mathbf{B_1B_2}$). Затем дадим циркулю расстворение, равное $\mathbf{CA_2}$, и этим расстворением описываем также 4 небольшие дуги: две из центра $\mathbf{F_1}$ и две из центра $\mathbf{F_2}$. Если взятая точка **C** расположена между $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$, то дуги, описанные из центра $\mathbf{F_1}$пересекутся с дугами, описанными из центра $\mathbf{F_2}$, так как расстояние между центрами $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ ($= 2c$) меньше суммы радиусов дуг, которая равна $\mathbf{A_1A_2}$ ($= 2a$), но больше их разности (= **2OC**) (Так как $\mathbf{A_1C} = a + \mathbf{OC}$ и $\mathbf{A_2C} = a — \mathbf{OC}$.)

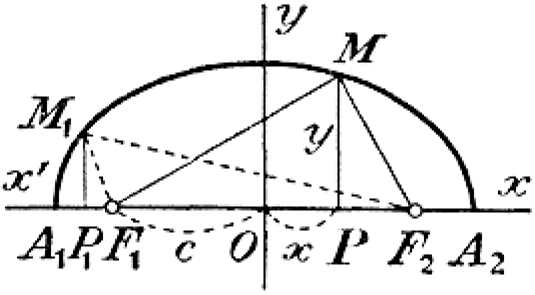
В пересечении получим четыре точки: $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$, $\mathbf{M_4}$ принадлежащие эллипсу. Взяв вместо **C** другую точку между $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$, мы подобным же построением получим еще 4 точки, и т. д. Когда, таким образом, получится довольно много точек, их все можно обвести непрерывней кривой, которая и будет эллипс.

Форма эллипса зависит от величины отношения $^c/_a$, называемого эксцентриситетом. Отношение это изменяется от **0** (когда $c = 0$) до **1** (когда $c = a$). Когда $c = 0$ и, значит, оба фокуса совпадают с центром, тогда эллипс обращается в окружность радиуса a, если же $c = a$, то фокус $\mathbf{F_2}$ совпадает с $\mathbf{A_1}$ и фокус $\mathbf{F_2}$ с $\mathbf{A_2}$; в этом случае эллипс обращается в отрезок $\mathbf{A_1A_2}$. Значит, чем ближе эксцентриситет к **0**, тем более эллипс расширяется в вертикальном направлении, приближаясь к кругу, а чем ближе эксцентриситет к **1**, тем более эллипс сжат в вертикальном направлении, приближаясь к прямой **A_1A_2**.

357. Уравнение эллипса.

Предположим, что (черт. 7) за ось *x*-ов взята продолженная большая ось эллипса, а за ось *y*-ов продолженная малая его ось.

Возьмем на эллипсе какую-нибудь точку **M**(*x, y*) и проведем радиусы-векторы **MF_1** и **MF_2** .Опустив **MP**_|_ **A_1A_2**, мы получим координаты точки **M**: абцисса *x* = **OP**, ордината *y* = **MP**. Из треугольников **F_1MP** и **PMF_2** находим:



Черт.7

$$MF_1^2 = MP^2 + F_1P^2 = y^2 + (c + x)^2,$$
$$MF_2^2 = MP^{\ 2} + PF_2^2 = y^2 + (c - x)^2,$$

и следовательно,

$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} + \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a.$$

Можно проверить, что это уравнение верно для всякой точки верхней половины эллипса. Возьмем, например, еще точку **M_1** , расположенную так, что основание **P_1** перпендикуляра **M_1P_1** лежит налево от **F_1** . Для этой точки находим:

$$M_1F_1^2 = M_1P_1^2 + P_1F_1^2 = M_1P_1^2 + (P_1O - F_1O)= y^2 + (-x - c)^2,$$

$$M_1F_2^2 = M_1P_1^2 + P_1F_1^2 = M_1P_1^2 + (P_1O + F_1O)= y^2 + (-x + c)^2$$

и следовательно,

$$\sqrt{y^2 + (-x - c)^2} + \sqrt{y^2 + (- x + c)^2} = 2a.$$

Так как $(-x - c)^2 = (x + c)^2$ и $(-x + c)^2 = (c - x)^2$, то это уравнение тождественно с выведенным ранее для точки **M**.

Подобным же образом можно убедиться, что уравнение остается верным и тогда, когда основание перпендикуляра падает направо от **F_2** или между **F_1** и **O**.

Если же уравнение остается верным для всех точек верхней половины эллипса, то оно должно быть верным и для всех точек нижней его половины, так как эти точки отличаются от соответственных точек верхней половины только тем, что ординаты нижних точек отрицательны, а верхних положительны; но это отличие не может повлиять на уравнение, так как в него входят только квадраты ординат.

Теперь упростим выведенное уравнение, освободив его, прежде всего, от радикалов. Перенеся второй радикал направо, возвысим обе части уравнения в квадрат:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + y^2 + (c - x)^2$$

Значит:

$$4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 + (c - x)^2 - (c + x)^2, \text{ т. е.}$$

$$4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 - 4cx$$

или

$$a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = a^2 - cx$$

Вторым возвышением в квадрат находим:

$$a^2y^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2y^2 + a^2x^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Но $a^2 - c^2 = b^2$; поэтому уравнение будет:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Разделив все члены на a^2b^2, мы придадим уравнению эллипса такой удобный для запоминания вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Таково уравнение эллипса в том случае, когда его большая ось лежит на оси x-ов, а малая на оси y-ов.

Если центр эляипса лежит не в начале координат, а в какой-нибудь точке (m, n), причем большая ось параллельна оси x -ов, то (как не трудно убедиться) уравнение будет такое:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

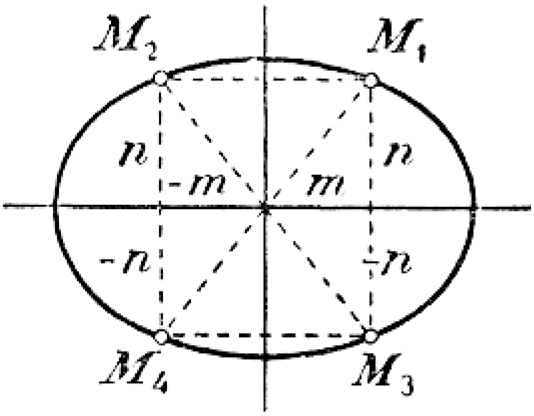
Если же большая ось параллельна оси y-ов, то в уравнениях надо заменить x на y, и наоборот, т. е. тогда уравнения будут:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{(y - m)^2}{a^2} + \frac{(x - n)^2}{b^2} = 1.$$

358. Следствия.

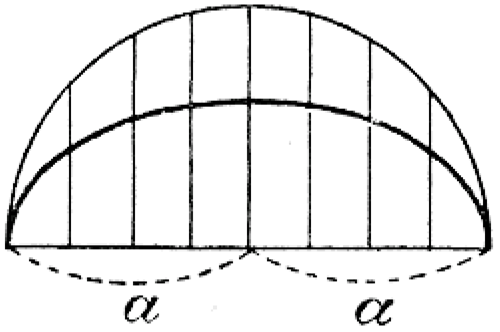
1) Из уравнения видно, что если на эллипсе (черт. 8) есть точка **M$_1$** (***m, n***), то на нем должны быть и точки

M$_2$ (***—m, n***), **M$_3$** (***m, —n***) и **M$_4$** (***—m, —n***). Из этого следует, что оси эллипса служат для него осями симметрии и пересечение осей есть центр оимметрии, т.е. такая точка, которая делит пополам всякий диаметр.



Черт.8

2) Построим (черт. 9) на большой оси эллипса, как на диаметре, окружность,



Черт.9

и сравним уравнение этой окружности с уравнением эллипса:

окружность . . $x^2+y^2=a^2$;

эллипс . . . . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

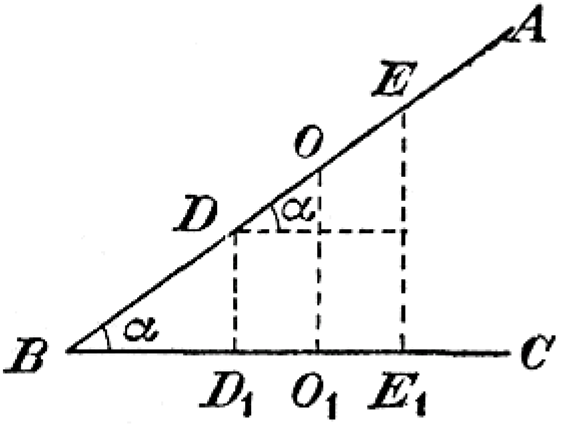
Из уравнений находим:

для окружности . . $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

для эллипса . . . $y=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Таким образом, при одной и той же абсциссе ***x*** ордината эллипса короче ординаты круга в отношении ***b : a***. Если, напр., ***b : a*** = $^{1}/_{2}$, то, разделив ординаты круга пополам, мы получим точки эллипса (это дает нам другой способ построения эллипса по точкам).

359. Эллипс как проекция круга. Вообразим 2 плоскости, образующие некоторый двугранный угол ***α*** (на чертеже 10 мы изобразили сечение **ABC** этого угла плоскостью чертежа, перпендикулярною к ребру угла ***α***).

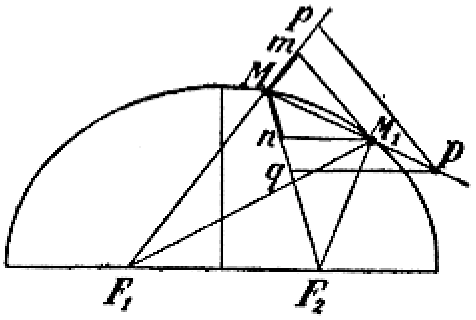


Черт.10

Пусть на плоскости **AB** из точки **O** как центра описан круг, и **DE** есть его диаметр, перпендикулярный к ребру угла ***α*** **.** Зададимся вопросом, какова будет ортогональная (прямоугольная) проекция этого круга на плоскости **BC**. Примем на плоскости **AB** за ось ***x*** - ов диаметр круга, параллельный углу ребра ***α***, а за ось ***y***-ов — диаметр, ему перпендикулярный. Тогда абсциссы всех точек окружности проектируются на плоскости **BC** в натуральную величину (так же, как и диаметр, параллельный ребру); ординаты же в проекциях окажутся меньше в одном и том же отношении, равном **cos** ***α*** (напр., проекция **D_1E_1** диаметра **DE** будет **DE cos** ***α***). Значит проекция окружности есть эллипс.

360. Свойство касательной. Возьмем на эллипсе две произвольные точки **M** и **M_1**, (черт. 11), проведем через них секущую и радиусы-векторы к каждой из них.

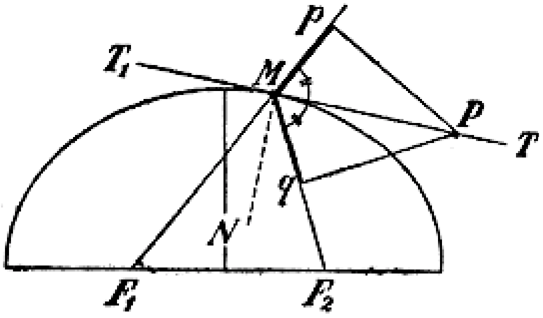
Продолжив **F_1M**, отложим **F_1m** = **F_1M_1**; затем на **F_2M** отложим **F_2n** = **F_2M_1** Получившиеся через это отрезки **M*m*** и **M*n*** (обведенные на чертеже жирно) должны быть равны, так как они показывают, насколько, при переходе от точки **M_1** к точке **M**, радиус-вектор **F_1M_1** уменьшается, а радиус-вектор **F_2M_1** увеличивается; но так как сумма радиусов-векторов для обеих точек одна и та же, то увеличение одного из них равняется уменьшению другого.



Черт.11

Возьмем еще на секущей произвольную точку **P** и проведем **P*p*** || **M_1m** и **P*q*** || **M_1n**. Заметив, что четыреугольники **P*p*M*q*** и **M_1mMn** подобны (они состоят из подобных и сходственно расположенных треугольников), мы находим, что **M*p*** = **M*q*.** Теперь вообразим, что точка **M_1** неограниченно приближается к **M**. Посмотрим, как будет изменяться тогда положение начерченных нами прямых. Секущая **MP** будет все более и более приближаться к некоторому предельному положению, именно к касательной к эллипсу в точке **M**; прямые **M_1m** и **M_1n**, уменьшаясь по длине, будут все более и более приближаться к перпендикулярности к радиусам-векторам **F_1M** и **F_2M**, так как углы **F_1** и **F_2** при вершинах равнобедренных треугольников **F_1M_1m** и **F_2M_1n** стремятся к 0° и, следовательно, каждый из углов при основаниях **M_1m** и **M_1n** этих треугольников стремится к 90°. Прямые **P*q*** и **P*p***, будучи параллельными прямым **M_1n** и **M_1m**, стремятся тоже к перпендикулярности к **F_2M** к **F_1M**. В то же время отрезки **P*q*** и **P*p*** остаются всегда равными между собою.

Мы видим таким образом, что когда секущая **M_1M** обратится в касательную **MT** (черт. 12), то прямые **P*q*** и **P*p*** сделаются перпендикулярами к **MF_2** и к **M*p***, причем отрезки **M*q*** и **M*p*** останутся равными. Но тогда тр-к **PM*p*** будет равен тр-ку **PM*q*** и, следовательно, /_ **PM*p*** сделается равным /_ **PM*q***. Таким образом: касательная к эллипсу есть биссектриса угла, смежного с углом, образованным радиусами-векторами, проведенными в точку касания.



Черт.12

Из этого свойства касательной видно, что прямая **MN** (черт. 12), перпендикулярная к касательной в точке касания (такая прямая называется нормалью к кривой в точке касания), делит пополам угол **F_1MF_2**, образованный радиусами-векторами, проведенными из точки касания.

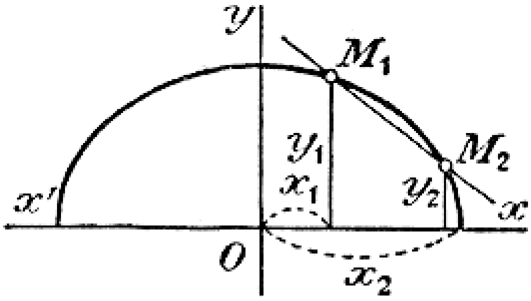
Действительно, так как /_ ***p*MT**= /_ **T_1MF_1** (вертикальные) и /_ ***p*MT**= /_ **TMF_2** (по доказанному), то углы **T_1MF_1** и **TMF_2** равны; но тогда и дополнения их до 90°, т. е. углы **F_1MN** и **NMF_2**, также равны. Поэтому если в одном из фокусов поместим звучащее (или светящееся) тело, то лучи (звука или света), отразившись от вогнутой стороны эллипса (по закону: угол падения равен углу отражения), соберутся в другом фокусе (этим объясняются известные акустические свойства эллипсоидальных помещений).

361. Уравнение касательной.

Пусть **M_1** (x_1, y_1) и **M_2** (x_2, y_2) будут две какие-нибудь точки эллипса (черт. 13). Уравнение секущей, проходящей через эти две точки, будет (§ 352):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

что можно написать и так:



Черт.13

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

Так как точки **M_1** и **M_2** лежат на эллипсе, то координаты их удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \quad \text{т. е.} \quad b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1, \quad „ \quad b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0,$$

т. е.

$$b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0.$$

Отсюда находим:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}$$

Теперь уравнение секущей будет:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}$$

Вообразим теперь, что точка **M_2** приближается все более и более к **M_1** и, наконец сливается с **M_1** . Тогда секущая обратится в касательную к эллипсу в точке **M_1**, а уравнение секущей сделается уравнением касательной Значит, уравнение касательной получится, если в уравнении секущей положим $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2 \cdot 2x_1}{a^2 \cdot 2y_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

т. е.

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -(b^2 x_1 x - b^2 x_1^2),$$

или

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2.$$

Правая часть этого уравнения равна **1** (согласно уравнению эллипса); значит:

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = 1.$$

Таково уравнение касательной, проведенной через точку эллипса, имеющую координаты x_1 и x_2 Этому уравнению удобнее придать другой вид, разделив все его члены на $a^2 b^2$

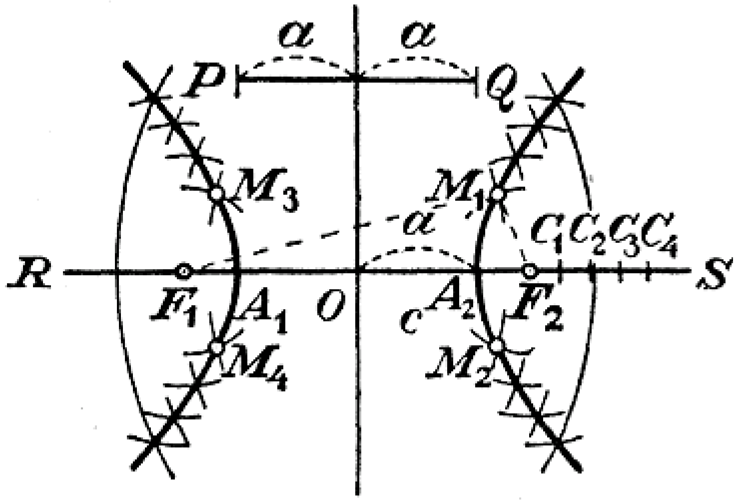
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Глава третья.

Гипербола.

362. Определение и построение. Мы уже раньше встречались с кривой, называемой гиперболой, а именно тогда, когда говорили о графике функции: $y = {}^1/_x$ (отдел 15 глава7 § 348). Теперь мы рассмотрим эту кривую в более общем виде и прежде всего определим ее, как ***геометрическое место таких точек на плоскости, разность расстояний которых от двух данных точек этой плоскости есть величина постоянная.***

Как и для эллипса, две точки (**F$_1$** и **F$_2$** черт. 14), от которых считаются расстояния, называются фокусами, а прямые, соединяющие эти точки о точками гиперболы, называются радиусами-векторами. Данная разность (**PQ**) двух радиусов-векторов, исходящих из какой-нибудь точки гиперболы, обозначается **2*a***, а расстояние между фокусами **2*c***.



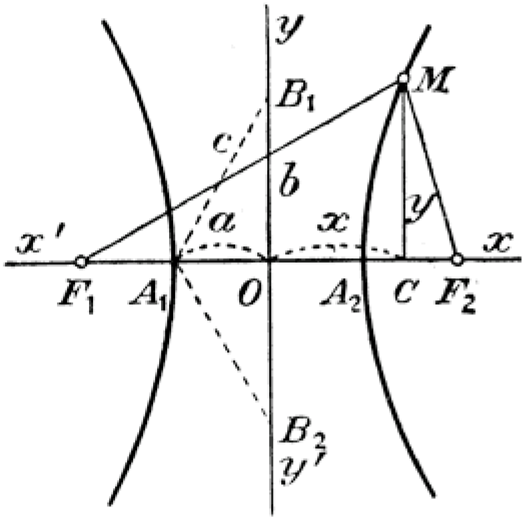
Черт.14

Для возможности существования гиперболы необходимо, чтобы ***a*** было меньше ***c***, так как если **M$_1$** есть одна из точек гиперболы, то из треугольника **F$_1$M$_1$F$_2$** видно, что **F$_1$M$_1$ — M$_1$F$_2$** < **F$_1$F$_2$**, т. е. **2*a*** < **2*c*** и потому ***a*** < ***c***.

Гиперболу всего удобнее строить по точкам таким образом. Пусть фокусы **F$_1$** и **F$_2$** расположены на прямой **RS**. Разделим расстояние **F$_1$F$_2$** пополам в точке **O** (она называется центром гиперболы) и отложим **OA$_1$** = **OA$_2$** = ***a***. Полученные точки **A$_1$** и **A$_2$** принадлежат гиперболе, так как **F$_1$A$_1$** = **F$_2$A$_2$** и потому **A$_1$F$_2$ — A$_1$F$_1$** = **A$_1$F$_2$ — A$_2$F$_2$** = **A$_1$A$_2$** = **2*a***; подобно этому и **A$_2$F$_1$ — A$_2$F$_2$** = **2*a***. Эти две точки называются вершинами, а отрезок **A$_1$A$_2$** = **2*a*** называется осью гиперболы. Возьмем теперь на продолжении **F$_1$F$_2$** какую-нибудь точку **C$_1$**, (направо от **F$_2$**, или налево от **F$_1$** все равно). Дадим циркулю расстворение, равное **A$_1$C$_1$** и этим расстворением опишем две дуги: одну из центра **F$_1$** и другую из центра **F$_2$** . Затем, дав циркулю расстворение, равное **A$_2$C$_1$** из центра **F$_2$** засечем первую дугу в точках **M$_1$** и **M$_2$** , из центра **F$_1$** засечем вторую дугу в точках **M$_3$** и **M$_4$**. Полученные четыре точки принадлежат гиперболе, так как для каждой из них разность радиусов-векторов равна **A$_1$A$_2$** = **2*a***. Беря затем другие произвольные точки **C$_2$**, **C$_3$**... (на продолжение **F$_1$F$_2$**, мы таким же путем построим для каждой из них 4 новых точки. Когда таких точек наберется достаточно много, мы можем обвести непрерывною кривою все те, которые лежат в правой половине чертежа, и все те, которые лежать в левой, тогда получим 2 ветви одной и той же кривой — гиперболы.

Большая или меньшая изогнутость гиперболы зависит от величины отношения $^c/_a$, которое (как и для эллипса) называется эксцентриситетом.

363. Уравнение гиперболы. Предположим; что ось **A$_1$A$_2$** гиперболы лежит на оси ***x***-ов и центр **O** совпадает с началом координат (черт. 15).



Черт.15

Пусть **M** будет произвольная точка гиперболы,имеющая координаты: ***x*** = **OC** и ***y*** =**MC**. Из треугольников **F₁MC** и **F₂MC** находим:

$$\mathbf{MF_1}^2 = \mathbf{MC}^2 + \mathbf{F_1C}^2 = y^2 + (c + x)^2$$

$$\mathbf{MF_2}^2 = \mathbf{MC}^2 + \mathbf{F_2C}^2 = y^2+(c - x)^2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} - \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a$$

Так же, как это мы делали для эллипса (§ 357), можно проверить, что это

уравнение верно для всякой точки гиперболы, как взятой на правой ветви, так и на левой, и расположенной как выше оси ***x***-ов, так и ниже ее (предоставляем самим читателям сделать такую проверку).

Упростим теперь выведенное уравнение совершенно так же, как мы это делали с уравнением эллипса, а именно: перенеся второй радикал в правую часть, возвысим обе части уравнения в квадрат:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + y^2 + (c - x)^2,$$

значит:

$$-4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 + (c - x)^2 - (c + x)^2$$

т е.

$$-a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = a^2 - cx.$$

После вторичного возвышения в квадрат получим:

$$a^2 y^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2)\, x^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

В гиперболе $a^2 < c^2$; поэтому мы можем положить: $c^2 - a^2 = b^2$ и, следовательно, $a^2 - c^2 = - b^2$; тогда уравнение будет:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2 ,$$

или

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Наконец, разделив все члены на a^2b^2, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Заметим, что величина b, равная $\sqrt{c^2 - a^2}$, есть катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна c, другой катет есть a. Построив на чертеже такой треугольник **O** иотложив еще **OB_2=OB_1** мы получим 2 точки **B_1** и **B_2**, которые называются мнимыми вершинами гиперболы; отрезок **B_1B_2** равный **2*b***, называется мнимою (или побочною) осью гиперболы. В отличие от нее ось **A_1A_2** = **2*a*** называется вещественной (или главною) осью.

Если центр гиперболы лежит не в начале координат, а в какой-нибудь точке (***m, n,***) и главная ось параллельна оси ***x***-ов, то уравнение гиперболы будет:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Если же главная ось параллельна оси ***y***-ов, то в уравнениях надо ***x*** заменить на ***y*** и наоборот.

364. Следствия. 1) Так же, как и для эллипса (§ 358), из уравнения гиперболы можно вывести, что эта кривая имеет две оси симметрии, совпадающие с осями координат, и центр симметрии, лежащий в начале координат.

2) Из уравнения гиперболы находим:

$$y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) b^2 = \frac{(x^2 - a^2)\, b^2}{a^2}$$

и, следовательно,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Из этой формулы видно, что гипербола не имеет точек, для которых абсолютная величина абсциссы ***x*** была бы меньше ***a***, Наименьшая абсолютная величина ***x*** есть ***a*** , тогда ***y*** = **0** и ***x* = ± *a***, т. е. тогда получаются вершины гиперболы **A_1(— *a*,0)** и **A_2(*a*,0)**.

3) Из этой же формулы видно, что при неограниченном возрастании абсолютной величины ***x*** возрастает неограниченно и абсолютная величина ***y***. Значит, на гиперболе существуют точки, для которых и абсцисса и ордината как угодно велики; другими

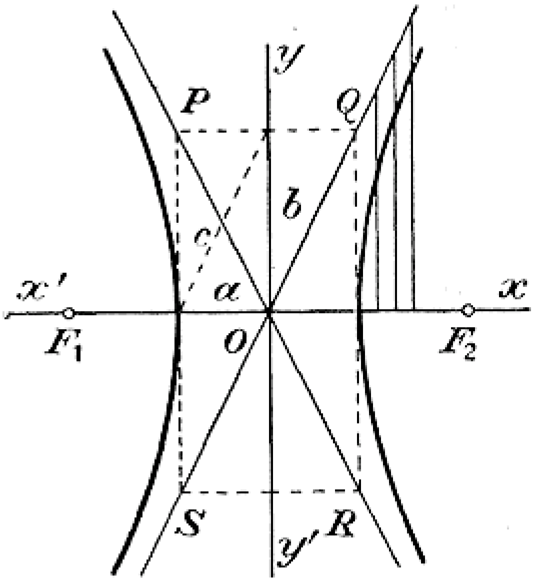
словами, обе ветви гиперболы бесконечно удаляются и от оси y-ов и от оси x-ов.

365. Асимптоты. На чертеже 16-м, на котором изображена гипербола о осями a и b, построим две прямые:

$$y = {}^{b}/_{a}\, x \text{ и } y = —{}^{b}/_{a}\, x.$$

Прямые эти проходят через начало координат и образуют с положительным направлением оси x-ов углы, которых тангенсы равны ${}^{b}/_{a}$ и $—{}^{b}/_{a}$. Значит, эти прямые будут продолженными диагоналями прямоугольника **PQRS**, у которого осязание равно **2*a*** и высота равна **2*b*** и расположенного так, как указано на чертеже.

Сравним между собою ординаты этих прямых с ординатами гиперболы при одним и том же значении абсциссы x. Для простоты ограничимся сравнением ординат только для угла xOy:



Черт.16

$$\text{ордината прямой: } y = \frac{b}{a}x;$$

$$\text{„ гиперболы: } y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Так как $x^2 — a^2 < x^2$, то $\sqrt{x^2 — a^2} < x$; поэтому при одном и том же значении x ордината гиперболы меньше ординаты прямой. Определим разность между ними:

$${}^{b}/_{a}\, x — {}^{b}/_{a}\sqrt{x^2 — a^2} = {}^{b}/_{a}\, (x — \sqrt{x^2 — a^2}\,)$$

При изменении x это выражение изменяется в том же смысле, в каком изменяется разнсть, стоящая внутри скобок (так как множимое — есть число постоянное и положительное). Но в этой разности при возрастании x возрастают одновременно и уменьшаемое x и вычитаемое $\sqrt{x^2 — a^2}$, и мы остаемся в неизвестности, как изменяется сама разность. Поэтому мы преобразуем ее таким образом:

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})\ (x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$
$$= \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Следовательно,

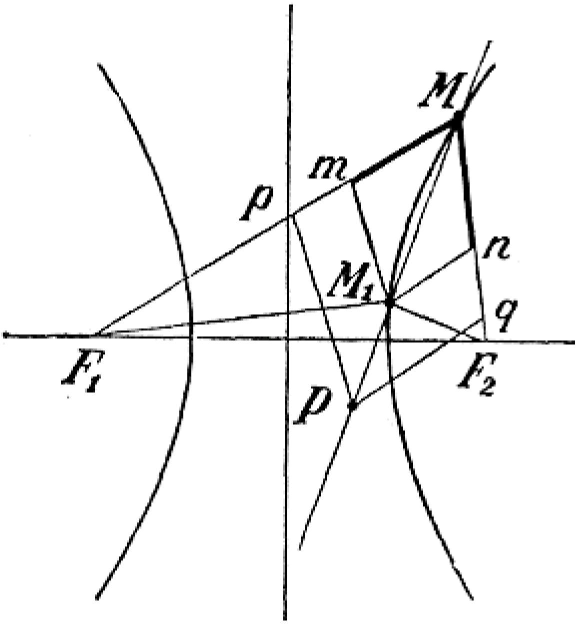
$$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Теперь видно, что при неограниченном возрастаний x знаменатель полученной дроби возрастает неограниченно, тогда как числитель остается неизменным; значит, дробь при этом стремится к нулю. Таким образом, разность между ординатою прямой и ординатою гиперболы (при одном и том же значении x) стремится к нулю, когда абсцисса x неограниченно возрастает; другими словами, ветвь гиперболы по мере возрастания x все более и более приближается к проведенной нами прямой, однако никогда ее не достигает, так как ни при каком значении x (как бы велико оно ни было) разность между ординатами не делается равной нулю.

Сказанное об ординатах, расположенных в угле xOy, может быть повторено и об ординатах, лежащих в других углах. Значит, можем сказать, что прямые; $y = {}^b/_a\, x$ и $y = —{}^b/_a\, x$ служат асимптотами гиперболы.

366. Свойство касательной. Касательная к гиперболе есть биссектриса угла, образованного радиусами-векторами, проведенными в точку касания.

Доказательство такое же, какое было изложено нами для эллипса (§ 360). На чертеже 17 сделано соответствующее построение, причем буквы поставлены те же, что и на черт. 11.



Черт.17

Читатели могут сами проследить все доказательство, прочитывая то, что было изложено для эллипса. Отрезки **M*m*** и **M*n*** равны, так как они показывают, насколько радиусы-векторы увеличились при переходе от точки **M** к точке **M_1**, а эти увеличения должны быть равны, так как разность радиусов-векторов для всех точек гиперболы одна и та же.

Указанное свойстко касательной дает простой способ ее построения, когда точки касания и фокусы заданы.

367. Уравнение касательной. Уравнение секущей и затем уравнение касательной выводится для гиперболы совершенно так же, как это мы делали для эллипса (§ 361); разница только та, что координаты двух точек, через которые проведена секущая, приходится подставлять не в уравнение эллипса, а в уравнение гиперболы, а это уравнение отличается от уравнения эллипса:

эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

только тем, что для гиперболы вместо b^2 берется — b^2. Поэтому и уравнение касательной к гиперболе должно отличаться от уравнения касательной к эллипсу только тем, что вместо b^2 надо подставить — b^2. Тогда уравнения касательных будут:

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

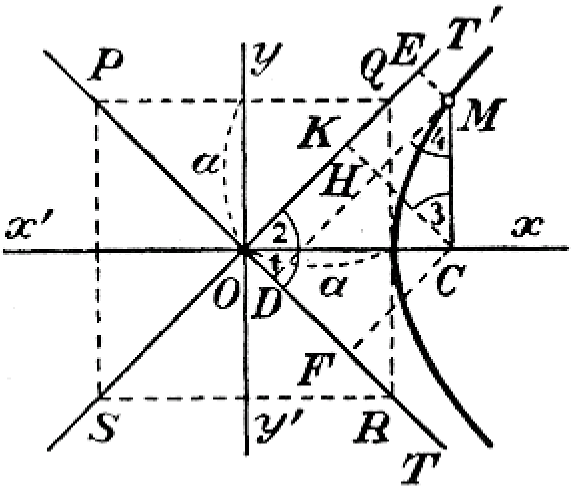
для эллипса для гиперболы

368. Равносторонняя гипербола. Если в уравнении гиперболы положим $a = b$, то оно будет:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1. \text{ или } x^2 — y^2 = a^2$$

Такая гипербола называется равносторонней; она представляет ообою такой же частный случай по отношению к гиперболе, какой окружнооть ($x^2 + y^2 = r^2$) представляет по отношению к эллипсу.

Для такой гиперболы уравнения асимптот будут: $y = x$ и $y = — x$. Значит, асимптотами равносторонней гиперболы служат биссектрисы прямых углов, образованных осями координат, и тогда прямоугольник **PQRS**, которого диагонали лежат на асимптотах, будет квадрат (черт. 18).



Черт.18

Зададимся вопросом, каково будет уравнение гиперболы, если за оси координат примем асимптоты **OT** и **OT'** (на чертеже 18-м мы изобразили часть правой ветви равносторонней гиперболы).

Пусть M есть какая-нибудь точка гиперболы, координаты которой x = **OC** и y = **MC.** Опустим из **M** на **OT** и **OT'** перпендикуляры **MD** и **ME**. Тогда, если примем **OT** за ось x-ов и **OT'** за ось y-ов, то новые координаты будут: x' =**OD**=**ME** и y'=**MD**=**EO**. Определим эти новые координаты как функции от прежних координат.

Для этого проведем еще **CF_|_ OT** и **CK_|_ OT'**. Заметив, что углы, обозначенные на чертеже цифрами **1, 2, 3** и **4**, будут по 45°, мы из чертежа найдем:

$$OD = OF — DF = OF — CH = OC \cos 45° — MC \cos 45°$$

и

$$OE = OK + KE = OK + MH = OC \cos 45° + MC \cos 45°,$$

т. е.

$$x' = x \cos 45° — y \cos 45° = (x — y) \cos 45°$$

и

$$y' = x \cos 45° + y \cos 45° = (x + y) \cos 45°;$$

откуда:

$$x - y = \frac{x'}{\cos 45°}, \quad x + y = \frac{y'}{\cos 45°}.$$

Уравнение равносторонней гиперболы $x^2 — y^2 = a^2$ можно изобразить так:

$(x — y)(x + y) = a^2$ Подставив сюда на место $x — y$ и $x + y$ их значения, найденые сейчас, получим:

$$\frac{x'}{\cos 45°} \cdot \frac{y'}{\cos 45°} = a^2, \text{ или } x'y' = a^2 \cos^2 45°.$$

Но $\cos^2 45° = {}^{1}/_{2}$ значит, новое уравнение будет:

$$x'y' = \frac{1}{2} a^2, \text{ или } y' = \frac{{}^{1}/_{2}\, a^2}{x'}$$

Мы видим теперь, что равносторонняя гипербола есть та самая кривая $y = {}^{a}/_{x}$, которую мы рассматривали прежде (отдел 15 глава 7§ 348), только постоянному числу a надо дать значение ${}^{1}/_{2}\, x^{2}$

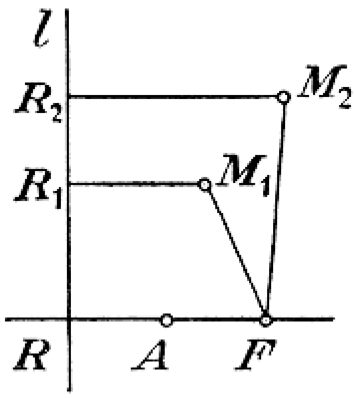
Глава четвертая.

Парабола.

369. Определение и построение. Мы раньше говорили о параболе, как такой кривой, которая служит графиком функции $y = ax^2$ {в частности $y = x^2$) (ч. I, отдел 6 глава 3§ 159). Теперь рассмотрим эту кривую в более общем виде и более подробно.

Параболе мы дадим теперь другое определение: параболой называется ***геометрическое место точек плоскости, из которых каждая одинаково удалена от данной точки (называемой фокусом) и от данной прямой (называемой директрисой).***

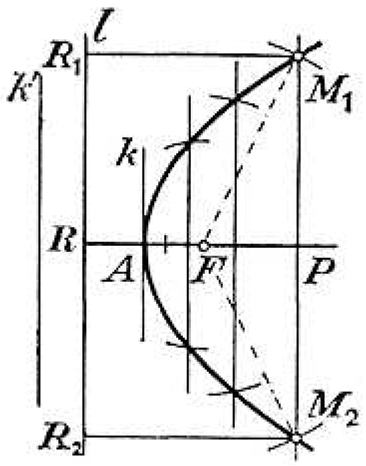
Так, если точка **F** есть фокус (черт.19), прямая ***l*** — директриса, и точки **M_1, M_2,....** взяты на плоскости, проходящей через ***l*** и **F** (на плоскости чертежа), таким образом что **$M_1F = M_1R_1$**, **$M_2F = M_2R_2$**... (где **M_1R_1 _|_** ***l*** и **M_2R_2 _|_** ***l***), то такие точки принадлежат кривой, которую мы будем теперь называть параболой. Мы вскоре увидим, что эта кривая тождественна с той, которую мы прежде так называли.Одна из точек параболы есть **A**, делящая пополам перпендикуляр **FR**, опущенный из **F** на директрису, так как для такой точки **AF=AR**.



Черт.19

Такая точка называется вершиною, а бесконечная прямая, проходящая через **F** и **A**, называется осью параболы. Прямые **M_1F** , **M_2F** ..., соединяющие фокус с точками параболы, называются радиусами-векторами, отрезок **RF**, показывающий расстояние фокуса от директрисы, называется параметром параболы и обозначается обыкновенно буквой ***p***.

Параболу всего удобнее строить по точкам таким образом. Проведем (черт. 20) несколько прямых, параллельных директрисе ***l***. Взяв какую-нибудь одну из них, напр. **M_1M_2**, дадим циркулю расстворение, равное расстоянию **PR** этой параллели от директрисы, и этим расстворением из центра **F** опишем две небольшие дуги, пересекающие взятую параллель в точках **M_1** и **M_2**. Точки эти принадлежат параболе, так как **M_1F=M_2F**= **RP**=**M_1R** = **M_2R**. Подобным же образом на каждой из остальных параллелей мы можем получить по две точки параболы.



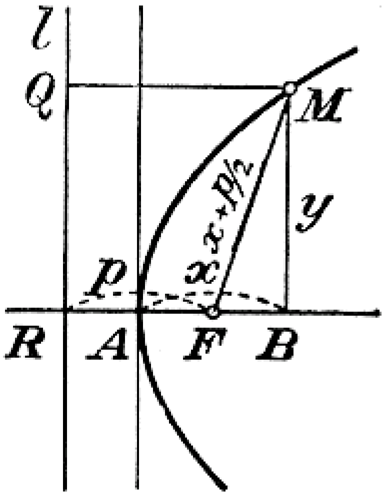
Черт.20

Параллельные прямые можно брать направо от **F** как угодно далеко, так как для пересечения дуги с прямою необходимо и достаточно, чтобы расстояние **FP** от фокуса до прямой было меньше радиуса **RP**, а это всегда будет иметь место, как бы далеко направо от **F** ни была удалена параллельная прямая. Налево же от **F** параллельную прямую можно отодвигать только до крайнего положения, проходящего через вершину **A**, так как точки всякой прямой, параллельной ***l*** и расположенной левее от **A** (напр., точки прямой ***k'***), отстоят от ***l***, очевидно, меньше, чем от **F**.

Когда таким образом мы построим достаточное число точек, их можно все обвести непрерывною кривою, которая и будет парабола.

370. Уравнение параболы.

Пусть **F** будет фокус и ***l*** директриса (черт. 21) и, следовательно, **FR** = ***p***. Возьмем за ось ***x***-ов ось параболы, а за ось ***y***-ов прямую, проходящую через вершину и, следовательно, параллельную директрисе. Пусть **M** есть произвольная точка параболы, у которой абсцисса ***x*** = **AB** и ордината ***y*** =**MB**. Согласно определению параболы, в тр-ке **MBF** гипотенуза **FM = MQ = BR = BA+AR** = $x + {}^{p}/_{2}$, а катеты **MB** = ***y*** и **FB = BA — AF** = $x - {}^{p}/_{2}$. Поэтому:



Черт.21

$$y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}-x^2+px-\frac{p^2}{4}.$$

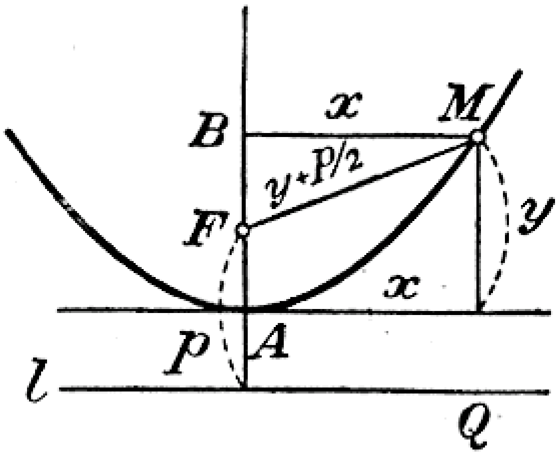
и, следовательно, уравнение параболы будет такое:

$$y^2 = 2px.$$

Если бы с осью параболы совпадала не ось ***x***-ов, как мы сейчас предполагали, а ось ***y***-ов, и вершина попрежнему совпадала бы с началом координат (черт. 22), то тогда директриса ***l*** была бы параллельна оси ***x***-ов, и уравнение было бы иное, а именно, оно отличалось бы от предыдущего уравнения тем, что ***x*** заменен на ***y*** и ***y*** на ***x***, от чего мы получили бы:

$x^2 = 2py$ и, следовательно

$$y = {}^{1}/_{2p}\, x^2$$



Черт.22

То же самое мы нашли бы из чертежа, так как из тр - ка **MBF** видно:

$$x^2=\left(y+\frac{p}{2}\right)^2-\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=y^2+px+\frac{p^2}{4}-y^2+px-\frac{p^2}{4},$$

т. е.

$$x^2=2py \text{ и } y=\frac{1}{2p}x^2.$$

Еоли обозначим дробь ${}^{1}/_{2p}$ буквою ***a***, то уравнение параболы представится тогда так:

$$y = a x^2,$$

а это и есть та функция, которую мы рассматривали прежде (ч. 1,отдел 6 глава 3 § 159). Теперь мы видим, что та кривая, которую мы тогда называли параболой, тождественна с кривой, которую мы теперь назвали параболой, только в прежней параболе осью симметрии служила ось y-ов, а в параболе, рассматриваемой теперь, ось симметрии есть ось x-ов. Чтобы определить положение фокуса и директрисы в параболе $y = a x^2$, надо найти ее параметр p из равенства:

$$^1/_{2p} = a; \text{ откуда р} = {}^1/_{2a}.$$

Значит, фокус лежит на оси y-ов выше начала координат на $^1/_2\, p$, а директриса параллельна оси x-ов и лежит ниже ее на $^1/_2\, p$ (черт. 22).

Если вершина параболы не совпадает с началом координат, а находится в некоторой точке (m, n), и ось параболы параллельна оси x-ов, то уравнение кривой представится в таком виде:

$$(y — n)^2 = 2p (x — m).$$

Если же ось параболы параллельна оси y-ов, то в уравнении надо x заменить на y и наоборот.

371. Следствия. Из уравнения $y^2 = 2px$ видно: 1) отрицательным значениям x не соответствует никакого вещественного значения y это значит, что вся парабола расположена по правую сторону от оси y-ов.

2) При всяком положительном значении x ордината y имеет 2 значения, отличающиеся только знаками: $y = +\sqrt{2px}$ и $y = —\sqrt{2px}$. Значит, всякая прямая, перпендикулярная к оси x-ов и расположенная правее оси y-ов, пересекается с параболой в двух точках, расположенных симметрично относительно оси x-ов, т. е. эта ось есть ось симметрии.

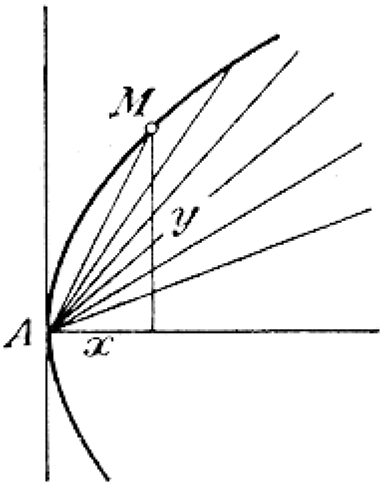
3) При всяком значении ординаты y (как положительном, так и отрицательном) абсцисса x получает определенное значение и только одно: $x = \frac{y^2}{2p}$; значит, всякая прямая, параллельная оси x-ов, пересекается с параболой и только в одной точке. Заметим, что всякая такая прямая называется диаметром параболы.

4) При неограниченном увеличении положительного значения x увеличивается неограниченно и абсолютная величина ординаты y, но увеличивается медленнее, чем абсцисса; так, если абсцисса увеличилась, положим, в 100 раз, то ордината увеличится только в 10 раз.

Замечание. Интересно заметить следующую разницу между параболой и гиперболой. Вообразим, что какая-нибудь точка параболы (напр, точка **M**, черт. 23) соединена прямой с вершиною; тогда тангенс угла, образованного этою прямою с осью ***x***-ов, будет равен:

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2px}}{x}=\sqrt{\frac{2p}{x}}$$

Отсюда видно, что при неограниченном возрастании ***x*** (при продвижении точки **M** все далее и далее направо) тангенс этого угла (следовательно, и самый угол) уменьшается, стремясь к нулю.



Черт.23

В гиперболе тангенс такого угла тоже равен $^{y}/_{x}$, но там это выражение равно:

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x-a}=\frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{a\left(1-\frac{a}{x}\right)}$$

и при неограниченном увеличении ***x*** тангенс рассматриваемого угла стремится к дроби $^{b}/_{a}$ т. е. к тангенсу угла, образованного асимптотой о осью ***Ox*** (что и следует ожидать по свойству асимптоты).

372. Свойство касательной. Касательная к параболе есть биссектриса угла, образованного радиусом-вектором, проведенным из точки касания, и перпендикуляром, опущенным из нее на директрису.

Доказательство вполне уподобляется тому, какое было дано для эллипса и для гиперболы.

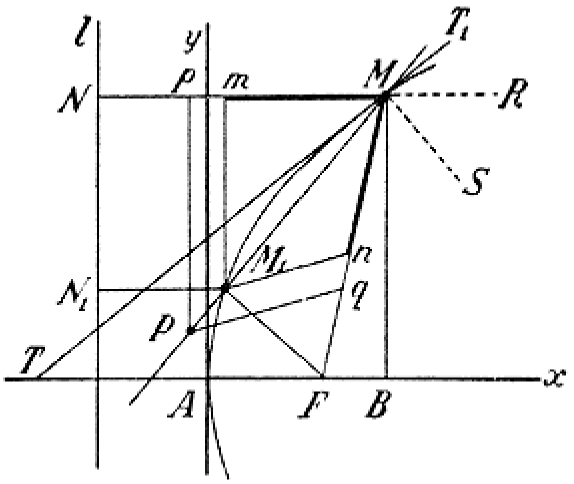
Возьмем на параболе (черт. 24) две произвольные точки **M** и **M₁** проведем через них секущую, радиусы-векторы в перпендикуляры **MN** и **M₁N₁** на директрису ***l***. Затем отложим **F*n*=FM₁** и проведем **M₁*m*** || ***l***. Получившиеся при этом отрезки **M*m*** и **M*n*** (обведенные на чертеже жирно) должны быть равны, так как

MF= MN ; F*n* = FM₁ = M₁N₁ = *m*N

и следовательно:

MF — F*n* = **MN — *m*N**, т. е.

M*n* = M*m*



Черт.24

Возьмем еще на секущей произвольную точку **P** и проведем из нее **P*q*** || **M_1*n*** **и** **P*p*** || ***l*.** Из подобия четыреугольников **P*p*M*q*** и **M_1*m*M*n*** следует, что **M*p* = M*q***.

Допустим теперь, что точка **M_1**неограниченно приближается к **M**. Тогда секущая приближается все ближе и ближе к касательной **MT**, прямая **M_1*n*** приближается все более и более к перпендикулярности к **MF** (что следует из рассмотрения равнобедренного тр-ка **FM_1*n***), а прямая **P*p*** все время остается перпендикулярной к **MN**. Следовательно, когда секущая займет положение касательной **MT**, прямоугольные тр-ки **PM*q*** и **P*p*M** окажутся равными, и углы ***p*MT** и **TM*q*** сделаются равными.

Это свойство дает простой способ проведения касательной, когда точка касания дана.

Проведем еще нормаль **MS** к параболе в точке **M** Так как ∠ **NMT=**∠ **T_1MR** и ∠ **NMT=**∠ **TMF**, то ∠ **T_1MR = ∠ TMF**, поэтому и ∠ **FMS= ∠ SMR**. Таким образом нормаль к параболе, проведенная через какую-нибудь ее точку **M**, делит пополам угол, образованный радиусом-вектором и диаметром, проведенными из этой точки. На этом основано практическое применение параболических зеркал, как прожекторов; если в фокусе такого зеркала поставить источник света, то лучи его, отразившись от зеркала (по закону: угол падения равен углу отражения), пойдут по направлениям, параллельным оси зеркала.

373. Уравнение касательной. Если **M_1** (x_1 , y_1) и **M_2** (x_2 , y_2) две какие-нибудь точки параболы, то уравнение секущей, проходящей через них, есть (§ 352):

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Координаты точек **M_1** и **M_2** должны удовлетворять уравнению пораболы:

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ и } y_2^2 = 2px_2$$

откуда:

$$y_2^2 — y_1^2 = 2p\ (x_2 — x_1)$$

или

$$(y_2 — y_1)\ (y_2 + y_1) = 2p\ (x_2 — x_1)$$

и следовательно,

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2p}{y_2+y_1}.$$

Тогда уравнение секущей можно написать так:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{2p}{y_2+y_1}.$$

Вообразим теперь, что точка **M_2** приближается к **M_1** и, наконец, сливается с ней. Тогда секущая обращается в касательную, и уравнение секущей делается уравнением касательной ($y_2 = y_1$) :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{2p}{2y_1}=\frac{p}{y_1},$$

или

$$y_1 y - y_1^2 = px - px_1$$

Но

$y_1^2 = 2px_1$; следовательно, $y_1 y - 2px_1 = px - px_1$. Откуда:

$$y_1 y = p(x + x_1)$$

374. Следствие. Найдем точку пересечения касательной с осью *x*-ов. Для этого достаточно в уравнения касательной положить $y = 0$ и найти соответствующее значение x. Тогда, получим:

$$0 = p(x + x_1); \qquad x = -x_1$$

Из чертежа 24-го видно, что абсцисса точки пересечения есть — **AT** и x_1 = **AB**; значит, —**AT**=—**AB** и **AT**=**AB**. Таким образом, ***вершина параболы делит пополам под касательную*** (так называется проекция касательной **MN** на ось *x*-ов). Это дает нам другой простой способ проведения касательной, когда точка касания задана.

375. Замечания. 1) Просматривая уравнения, выведенные нами для эллипса, гиперболы и параболы, мы видим, что все они 2-й степени с 2 неизвестными **x** и *y*. Благодаря особому расположению координатных осей, мы получили эти уравнения в упрощенном виде. В подробных курсах аналитической геометрии доказывается, что, во-перых, указанные кривые выражаются уравнениями 2-й степени при всяком расположении координатных осей, и, во-вторых, наоборот, всякое уравнение 2-й степени с 2 неизвестными *x* и *y*, отнесенное к прямоугольным координатным осям, выражает собою вообще какую-нибудь из этих кривых. Поэтому кривые - эллипс, гипербола и парабола - называются кривыми 2-го порядка (т.е. кривыми, выражающимися уравнениями 2-й степени).

2) Доказано, что если боковую поверхность прямого кругового конуса пересечь какою-нибудь плоскостью, то в сечении получится (в зависимости от того, как проведена секущая плоскость) или эллипс (в частности окружность), или парабола или гипербола. Поэтому кривые эти называются также коническими сечениями.

АЛГЕБРА   В НАЧАЛО

ОТДЕЛ СЕМНАДЦАТЫЙ.

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ.

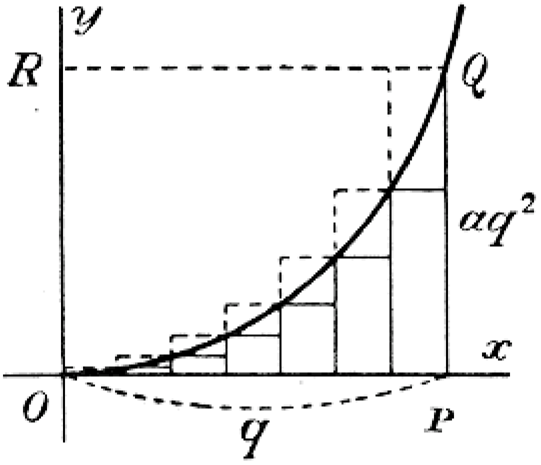
Глава первая. **Нахождение площади, ограниченной дугою параболы,ординатою и абсциссою.**
Глава вторая. **Первообразная функция.**
Глава третья.**Некоторые применения первообразной функции.**

Глава первая.

Нахождение площади, ограниченной дугою параболы, ординатою и абсциссою.

376. Способ 1-й; *посредством нахождения предела суммы бесконечно большою числа слагаемых.*

Пусть требуется найти площадь **S** фигуры (черт.1),ограниченной дугою **OQ** параболы $y = ax^2$, ординатою **PQ** и абсциссою **OP**=q. Для этого разделим абсциссу **OP** на произвольное число n равных частей и из всех точек деления проведем n ординат, которые мы обозначим (слева направо) буквами: y_1 $y_2, y_3,...y_n$ = **PQ**. Этими ординатами площадь **S** разобьется на n полос одинаковой ширины, равной $^1/_n$ **OP**.



Черт.1

Обозначим эту ширину буквой α и площади полос (слева направо) буквами: s_1, s_2, s_3,...s_n. Построим для каждой полосы два прямоугольника, оба с общим основанием α и с высотою: у одного (выходящего), равною ординате, ограничивающей полосу справа, у другого (входящего), равною ординате, ограничивающей полосу слева. Из чертежа видно, что площадь каждой полосы меньше площади соответствующего прямоугольника выходящего, но больше площади соответствующего прямоугольника входящего. Значит:

$$\alpha y_1 > s_1 > 0$$
$$\alpha y_2 > s_2 > \alpha y_1$$
$$\alpha y_3 > s_3 > \alpha y_2$$

....

$$\alpha y_n > s_n > \alpha y_{n-1}$$

Сложив все эти неравенства, получим:

$$\alpha (y_1 + y_2 + ... + y_n) > S > \alpha (y_1 + y_2 + ... + y_{n-1})$$

Разность между крайними частями последнего неравенства равна $\alpha y_n = \alpha \cdot \mathbf{PQ}$; поэтому

$$\alpha (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) - \mathbf{S} < \alpha \cdot \mathbf{PQ}.$$

Вообразим теперь, что мы неограниченно увеличиваем число n полос; тогда $\alpha \to 0$, поэтому и $\alpha \cdot \mathbf{PQ} \to 0$. Значит, из последнего неравенства следует, что:

$$\mathbf{S} = \text{пред. } \alpha (y_1 + y_2 + \ldots + y_n), \text{ если } \alpha \to 0.$$

Остается найти этот предел. Из уравнения параболы $y = ax^2$ находим:

$$y_1 = a\alpha^2, \quad y_2 = a(2\alpha)^2, \quad y_3 = a(3\alpha)^2, \ldots, \quad y_n = a(n\alpha)^2.$$

Значит:

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = a\alpha^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = a\alpha^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(ч. I, отдел 10 глава 1§ 244) и потому

$$S = \text{пред. } a\alpha^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Разобьем α^3 на 3 множителя: $\alpha\alpha\alpha$; из них один отнесем к сомножителю n, другой к сомножителю $n+1$ и третий к сомножителю $2n+1$. Тогда можем написать:

$$S = \text{пред. } a \frac{\alpha n(\alpha n + \alpha)(2\alpha n + \alpha)}{6} = \text{пред. } a \frac{q(q+\alpha)(2q+\alpha)}{6}$$

(так как $\alpha n = q$). Предел произведения равен произведению пределов; поэтому:

$$S = \frac{1}{6} aq \cdot \text{пред. } (q+\alpha) \cdot \text{пред. } (2q+\alpha) =$$
$$= \frac{1}{6} aq \cdot q \cdot 2q = \frac{1}{3} aq^3.$$

Выражение это можно предотавить так:

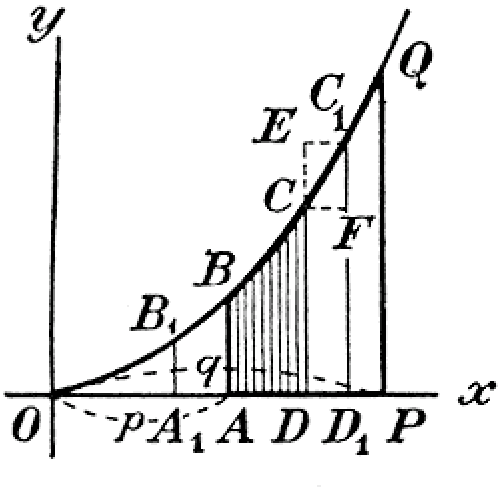
$$S = \frac{1}{3} aq^2 \cdot q = \frac{1}{3} PQ \cdot q$$

Таким образом, площадь рассматриваемой фигуры составляет $^1/_3$ площади прямоугольника **OPQR**, две стороны которого суть абсцисса и ордината, ограничивающие данную площадь; $^2/_3$ этого прямоугольника приходится на площадь фигуры **ORQ**.

377. Способ 2-й: *посредством вспомогательной функции.*

Решим теперь ту же задачу другим приемом, имеющим очень большое значение в математике при нахождении площадей и объемов.

Изменим несколько условие задачи, а именно, допустим, что определяемая площадь не доходит слева до точки **O**, а ограничивается какою-нибудь ординатою **AB** (черт.2), соответствующею абсциссе **OA**= p. Если нам удастся определить эту площадь, то, положив $p = 0$, мы затем найдем и площадь фигуры **OPQ**. Вместо этой площади станем находить площадь фигуры **ABCD** (покрытой на чертеже штрихами), которая справа ограничена подвижной ординатой **CD** могущей перемещаться от крайнего левого положения **AB** до крайнего правого положения **PQ**.



Черт.2

Пусть **OD** = x и **CD** = y. Очевидно, что если x изменяется, то изменяется и площадь **ABCD** (мы ее обозначим буквою z); значит, эта площадь есть некоторая функция от абсциссы x. Если мы эту функцию найдем, то, приняв в ней x = **OP** = q, мы найдем тогда и площадь **ABQP**, а приняв еще $p = 0$, получим площадь **OPQ**. Для нахождения этой функции предварительно разъясним следующее важное свойство ее.

Пусть x = **OD** получит некоторое приращение Δx = **DD$_1$**, тогда площадь z получит приращение Δz, равное площади **DCC$_1$D$_1$** Площадь эта меньше площади прямоугольника **DEC$_1$D$_1$,** но больше площади прямоугольника **DCFD$_1$** поэтому:

$$\Delta x \bullet C_1D_1 > \Delta z > \Delta x \bullet CD$$

откуда:

$$C_1D_1 > {}^{\Delta z}/_{\Delta x} > CD$$

Предположим теперь, что $\Delta z \longrightarrow 0$. Тогда отношение ${}^{\Delta z}/_{\Delta x}$ стремится к пределу, называемому производной z' от функции z, а **C$_1$D$_1$** имеет, очевидно, пределом **CD**. Значит:

$$z' = \text{пред.}{}^{\Delta z}/_{\Delta x} = CD.$$

Мы приходим таким образом к следующему свойству функции z :***площадь* ABCD *есть такая функция от переменной абсциссы* x = OD*, от которой производная равна переменной ординате* y = CD.**

В нашем примере **CD** = ax^2. Поэтому теперь возникает вопрос, нельзя ли найти такую функцию, чтобы ее производная равнялась ax^2. Легко сообразить, что за искомую функцию можно принять одночлен ${}^1/_3\, ax^3$, так как $({}^1/_3\, ax^3)' = {}^1/_3 \bullet 3ax^{3-1} = ax^2$. Но не только ${}^1/_3\, ax^3$ дает производную ax^2, та же производная получается и от функций: ${}^1/_3\, ax^3 +1$, ${}^1/_3\, ax^3 +2$, ..., вообще от функции вида ${}^1/_3\, ax^3 + C$, где **C** означает произвольное постоянное число (положительное или отрицательное). Действительно, так как производная от суммы равна сумме производных от слагаемых и производная от постоянного числа равна нулю, то

$$\left(\frac{1}{3}ax^3 + C\right)' = \left(\frac{1}{3}ax^3\right)' + C = ax^2 + 0 = ax^2.$$

Значит, существует бесчисленное множество функций, от которых производная равна данной функции; все они представляют собою одну и ту же функцию (в нашем случае $\frac{1}{3}ax^3$), к которой прибавлено произвольное постоянное число.

Это же видно и из чертежа 2-го. Если для функции, выражающей площадь **ABCD**, производная равна ординате **CD**, то та же самая ордината **CD** будет служить производной для всякой другой функции, выражающей площадь, которая получится вместо **ABCD**, если ординату **AB** отодвинуть на произвольное расстояние влево от **AB**, или вправо от **AB**, напр., если вместо **ABCD** взять площадь A_1B_1CD. Действительно, будет ли взята площадь **ABCD**, или площадь A_1B_1CD, приращение Δz, соответствующее приращению абсциссы x на $\Delta x = DD_1$, остается то же самое, следовательно, и предел отношения $\Delta z : \Delta x$, когда $\Delta x \longrightarrow 0$ будет тот же самый.

Таким образом, $z = \frac{1}{3}ax^3 + C$. Здесь **C** остается произвольным, пока речь идет только о том, чтобы производная z' равнялась ax^2. Но в нашем вопросе еще требуется, чтобы искомая функция при $x = OA = p$ обратилась в нуль. Тогда число **C** должно получить такое значение, которое удовлетворяет равенству: $\frac{1}{3}ap^3 + C = 0$,
откуда найдем: $C = — \frac{1}{3}ap^3$. Следовательно:

$$z = \frac{1}{3}ax^3 — \frac{1}{3}ap^3$$

Если в этой функции положим $x = OP = q$, то получим:

$$\text{площ. } ABCD = \frac{1}{3}aq^3 — \frac{1}{3}ap^3,$$

и, наконец, если еще допустим, что $p = 0$, то найдем:

$$\text{площ. } OQP = \frac{1}{3}aq^3 = \frac{1}{3}aq^2q = \frac{1}{3}PQ \cdot q,$$

т. е. мы получим ту же формулу, которую нашли раньше другим путем.

Глава вторая.

Первообразная функция.

378. Определение. В предыдущем параграфе нам пришлось решать вопрос: дана некоторая функция (в нашей задаче $y = ax^2$); найти такую другую функцию, чтобы производная от нее равнялась данной функции. ***Функция, от которой производная равна данной функции, называется* первообразной функцией *по отношению к этой данной***. Так, функция $z = \frac{1}{3}ax^3 + C$, которую мы сейчас нашли, есть первообразная по отношению к данной функции $y = ax^2$, так как

$$\left(\frac{1}{3}ax^3 + C\right)' = ax^2.$$

Очевидно, что вопрос о нахождении первообразной функции есть вопрос обратный нахождению производной от данний функции[1]. Решение его основывается на уменьи находить производные. Так, зная, что $(kx^3)' = 3kx^2$, мы соображаем, что первообразная функция от kx^2 есть $^1/_3\,kx^3$.

Подобно этому легко находим:

1) если $z' = x$, то $z = {^1/_2}x^2 + C$

[проверка: $({^1/_2}\,x^2 + C)' = {^1/_2}\ \ 2x^{\,2-1} = x$]

2) если $z' = 3x$, то $z = 3\bullet\ {^1/_2}\,x^2 + C = {^3/_2}\,x^2 + C$

3) если $z' = a\,x$, то $z = a \bullet {^1/_2}\,x^2 + C = {^1/_2}\,ax^2 + C$;

4) если $z' = x^2$, то $z = {^1/_3}\,x^3 + C$;

"5) если $z' = 3x^2 — 2x$, то $z = x^3 — x^2 + C$;

6) если $z' = ax^2 + bx + c$, то $z = {^1/_3}\,ax^3 + {^1/_2}\,bx^2 + cx + C$; и т. п.

Глава третья.

Некоторые применения первообразной функции.

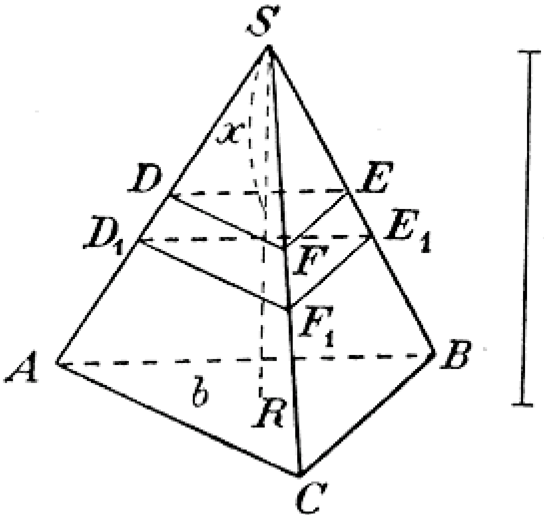
379. Нахождение закона пространства по данному закону скорости. Мы видели (отдел 15 глава 5 § 340), что если при каком-нибудь прямолинейном движении известна функция: $e = f\{t)$, выражающая зависимость пространства e от времени t, в течение которого это пространство проходится, то производная от этой функции выразит скорость движения в зависимости от времени: $f'(t) = v$.Значит, по данному закону пространства мы можем найти закон скорости. Обратно, если известен закон скорости, то мы можем найти закон пространства; стоит только найти первообразную функцию от той, которая выражает закон скорости. Так, при свободном падении тела скорость, как мы знаем, подчиняется закону: $v = gt$; тогда высота, с которой тело падает в течение t секунд, должна быть первообразной функцией от gt, а эта функция есть ${^1/_2}gt^2 + C$. Для определения C положим $t = 0$; тогда высота, соответствующая этому значению времени, должна быть 0, и следовательно, $C = 0$, и потому высота h, проходимая падающим телом в t секунд, выражается формулою $h = {^1/_2}gt^2$.

Подобно этому, при движении тела, брошенного вертикально вверх с начальною скоростью v_0, скорость выражается формулою: $v = v_0 — gt$. Тогда высота, на которую тело подымается в t секунд, должна выразится формулою $h = v_0\,t — {^1/_2}gt^2 + C$, где C надо принимать равным 0, так какими $t = 0$ высота поднятия h также равна 0.

380. Нахождение закона скорости по данному закону ускорения. Мы видели (отдел 15 глава 5 § 343), что если известна функция, выражающая скорость в зависимости от времени: $v = f\ (t)$, то производная от этой функции выразит ускорение w этого движения: $w = f\ (t)$. Значит, наоборот, если известна функция, выражающая зависимость ускорения от времени, то первообразная функция выразит зависимость скорости от времени. Так, при движении тела, брошенного вертикально вверх, ускорение всегда равно $— g$; тогда скорость v должна быть первообразной функцией от$—g$, т. е. $v = — gt + C$. Положив $t = 0$, найдем: $v_0 = C$ и, следовательно, $v = — gt + v_0 = v_0 — gt$.

381. Применение первообразной функции к нахождению объемов. Объем

пирамиды. Первообразной функцией можно пользоваться часто и при нахождении объемов. Приведем этому некоторые примеры.



Черт.3

Начнем с нахождения объема треугольной пирамиды **SABC** (черт. 3), у которой площадь основания **ABC** обозначим буквою b и высоту **SR** буквою h. Проведем в пирамиде сечение **DEF** плоскостью, параллельной основанию и отстоящею от вершины на x единиц. Вместо того чтобы находить объем всей данной пирамиды, станем искать объем только верхней ее части **SDEF**. Если мы найдем этот объем в зависимости от высоты x, то затем легко будет получить объем полной пирамиды, положив $x = h$. Очевидно, что объем **SDEF** есть некоторая функция от высоты **x;**обозначим ее z.

Дадим высоте x приращение Δx, от чего тр-к **DEF** переместится в положение $D_1E_1F_1$. Тогда объем пирамиды получит приращение Δz, равное объему слоя, заключенного между **DEF** и $D_1E_1F_1$. Очевидно, что объем этого слоя больше объема призмы, у которой основание есть тр-к **DEF** и высота Δx, но меньше объема призмы, у которой основание есть тр-к $D_1E_1F_1$ и высота Δx. Но объем призмы равен произведению площади основания на высоту; поэтому:

$$\text{площ. } D_1E_1F_1 \bullet \Delta x > \Delta z > \text{площ. } DEF \bullet \Delta x.$$

откуда:

$$\text{площ. } D_1E_1F_1 > {}^{\Delta z}/_{\Delta x} > \text{площ. } DEF\ .$$

Положим теперь, что $\Delta x \dashrightarrow 0$; тогда ${}^{\Delta z}/_{\Delta x} \dashrightarrow z'$ и площ. $D_1E_1F_1$ --> площ. **DEF**. Значит:

$$z' = \text{площ. } DEF.$$

Из свойства сечений пирамиды, сделанных плоскостями, параллельными основанию, следует:

$$\text{площ. } DEF : \text{площ. } ABC = x^2 : h^2,$$

откуда:

$$\text{площ. } DEF = \text{площ. } ABC \cdot \frac{x^2}{h^2} = \frac{bx^2}{h^2}.$$

Значит:

$$z' = \frac{bx^2}{h^2},$$

и поэтому:

$$z = \frac{b}{h^2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = \frac{bx^3}{3h^2} + C.$$

Если $x = 0$, то объем пирамиды равен **0**; значит, **C** = **0** и потому:

$$z = \frac{bx^3}{3h^2}.$$

Теперь положим, что $x = h$,тогда найдем объем полной пирамиды:

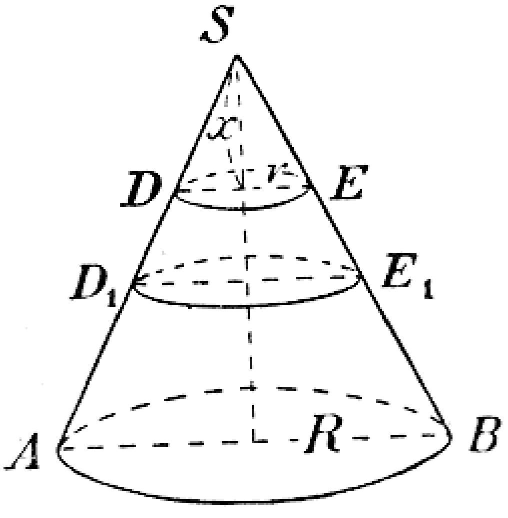
$$\text{объем } SABC = \frac{bh^3}{3h^2} = \frac{1}{3}bh,$$

т. е. ***объем треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

Так как многоугольная пирамида есть сумма объемов треугольных пирамид, то этот вывод относится и к многоугольной пирамиде.

382. Объем конуса определяется так же, как и объем пирамиды.

Пусть в конусе (черт. 4) сделано сечение плоскостью, параллельною основанию, на расстоянии x от вершины **S**. Обозначим радиусы: круга сечения r, основания **R** , высоту конуса **H** и объем отсеченного конуса **SDE** буквою z. Пусть x получит приращение Δx, так что круг **DE** займет положение D_1E_1. Тогда объем z получит приращение Δz, равное объему слоя, заключенного между кругами **DE** и D_1E_1.Объем этот, очевидно, больше объема цилиндра, построенного на круге **DE** как на основании и имеющего высоту Δx, но меньше другого цилиндра, построенного на основании D_1E_1 и имеющего ту же высоту Δx.



Черт.4

Так как объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, то, значит:

$$\text{площ. } DE \cdot \Delta x < \Delta z < \text{пл. } D_1E_1 \cdot \Delta x,$$

откуда:

$$\text{площ. } DE < {}^{\Delta z}/_{\Delta x} < \text{пл. } D_1E_1$$

Предположим теперь, что $\Delta x \longrightarrow 0$; тогда:

$${}^{\Delta z}/_{\Delta x} \longrightarrow z', \text{ а } D_1E_1 \longrightarrow DE$$

Значит:

$$z' = \text{площ. } \mathbf{DE} = \pi r^{2}.$$

Из чертежа видно, что $x : H = r : R$; отсюда находим:

$$r = \frac{Rx}{H} \quad \text{и} \quad z' = \frac{\pi R^2 x^2}{H^2},$$

следовательно,

$$z = \frac{\pi R^2}{H^4} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \frac{\pi R^2 x^3}{3H^2} + C.$$

При $x = 0$ объем z должен равняться также нулю: следовательно, $C = 0$ и потому

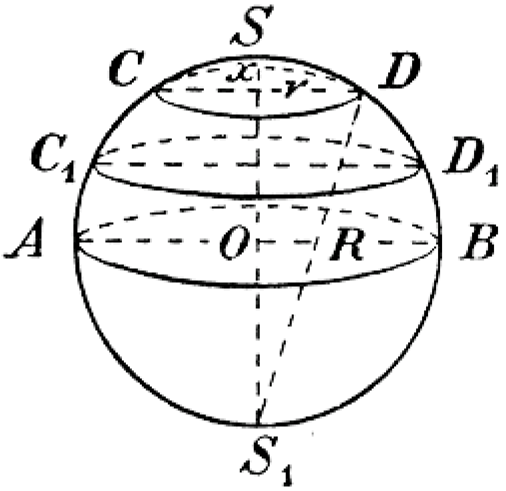
$$z = \frac{\pi R^2 x^3}{3H^2}.$$

Положим теперь $x = H$; тогда найдем:

$$\text{объем конуса } SAB = \frac{\pi R^2 H^3}{3H^2} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

т. е. ***объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

383. Объем шарового сегмента и шара. Пусть в шаре радиуса **R** (черт. 5) проведен произвольный диаметр SS_1 и какою-нибудь плоскостью **CD** перпендикулярною к этому диаметру, сделано в шаре сечение на расстоянии x от конца **S** диаметра SS_1 Плоскость эта отсечет от шара сегмент **SCD**, объем которого обозначим z, а радиус основания r.



Черт. 5

Пусть x получит приращение Δx и круг **CD** займет положение C_1D_1 Тогда объем z получит приращение Δz, равное объему слоя, заключенного между кругами **CD** и C_1D_1 Объем этот больше объема цилиндра, с высотою Δx и основание которого есть круг **CD**, но меньше объема цилиндра с тою же высотою Δx, но с основанием C_1D_1. Следовательно,

$$\text{площ. } \mathbf{CD} \cdot \Delta x < \Delta z < \text{пл. } \mathbf{C_1D_1} \cdot \Delta x,$$

откуда:

$$\text{площ. } \mathbf{CD} < {}^{\Delta z}/_{\Delta x} < \text{пл. } \mathbf{C_1D_1}$$

Если $\Delta x \longrightarrow 0$, то ${}^{\Delta z}/_{\Delta x} \longrightarrow z'$, и площ. $\mathbf{C_1D_1} \longrightarrow$ площ. **CD**.

Значит:

$$z' = \text{площ. } \mathbf{CD} = \pi r^2$$

Если соединим точку **D** прямыми с **S** и $\mathbf{S_1}$, то получим прямоугольный треугольник $\mathbf{DSS_1}$. В этом треугольнике перпендикуляр r, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками гипотенузы, из которых верхний есть x, а нижний $2R — x$. Значит, $r^2 = x\,(2R — x)$ и потому:

$$z' = \pi x\,(2R — x) = 2\pi Rx — \pi x^2.$$

Следовательно,

$$z = 2\pi R \cdot {}^1/_2\, x^2 — \pi \cdot {}^1/_3\, x^3 + C = \pi R\, x^2 — {}^1/_3\, \pi x^3 + C.$$

Так как при $x = 0$ также и $z = 0$, то и $C = 0$; значит:

$$z = \pi R\, x^2 — {}^1/_3\, \pi x^3 = \pi\, x^2 (\, R — {}^1/_3\, x\ \,)$$

Таким образом, ***объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на третью часть высоты сегмента.***

При $x = R$ получим объем полушария, а умножив его на 2, найдем

$$\text{объем шара} = \pi R^2 (R — {}^1/_3\, R) \cdot 2 = {}^4/_3\, \pi R^3.$$

Так как ${}^4/_3\, \pi R^3 = {}^1/_3 \cdot 4\pi R^2 \cdot R$, то можно сказать, что ***объем шара равен одной трети произведения его поверхности на радиус.***

1) Нахождение производных от данных функций называется в математике дифференцированием этих функций, а обратный вопрос — нахождение первообразных функций от данных— называется интегрированием этих данных функций. Сообразно этому дифференциальным исчислением называется отдел математики указывающий способы дифференцирования функций, а интегральным исчислением - отдел, указывающий способы интегрирования функций. В нашей книге дается только краткое понятие об этих отделах.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ВОСЕМНАДЦАТЫЙ.

ДОБАВЛЕНИЯ.

Глава первая.**Однозначность первых четырех алгебраических действий.**
Глава вторая . **Делимость многочлена, целого относительно x на разность $x - a$.**
Глава третья.**Общие формулы решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.**
Глава четвертая. **Извлечение квадратного корня из многочлена.**
Глава пятая. **Преобразование сложного радикала.** $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$
Глава шестая . **Дополнительные сведения о неравенствах.**
Глава седьмая. **Понятие о комплексных числах.**
Глава восьмая. **Некоторые замечания об алгебраических уравнениях. Двухчленное уравнение.**

Глава первая.

Однозначность первых четырех алгебраических действий.

384. Предварительные разъяснения. Как мы говорили прежде (ч. I, отдел 1 глава 4 § 36), два алгебраических выражения называются тождественными, если при всяких численных значениях букв они имеют одну и ту же численную величину. Для обозначения тождественности двух выражений иногда употребляют особый знак (≡), который ставят между тождественными выражениями Напр., пишут:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

желая этим выразить, что произведение $(a + b)(a - b)$ равно разности $a^2 - b^2$ не при каких-либо частных значениях букв a и b, а при всевозможных. Знак этот, впрочем, большею частью заменяется обыкновенным знаком равенства (=).

Все равенства, которые мы выводили в предыдущих главах для преобразования алгебраических выражений, представляют собою тождества, т.е. равенства тождественных выражений. Таковы, напр., равенства:

$m + (a - b + c) = m + a - b + c$ (ч. I, отдел2 глава2 § 48)

$m - (a - b + c) = m - a + b - c$ (ч. I, отдел2 глава2 § 50)

$(a + b - c)(m - n) = am - an + bm - bn - cm + cn$ (ч. I, отдел2 глава3§ 56).

Выводя эти равенства и основанные на них правила алгебраических действий, мы однако не задавались вопросом, однозначны ли эти действия, или многозначны. Напр., мы вывели правило, что для умножения многочлена на многочлен надо умножить каждый член множимого на каждый член множителя и полученные произведения сложить. Таким образом, применив это правило к двум данным многочленам, мы должны получить такой третий многочлен, который при всевозможных численных значениях букв равен произведению данных многочленов при этих значениях букв. Но мы при этом не задавались вопросом, нельзя ли какимнибудьь другим путем найти еще иной многочлен, который также тождественно равнялся бы произведению данных многочленов, а до тех пор, пока мы не решили этого вопроса, мы остаемся в неизвестности, однозначно ли алгебраическое умножение многочленов, или, быть-может, двузначно и даже многозначно. Такой же вопрос возникает и о других алгебраических действиях.

В этой главе мы займемся разрешением указанного вопроса и прежде всего установим признак, по которому можно узнать, когда два многочлена тождественны между собою.

385. Некоторые замечания о многочленах. Во всякое алгебраическое выражение могут входить числа, выраженные цифрами, и числа, выраженные буквами. Последние могут быть двоякого рода: или это постоянные числа, предполагаемые данными, или же это переменные числа, величину которых мы можем произвольно изменять. Постоянные числа обыкновенно обозначаются первыми буквами алфавита (***a, b, c,*** . . .), а числа переменные — последними (***x, y, z,*** . . .)..

Всякий целый многочлен, можно сказать, представляет собою алгебраическую сумму одночленов вида

$$\mathbf{A}\, x^m y^n z^p \dots,$$

где буквы ***x, y, z***... означают произвольные переменные,числа, а коэффициент **A** и показатели степени ***m, n, p***... —какие-нибудь постоянные числа, причем показатели предполагаются числами целыми положительными (в частных случаях некоторые из них и даже все могут быть нулями). Мы будем предполагать что в многочленах, о которых нам придется говорить в этой главе, сделано приведение подобных членов.

Если коэффициенты членов многочлена сделаются равными нулю, кроме какого-нибудь одного, то многочлен обратится в одночлен, так что можно сказать, что одночлен есть частный случай многочлена.

Сумма всех показателей при переменных числах в одночлене называется степенью его, или измерением. Тот член многочлена, которого степень наибольшая, называется высшим членом его, а тот, которого степень наименьшая, называется низшим членом. Степенью самого многочлена называется степень его высшего члена. Если все члены одного измерения, то многочлен называется однородным. Тот член многочлена, который совсем не содержит переменных (иначе сказать, член нулевой степени), называется свободным членом.

Приведем некоторые примеры многочленов:

1) $2x - 5$ двучлен 1-й степени;

2) $x^2 - 3x + 6$ трехчлен 2-й степени;

3) $3x^4 + {}^1/_2\, x^2 - x + 10$ неполный многочлен 4-й степени (не содержит члена с x^3),

4) $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Kx + L$ общий вид многочлена ***m***-й степени, содержащего одно переменное и расположенного по убывающим степеням этого переменного;

5) $x^2 - 3xy + y^2$ однородный трехчлен 2-й степени с двумя переменными;

6) $4xy^2z + x^3 - x^2y - 2xyz + 5x$ многочлен 4-й степени с 3 переменными (не содержит

свободного члена).

386. Лемма. *Если целый многочлен с одним переменным* x (обозначим его для краткости одной буквою **M**):

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}x^m + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + \ldots + \mathbf{K}x$$

не содержит свободною члена, то всегда можно найти такое значение x *не равное нулю, при котором абсолютная величина этого многочлена будет как угодно мала,* т.е. она будет меньше любого положительного числа a, как бы мало последнее ни было.

Доказательство. Очевидно, что абсолютная величина многочлена меньше суммы абсолютной величины всех его членов (или в крайнем случае равна ей). С другой стороны, если для x будем брать положительные числа, меньшие 1, то

$$x^2 < x, \quad x^3 < x, \quad x^4 < x; \quad \text{и т. д.}$$

Поэтому, обозначив абсолютные величины чисел **M, A, B, C**...и x буквами: **M', A', B', C'**...и x', мы можем написать:

$$\mathbf{M'} \leq \mathbf{A'}x' + \mathbf{B'}x' + \mathbf{C}x' + \ldots + \mathbf{K'}x' \text{, т. е.}$$

$$\mathbf{M'} \leq (\mathbf{A'} + \mathbf{B'} + \mathbf{C'} + \ldots + \mathbf{K'})\, x' \quad (\text{при } x' < \mathbf{1}).$$

Из этого неравенства видно, что если для x' возьмем какое- нибудь положительное число, которое, будучи меньше 1, в то же время и меньше частного $a : (\mathbf{A'} + \mathbf{B'} + \mathbf{C'} + \ldots + \mathbf{K'})$, то тогда **M'** сделается меньше a, что и требовалось доказать.

Напр., многочлен $x^4 — 3x^3 + x^2 — 2x$ сделается по абсолютной величине меньше 0,000001, если для x возьмем какое-нибудь положительное число, меньшее частного 0,000001: (**1 + 3 +1 + 2**), т. е. меньше $^1/_7$ миллионной.

387. Теорема. *Для того чтобы целый многочлен тождественно равнялся нулю* (т. е. равнялся нулю при всяких численных значениях переменных), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты всех его членов были нули.*

Доказательство. Сначала докажем эту теорему для многочлена **M** с одним переменным:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}x^m + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + \ldots + \mathbf{K}x + \mathbf{L}.$$

1) Необходимость признака. Предположим, что **M=0** при всяких значениях x; покажем, что тогда коэффиценты всех его членов (и свободный член **L**) должны быть нули. Если **M=0** при всяких значениях x, то **M =0** и при $x = \mathbf{0}$. Но при этом значении x многочлен **M** обращается в **L;** значит, тогда **L = 0**. Теперь данный многочлен можно представить так:

$$\mathbf{M} = x(\mathbf{A}x^m + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + \ldots + \mathbf{I}x + \mathbf{K})$$

или

$$\mathbf{M} = x(\,\mathbf{N} + \mathbf{K}\,)$$

если положим:

$$\mathbf{N}= \mathbf{A}x^{m} + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + ... + \mathbf{I}x$$

Так как **M = 0** при всяких значениях ***x***, то **M = 0** и при всех значениях ***x***, отличных от нуля. Но при таких значениях произведение ***x***(**N + K**) может равняться нулю только тогда, когда **N + K = 0**. Это возможно только тогда, когда **K = 0**. В самом деле, допустим временно, что **K =/= 0**. Тогда, согласно доказанной выше лемме, можно для ***x*** найти такое значение (отличное от нуля), при котором абсолютная величина многочлена **N**, не содержащего свободного члена сделается меньше абсолютной величины **K**; при таком значении ***x*** алгебраическая сумма **N + K**, очевидно, не может равняться нулю. Значит, необходимо, чтобы **K=0**. Представив теперь данный многочлен так:

$$\mathbf{M} = x^{2} (\mathbf{A}x^{m-2} + \mathbf{B}x^{m-3} + ... + \mathbf{I})$$

мы таким же путем докажем, что **I=0** и т. д., т. е. окажется, что все коэффициенты должны быть нули.

2) Достаточность признака. Пусть все коэффициенты будут нули; тогда при всяком значении ***x*** каждый член многочлена равен нулю, и поэтому **M = 0**.

Докажем теперь теорему для многочлена с 2 переменными ***x*** и ***y***. Расположим его члены по убывающим степеням одного какого-нибудь переменного, напр., ***x***; тогда многочлен будет иметь вид:

$$\mathbf{A}x^{m} + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + ... + \mathbf{K}x + \mathbf{L} \qquad (1)$$

где буквы **A, B, C... L** означают некоторые многочлены (или одночлены), содержащие переменное ***y***, причем коэффициенты этих многочленов принадлежат к коэффициентам данного многочлена[1)]. Дадим теперь переменному ***y*** какое-нибудь частное значение, y_0. Тогда коэффициенты **A, B C**,... получат некоторые частные значения, которые мы обозначим $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{B_0}$, $\mathbf{C_0}$...$\mathbf{L_0}$, и многочлен будет:

$$\mathbf{A_0}x^{m} + \mathbf{B_0}x^{m-1} + \mathbf{C_0}x^{m-2} + ... + \mathbf{L_0} \qquad (2) :$$

Допустим, что многочлен (1) обращается в нуль при всевозможных значениях ***x*** и ***y***; но тогда он обращается в нуль при $y = y_0$ и любом значении ***x***. Значит, многочлен (2) обращается в **0** при всяком значении ***x***. Поэтому, по доказанному выше, $\mathbf{A_0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B_0} = \mathbf{0}$, ... $\mathbf{L_0} = \mathbf{0}$. Но так как y_0 мы взяли произвольно, то многочлены **A, B, C... L** (с одним переменным ***y***) должны быть равны **0** при всяком значении ***y***, а для этого нужно, чтобы все ; коэффициенты этих многочленов были нули. Но коэффициенты эти служат также и коэффициентами данного многочлена; значит, последние должны быть нули.

Достаточность признака очевидна сама собою.

После этого тем же приемом докажем теорему и для 3 переменных, потом для 4 и т. д,

Теперь мы можем легко установить следующий закон тождества многочленов.

388. Теорема. *Для того, чтобы два целых многочлена были тождественны, необходимо и достаточно, чтобы они ничем не различались друг от друга, кроме порядка их членов.*

Доказательство. Сначала докажем теорему для многочленов с одним переменным. Пусть нам дано тождество:

$$\mathbf{A}x^{m} + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + \dots + \mathbf{K}x + \mathbf{L} = \mathbf{P}x^{n} + \mathbf{Q}x^{n-1} + \dots + \mathbf{R}x + \mathbf{S}$$

Предположим, что m не равно n; допустим, напр., что $m = n + 2$. Тогда можно написать:

$$\mathbf{A}x^{n+2} + \mathbf{B}x^{n+1} + \mathbf{C}x^{n} + \dots + \mathbf{K}x + \mathbf{L} = \mathbf{P}x^{n} + \mathbf{Q}x^{n-1} + \dots + \mathbf{R}x + \mathbf{S}$$

Если эти два многочлена равны друг другу при всяком значении x, то их разность тождественно равна, нулю; значит;

$$\mathbf{A}x^{n+2} + \mathbf{B}x^{n+1} + (\mathbf{C} — \mathbf{P})x^{n} + (\mathbf{D} — \mathbf{Q})x^{n-1} + \dots + (\mathbf{L} — \mathbf{S}) = \mathbf{0}.$$

Для этого, согласно предыдущей теореме, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{A = 0, B = 0, C = P, D = Q, \dots L = S}$. Но тогда эти многочлены ничем не различаются (кроме, быть может, порядка их членов).

Таким же путем можно доказать теорему и для нескольких

переменных.

389. Однозначность алгебраического сложения, вычитания и умножения многочленов. Докажем однозначность для какого-нибудь одного из этих трех действий, напр., для умножения; для других действий можно повторить то же самое.

Положим, что умножая многочлены **M** и **N** по известному правилу умножения многочленов, мы получили некоторый многочлен **P**. Допустим теперь, что каким-нибудь другим путем можно получить еще иной многочлен **P'**, также тождественно равный произведению **MN**. Так как оба многочлена **P** и **P'** тождественны одному и тому же произведению **MN**, то, очевидно, они должны быть тождественны и между собою, а для этого, согласно закону тождества, необходимо и достаточно, чтобы **P** и **P'** ничем друг от друга не различались (кроме порядка их членов), т. е чтобы эти многочлены представляли собою в сущности один и тот же многочлен. Значит, алгебраическое умножение есть дейотвие однозначное.

То же рассуждение можно применить к сложению и вычитанию.

Докажем теперь и однозначность деления многочленов.

390. Однозначность алгебраического деления многочленов. *Под делением многочлена **M** на другой многочлен **N** в общем случае разумеют нахождение таких двух многочленов **Q** (частное) и **R** (остаток), которые удовлетворяли бы тождеству:*

$$M = NQ + R,$$

*причем степень остатка **R** была бы ниже степени делителя **N***

Если степень делителя **N** не выше степени делимого **M**, то такое деление возможно, как это видно из способа деления многочленов, указанного в отдел2 глава 4§ 70 (часть I). Если окажется, что **R** есть нуль, то это будет деление без остатка; и тогда деление есть действие (обратное умножению), посредством которого по данному произведению (делимому) и одному из сомножителей (делителю) отыскивается другой сомножитель (частное). Если же **R** =/= **0**, то это будет деление с остатком (аналогичное делению с остатком одного целого числа на другое). Покажем теперь, что деление с остатком и деление без остатка суть действия однозначные.

Предположим, что помимо многочленов **Q** и **R** (найденных так, как это описано в отдел2 глава 4§ 70, ч. I) существуют еще многочлены **Q'** и **R'** также удовлетворяющие тождеству:

$$\mathbf{M}= \mathbf{NQ'} + \mathbf{R'}$$

Тогда мы будем иметь тождество:

$$\mathbf{NQ} + \mathbf{R} = \mathbf{NQ'} + \mathbf{R'}$$

откуда:

$$\mathbf{NQ}—\mathbf{NQ'}=\mathbf{R'} — \mathbf{R} \qquad \text{т.е. } \mathbf{N(Q} — \mathbf{Q')} = \mathbf{R'}—\mathbf{R}.$$

Последнее тождество возможно только тогда, когда многочлены **Q'** и **R'** не отличаются соответственно от многочленов **Q** и **R**. В самом деле, если бы многочлен **Q'** разнился от многочлена **Q**, то тогда левая часть последнего тождества, по раскрытии скобок, представляла бы собою некоторый многочлен степени не ниже степени **N**, тогда как правая часть этого тождества была бы многочленом степени, ниже степени **N** (так как, по определению делениz, степень **R** и спепень **R'** ниже степени **N**); а два многочлена разных степеней не могут быть тождественными, как это следует из закона тождества. Итак многочлены **Q** и **Q'** не могут быть различными; но тогда левая часть тождества равна нулю; потому и правая часть его равна нулю, следовательно и **R** не может разниться от **R'**. Таким образом, частное может быть только одно, и остаток может быть только один, т. е. деление есть тоже действие однозначное.

Заметим, что когда деление **M** на **N** совершается без остатка (**R =0**), то говорят просто, что **M** делится на **N**

Глава вторая

Делимость многочлена, целого относительно *x* на разность *x* — *a*.

391. Теорема. *Многочлен, целый относительно* ***x*** *(и расположенный по убывающим степеням этой буквы)*

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}x^{m} + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + ... + \mathbf{K}.$$

при делении на разность ***x — a*** *(где* ***a*** *есть произвольное число, положительное или отрицательное) дает остаток*

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}a^{m} + \mathbf{B}a^{m-1} + \mathbf{C}a^{m-2} + ... + \mathbf{K}$$

равный тому значению делимого, которое оно получает при ***x = a****.*

Доказательство. Пусть от деления **M** на ***x — a*** получается некоторое частное **Q** и некоторый остаток **R**. Так как, по определению деления, степень остатка **R** должна быть ниже степени делителя ***x — a***, а этот делитель 1-й степени, то степень **R** должна равняться нулю, т. е. **R** не содержит в себе ***x***. Заметив это, возьмем тождество:

$$\mathbf{M} = (x — a)\mathbf{Q} + \mathbf{R},$$

которому, согласно определению деления, должны удовлетворять **Q** и **R**. Если это равенство есть тождество, то это значит, что оно верно при всевозможных значениях ***x***, а потому оно должно быть верно и при ***x = a***. Но при ***x = a*** оно дает:

$$\mathbf{M' = (a — a)Q' + R},$$

если буквами **M'** и **Q'** обозначим те значения **M** и **Q**, которые эти многочлены принимают при ***x* — *a*** (остаток **R**, как не содержащий вовсе ***x***, не изменится от подстановки ***a*** на место ***x***).

Так как при ***x* = *a*** произведение (***x* — *a***)**Q** обращается в **0 • Q**, что равно **0**, то последнее равенство дает: **M' = R**, т. е.

$$\mathbf{R = Aa^{m} + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + ... + K},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Так как ***x* + *a*** = ***x*** — (— ***a***), то, применяя доказанную теорему к сумме ***x* + *a***, найдем: *многочлен* $\mathbf{A}x^{m} + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + ... + \mathbf{K}$ *при делении на сумму* ***x* + *a*** *дает в остатке число, равное* $\mathbf{A}(—a)^{m} + \mathbf{B}(—a)^{m-1} + ... + \mathbf{K}$, *т. е. число, равное тому значению делимого, которое оно получает при* ***x* = — *a***

Примеры. 1) Многочлен $x^{5} — 3x^{2} + 5x — 1$ при делении на ***x* — *2*** дает остаток, равный $2^{5} — 3•2^{2} + 5•2 — 1= 29$.

2) Многочлен $x^{5} — 3x^{2} + 5x — 1$ при делении на ***x* + *2*** дает остаток: $(—2)^{5} — 3•(—2)^{2} + 5• (—2) — 1= — 53$.

392. Теорема. *Для того, чтобы многочлен* $Ax^{m} + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + K$ *делился на разность* ***x* — *a***, *необходимо и достаточно, чтобы при* ***x* — *a*** *он обращался в нуль.*

Доказательство. Это необходимо, так как если указанный многочлен делится на ***x* — *a***, то остаток от деления должен быть **0** , а этот остаток по доказанному выше, есть то значение делимого, которое оно принимает при ***x* = *a***. Это достаточно, так как если многочлен обращается в **0** при ***x* = *a***, то это значит, что остаток от деления этого многочлена на ***x* — *a*** равен **0**.

Следствие. *Для того, чтобы многочлен* $Ax^{m} + Bx^{m-1} + ... + K$ *делился на сумму* ***x* + *a***, *необходимо и достаточно, чтобы при* ***x* = — *a*** *он обращался в* **0**, так как сумма ***x* + *a*** есть разность ***x*** — (— ***a***).

Примеры. 1) Многочлен $x^{3} — 4x^{2} + 9$ делится на ***x* — 3**, потому что $3^{3} — 4•3^{2} + 9=0$

2) Многочлен $2x^{2} + x — 45$ делится на ***x* + *5***, так как $2•(— 5)^{2} + (— 5) — 45= 0.$

393. Теорема. *Зная один корень алгебраического уравнения:*

$$Ax^{m} + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + K= 0,$$

мы можем понизить степень этого уравнения на **1**.

Действительно допустим, что каким-нибудь путем (напр., просто догадкой) мы нашли один корень ***x* = *a***. Это значит, что многочлен, стоящий в левой части уравнения, обращается в **0** при ***x* = *a***. Но тогда этот многочлен делится на ***x* — *a***. Сделав это деление, мы получим в частном некоторый многочлен **Q** степени ***m* — 1**. Теперь данное, уравнение можно представить так:

$$Q(x — a) = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется только теми значениями x, при которых либо $x — a$ равно **0**, либо **Q** равно **0**. Приняв, что $x—a = 0$, мы получим ранее найденный корень, если же допустим, что **Q=0**, то будем иметь уравнение, степень которого на **1** ниже степени данного уравнения.

394. Некоторые особые случаи деления двучленов. 1) *Разность одинаковых степеней двух чисел делится на разность тех же чисел,*

так как $x^m — a^m$ при делении на $x — a$ дает остаток $a^m — a^m$, т. е. **0**.

2) *Сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел,*

так как $x^m + a^m$ при делении на $x — a$ дает остаток $a^m + a^m = 2a^m$, а не **0**.

3) *Разность одинаковых четных степеней двух чисел делится, а нечетных не делится на сумму этих чисел,*

так как при делении разности $x^m — a^m$ на $x + a$ остаток равен $(— a^m) — a^m$, что при m четном равно нулю, а при m нечетном составляет $—2a^m$.

4) *Сумма одинаковых нечетных степеней двух чисел делится, а четных не делится на сумму этих чисел,*

так как при делении суммы $x^m + a^m$ на $x + a$ остаток равен $(— a^m) + a^m$, что при m нечетном равно **0**, а при m четном составляет $2a^m$.

Примеры. 1) $x^1 + a^1$ делится на $x + a$, но не делится на $x — a$;

2) $x^2 — a^2$ делится и на $x — a$, и на $x + a$;

3) $x^2 + a^2$ не делится ни на $x — a$, ни на $x + a$

4) $x^3 — a^3$ делится на $x — a$, но не делится на $x + a$

5) $x^3 + a^3$ делится на $x + a$, но не делится на $x — a$;.

Замечание. Разность $x^m — a^m$ при m четном делится и на $x — a$, и на $x + a$; в таком случае эта разность должна делиться на произведение $(x — a) (x + a)$, т. е. на $x^2 — a^2$. И действительно, представив разность $x^{2n} — a^{2n}$ в таком виде: $(x^2)^n — (a^2)^n$, мы замечаем, что это есть разность одинаковых степеней чисел x^2 и a^2; следовательно, она должна делиться на разнисть этих чисел, т. е. на $x^2 — a^2$. Так,

$$x^4 — a^4 = (x^2 — a^2) (x^2 + a^2), \quad x^6 — a^6 = (x^2 — a^2) (x^4 + a^2x^2 + a^4) \text{ и т. п.}$$

395. Частные, получаемые при делении $x^m \pm a^m$ на $x \pm a$. Из рассмотрения процесса деления:

$$\begin{array}{ll|l}
 & x^m - a^m & x - a \\ \cline{3-3}
 & ,,\ + ax^{m-1} & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} \\ \cline{2-2}
\text{1-й ост. . . . .} & ax^{m-1} - a^m & \\
 & ,,\ + a^2x^{m-2} & \\ \cline{2-2}
\text{2-й ост. . . . .} & a^2x^{m-2} - a^m & \\
 & ,,\ + a^3x^{m-3} & \\ \cline{2-2}
\text{3-й ост. . . . .} & a^3x^{m-3} - a^m & \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\
\text{(}m\text{-1)-й ост. . . .} & a^{m-1}x - a^m & \\
m\text{-й ост. . . .} & a^m - a^m = 0. &
\end{array}$$

замечаем, что многочлен, получившийся в частном, содержит ***m*** членов; сумма показателей в каждом члене при ***a*** и ***x*** одна и та же, именно ***m* — 1**; показатели ***x*** идут, уменьшаясь на **1**, от ***m* — 1** до **0**, показатели же ***a*** идут, увеличиваясь на **1**, от **0** до ***m* — 1**; коэффициенты у всех членов равны **1**; знаки все +; число членов в частном ***m***. Заметив это, можем прямо пиоать:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3);$$
$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$$

и т. п.

Чтобы получить частное от деления $x^m - a^m$ на $x + a$ при ***m*** четном или при делении $x^m + a^m$ на $x + a$ при ***m*** нечетном, достаточно в полученном выше частном заменить ***a*** на — ***a***. Таким образом:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x + a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3);$$
$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$$

и т. п.

Глава третья.

Общие формулы решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

396. Общие формулы. Систему 2 уравнений 1 степени с 2 неизвестными мы можем в общем виде изобразить так (ч. 1, отдел 5 глава 1 § 138):

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

Решим эту систему, предполагая, что ни один из 4 коэффициентов ***a, b, a', b'*** не равен нулю. Применим, например, способ сложения или вычитания.

Умножив члены первого уравнения на ***b'***, а члены второго на ***b***, вычтем второе уравнение из первого:

$$\begin{array}{r} ab'x + bb'y = cb' \\ -a'bx - bb'y = -c'b \\ \hline (ab' - a'b)x = cb' - c'b' \end{array} \qquad x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$$

Умножив члены первого уравнения на ***a'*** , а второго на ***a*** вычтем уравнения почленно:

$$\begin{array}{r} aa'x + ba'y = ca' \\ -aa'x - b'ay = -c'a \\ \hline (ba' - b'a)\,y = ca' - c'a \end{array} \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ba' - b'a}$$

Знаменателей обеих формул можно сделать одинаковыми, если оба члена дроби, полученной для ***y***, умножим на —**1**; тогда получим следующие общие формулы:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Полезно запомнить, как можно составить формулы для неизвестных, не прибегая каждый раз к их выводу. Знаменатель ***ab' — a'b***, одинаковый для обеих формул, составлен из коэффициентов:

перемножением их крест-накрест, причем одно произведение взято с + , другое с —. Числители формул получаются из знаменателя заменою в нем коэффициентов определяемого неизвестного соответственно свободными членами ***c*** и ***c'*.** Чтобы получить, например, числителя формулы ***x***, надо в знаменателе ***ab' — a'b*** заменить иксовы коэффициенты ***a*** и ***a'*** соответственно на ***c*** и ***c'***; от этого получим: ***cb' — c'b***.

397. Исследование общих формул. Рассмотрим особо следующие 2 случая:

I. Обший знаменатель ***ab' — a'b*** не равен нулю.

В этом случае для каждого неизвестного получается единственное решение, которое может быть положительным, отрицательным и равным нулю. О значении этих решений здесь может быть сказано то же самое, что говорилось при исследовании одного уравнения с одним неизвестным (ч. I, отдел 4 глава 2 §§ 126, 127 и 128).

II. Обший знаменатель ***ab' — a'b*** равен нулю. Докажем, что тогда;

а) Если одно неизвестное представляется под видом $^{\mathbf{0}}/_{\mathbf{0}}$, то и другое неизвестное представляется под тем же видом.

Пусть, например, ***x*** = $^{\mathbf{0}}/_{\mathbf{0}}$. Для этого нужно, чтобы

$$cb' = c'b$$
$$ab' = a'b.$$

Перемножив эти два равенства крест-накрест, найдем:

$$cb'\,a'b = c'bab'\,; \quad \text{откуда:} \quad cb'\,a'b - c'bab' = 0, \text{ или } \quad bb'(a'c - ac') = 0.$$

Так как числа ***b*** и ***b'***, по предположению, не равны нулю, то последнее равенство возможно только тогда, когда $a'c - ac' = 0$; но тогда и $y = {}^0/_0$.

Также, если допустим, что $y = {}^0/_0$, т. е. $ac' = a'c$ и $ab' - a'b$, то, перемножив эти равенства крест-накрест найдем: $ac'a'b=a'cab'$, откуда $aa'\ (c'b - cb') = 0$. Так как числа a и a' мы предположили не равными 0, то последнее равенство дает: $c'b - cb' = 0$, а тогда и $x = {}^0/_0$.

б) Если одно неизвестное представляется под видом ${}^m/_0$, где m =/= 0, то и другое неизвестное представляется под видом ${}^n/_0$, где n =/= 0. Действительно, если бы оно приняло вид ${}^0/_0$, то и первое неизвестное, по доказанному, имело бы тот же вид, а мы предположили, что этого нет.

Решения: $x = {}^0/_0$ и $y = {}^0/_0$ означают неопределенность задачи.

Действительно, умножив все члены первого уравнения на b' а члены второго на b (что можно сделать, так как числа b и b' по предположению, не равны 0), получим:

$$ab'x + bb'y = cb'$$
$$a'bx + b'by = c'b$$

Если $x = {}^0/_0$ и $y = {}^0/_0$, то $ab' = a'b$, $cb' = c'b$; тогда эти два уравнения представляют собою одно уравнение с 2 неизвестными; а в этом случае неизвестные могут иметь бесчисленное множество значений.

Решения: $x = {}^m/_0$ и $y = {}^n/_0$ означают несовместность уравнений. В самом деле, если $ab' = a'b$, а cb' =/= $c'b$ то левые части последних уравнений имеют одинаковые численные величины, а правые — разные; значит, эти уравнения несовместны, и задача невозможна.

Из сказанного заключаем: система двух уравнений первой степени с 2 неизвестными допускает или одно определенное решение, или бесчисленное множество решений, или же ни одного решения.

398. Случай, когда некоторые из коэффициентов равны нулю. В этом случае не следует полагаться на общие формулы (выведенные в предположении, что ни один из коэффициентов a, b, a' и b' не равен нулю), а должно подвергать каждый случай особому исследованию. Положим, например, что оба коэффициента при одном и том же неизвестном равны нулю. Пусть $b = b' = 0$; тогда $ab' - a'b = 0$ и $cb' - c'b = 0$, и общие формулы дают $x = {}^0/_0$, $y = {}^m/_0$ или ${}^0/_0$, смотря по тому, будет ли ac' не равно или равно $a'c$. Уравнения же в этом случае дают:

$$\begin{cases} ax + 0\cdot y = c \\ a'x + 0\cdot y = c' \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x = \dfrac{c}{a} \\ x = \dfrac{c'}{a'} \end{cases}$$

Если ac' не равно $a'c$, то ${}^c/_a$ не равно ${}^{c'}/_{a'}$, и уравнения невозможны, потому что для x получаются два различные значения; между тем в этом случае формулы для неизвестных дают $x = {}^0/_0$, $y = {}^m/_0$. Если же $ac' = a'c$, то ${}^c/_a = {}^{c'}/_{a'}$ тогда для x получается определенное решение, а y может иметь всевозможные значения, хотя общие формулы в этом случае дают $x = {}^0/_0$, $y = {}^0/_0$.

Глава четвертая.

Извлечение квадратного корня из многочлена.

399. Объяснение. В некоторых случаях квадратный корень из многочлена может быть выражен в виде многочлена (в виде одночлена он не может быть выражен, так как одночлен в квадрате дает одночлен, а не многочлен). Покажем это на следующем примере:

$$\sqrt{16a^4b^2 - 21a^3b^3 + 13a^2b^4 - 3ab^3 + {}^1/_4 b^6}.$$

Мы расположили данный многочлен по убывающем степейям буквы a, так что высший член в нем есть первый, а низший — последний.

Предположим, что существует многочлен, квадрат которого равен данному многочлену. Пусть этот многочлен тоже расположен по убывающим степеням буквы a, так что высший член в нем первый.

Мы в вдели (ч. I, отдел 6 глава 2 § 155), что квадрат многочлена = квадрату 1 -го члена +удвоенное произведение 1-го члена на 2-й + квадрат 2-го члена + удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й + квадрат 3-го члена, и т. д. Если возвышаемый многочлен расположен по убывающим степеням главной буквы, то очевидно, что высший член в квадрате этого многочлена есть квадрат первого его члена. В подкоренном многочлене высший член есть $\mathbf{16a^4b^2}$; значит, это и есть квадрат 1-го члена искомого многочлена; поэтому 1-й член корня = $\sqrt{\mathbf{16a^4b^2}} = \pm \mathbf{4a^2b}$. Таким образом: *чтобы найти первый член корня, достаточно извлечь квадратный корень из первого члена подкоренного многочлена* (предварительно расположенного.).

Из найденных двух значений первого члена возьмем пока одно: + $\mathbf{4a^2b}$, а впоследствии примем во внимание и другое.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{16a^4b^2 - 24a^3b^3 + 13a^2b^4 - 3ab^5 + \frac{1}{4}b^6} = 4a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3. \\
 & -16a^4b^2 \\
\hline
8a^2b - 3ab^2 & \quad - 24a^3b^3 + 13a^2b^4 \\
-3ab^2 & \quad + 24a^3b^3 - 9a^2b^4 \;\ldots\ldots\ldots \text{первый остаток} \\
\hline
8a^2b - 6ab^2 + \frac{1}{2}b^3 & \quad + 4a^2b^4 - 3ab^5 + \frac{1}{4}b^6 \\
\frac{1}{2}b^3 & \quad \underline{- 4a^2b^4 + 3ab^5 - \frac{1}{4}b^6} \;\ldots\ldots \text{второй остаток} \\
 & \qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Найдя первый член корня ($\mathbf{4a^2b}$) , возвысим его в квадрат и вычтем из подкоренного многочлена. В остатке (первом) должны получиться все члены многочлена, кроме первого. Мы написали только 2 члена остатка, потому что остальные пока не нужны. В этом первом остатке должны содержаться: удвоенное произведение 1-го члена на 2-й + квадрат второго члена + удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й + квадрат 3-го, и т. д. Из всех этих членов высшим будет удвоенное произведение 1-го члена на 2-ой, а в остатке высший член есть—$\mathbf{24a^3b^3}$; следовательно—$\mathbf{24a^3b^3}$ и есть удвоенное произведение 1 -го члена на 2-й. А потому: чтобы найти 2-й член корня, достаточно разделить первый член первого остатка на удвоенный первый член корня.

Для этого налево от остатка (или направо от него) проводим вертикальную черту, за нею пишем удвоенный первый член корня ($8a^2b$). Разделив $-24a^3b^3$ на $8a^2b$, получаем одночлен $-3ab^2$, который и записываем в корне на месте второго члена, и вместе с тем приписываем его за вертикальной чертой к удвоенному первому члену (получаем за чертой $8a^2b - 3ab^2$). Это делается для того, чтобы, умножив $8a^2b - 3ab^2$ на $-3ab^2$, зараз получить: удвоенное произведение 1-го члена на 2-й и квадрат 2-го члена. Умножив на самом деле $8a^2b - 3ab^2$ на $-3ab^2$, пишем произведение под остатком и из него вычитаем (для чего переменяем знаки у вычитаемого многочлена на противоположные); получаем второй остаток $+4a^2b^4 - 3ab^5 + {}^1/_4\, b^6$

Во втором остатке должны содержаться: удвоенное произведение суммы первых двух членов корня на 3-й член + квадрат 3-го члена, и т. д.; другими словами: удвоенное произведение 1-го члена на 3-й + удвоенное произведение 2-го члена на 3-й + квадрат 3-го члена, и т. д. Изо всех этих членов высший есть удвоенное произведение 1-го члена на 3-й; а в остатке высший член есть $+4a^2b^4$. Значит, $+4a^2b^4$ и есть удвоенное произведение 1-го члена корня на 3-й его член. Поэтому: чтобы найти 3-й член корня, достаточно разделить первый член второго остатка на удвоенный 1-й член корня.

Пишем $8a^2b$ за вертикальною чертою и делим на это выражение $4a^2b^4$; получаем $+{}^1/_2\, b^3$; пишем этот результат в корне на месте 3-го члена. Теперь нам нужно составить удвоенное произведение 1-го члена на 3-й + удвоенное произведение 2-го члена на 3-й+квадрат 3-го члена и полученную сумму вычесть из второго остатка. Чтобы удобнее найти эту сумму, к удвоенному 1-му члану приписываем (за вертикальной чертой) удвоенный-2-й член и еще 3-й член корня (получаем $8a^2b - 6ab^2 + {}^1/_2\, b^3$) и образовавшийся от этого многочлен умножаем на 3-й член, т. е. на ${}^1/_2\, b^3$ полученное произведение подписываем под остатком и из него вычитаем (для чего переменяем знаки у вычитаемого многочлена).

В нашем примере 3-й остаток оказался **0**; если бы получился остаток, не равный 0, то мы продолжали бы действие далее, рассуждая так, как и раньше.

Для первого члена искомого корня мы взяли, лишь одно значение $\sqrt{16a^4b^2}$, именно $+4a^2b$; но мы могли бы также взять и: $-4a^2b$; в этом случае остальные члены корня тоже переменили бы знаки на противоположные, потому что для получения их пришлось бы делить первые члены остатков не на $8a^2b$, а на $-8a^2b$. Значит, квадратный корень из многочлена имеет два значения; в нашем примере одно = $4a^2b - 3ab^2 + {}^1/_2\, b^3$, другое $-4a^2b + 3ab^2 - {}^1/_2\, b^3$ оба эти значения можно выразить так:

$$\pm(4a^2b - 3ab^2 + {}^1/_2\, b^3)$$

Мы могли бы подкоренной многочлен расположить по возрастающим степеням главной буквы; члены корня нашлись бы тогда совершенно так же, как сейчас было объяснено; только в объяснений слово „высший" должно заменить словом „низший".

400. Правило. Чтобы извлечь квадратный корень из многочлена, предварительно располагают его по убывающим или по возрастающим степеням одной и той же буквы.

Извлекают квадратный корень из 1-го члена многочлена; полученный результат берут за 1-й член корня.

Возвысив этот член в квадрат, вычитают его из данного многочлена.

Делят 1-й член первого остатка на удвоенный первый член корня; полученное частное берут за 2-й член корня.

Приписав этот член к удвоенному 1-му члену корня, умножают полученный двучлен на 2-й член корня и произведение вычитают из остатка.

Делят 1-й член 2-го остатка на удвоенный 1-й член корня; полученное частное принимают за 3-й член корня.

Приписав этот член к сумме удвоенного 1-го члена и удвоенного 2-го члена, умножают полученный трехчлен на 3-й член корня и произведение вычитают из 2-го остатка.

Продолжают действие так же и далее.

401. Признаки невозможности извлечения. 1) Если, данный многочлен есть двучлен, то корень квадратный из него не может быть выражен многочленом, так как всякий многочлен в квадрате дает по меньшей мере 3 члена, а не 2.

2) Если высший или низший члены многочлена не представляют собою точных квадратов, то корень квадратный из многочлена не может быть выражен многочленом.

Это прямо следует из правила нахождения высшего и низшего членов корня.

3) Если высший и низший члены многочлена — точные квадраты, то возможность или невозможность извлечения корня обнаружится посредством самого действия; при этом если многочлен расположен по убывающим степеням главной буквы, то продолжают действие до тех пор, пока в остатке не получится **0**, или пока не получится остаток, у которого первый член не делится на удвоенный первый член корня; в последнем случае извлечение невозможно. Если же многочлен расположен по возрастающим степеням главной буквы, то, вычислив предварительно последний член корня (который равен корню квадратному из последнего члена многочлена), продолжают действие до тех пор, пока в корне не получится член, у которого показатель главной буквы равен показателю этой буквы в вычисленном последнем члене корня, или более его; если при этом есть остаток, то извлечение невозможно.

402. Замечание. Когда из данного многочлена нельзя извлечь точного квадратного корня, все-таки иногда бывает полезно начать извлечение с тем, чтобы, прекратив его на каком-нибудь члене корня, представить данный многочлен в виде суммы квадрата с остатком от извлечения. Например:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{x^4-4x^3+3}=x^2-2x \\
 & -x^4 \\
2x^2-2x & \overline{-4x^3+3} \\
-2x & +4x^3-4x^2 \\
\hline
 & \qquad -4x^2+3.
\end{array}$$

Положим, что мы прекратили извлечение на втором члене корня. Получившийся при этом остаток произошел от вычитания из подкоренного многочлена всех членов, которые получаются от возвышения в квадрат найденного двучлена $x^2 — 2x$; значит:

$$(x^4 — 4x^3 + 3) — (x^2 — 2x)^2 = — 4x^2 + 3;$$

следовательно,

$$x^4 — 4x^3 + 3 = (x^2 — 2x)^2 + (— 4x^2 + 3) = (x^2 — 2x)^2 — 4x^2 + 3.$$

Глава пятая.

Преобразование сложного радикала.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

403. Корни биквадратного уравнения, как мы видели (ч. I, отдел 9 глава 3 § 229), выражаются под видом сложных радикалов $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Такие радикалы в некоторых случаях возможно преобразовать в сумму или разность двух простых радикалов и тем упростить их вычисление и определение степени погрешности результата. Покажем, как и при каких условиях это можно сделать.

Пусть в сложном радикале $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ числа **A** и **B** будут рациональные, причем $\sqrt{B}$ число вещественное иррациональное (и, следовательно, **B** число положительное). Предположим, что возможно равенство:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

в котором числа x и y положительные рациональные. Возвысив обе части этого равенства в квадрат, получим:

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} = x + y + \sqrt{4xy}.$$

Откуда:

$$\sqrt{4xy} = (A — x — y) + \sqrt{B}$$

и следовательно,

$$4xy = (A — x — y)^2 + B + 2(A — x — y)\sqrt{B}$$

Левая часть этого уравнения есть число рациональное; значит, и правая часть должна быть числом рациональным. Но это возможно только тогда, когда коэффициент при $\sqrt{B}$ будет равен нулю. Положив

$A — x — y = 0$, находим: $x + y = A$; тогда $4xy = B$,

или:

$$x + y = A, \qquad xy = {}^{B}/_{4}$$

Из этих равенств видно, что x и y можно рассматривать, как корни такого квадратного уравнения, у которого коэффициент при неизвестном во 2-й степени есть **1**, коэффициент при неизвестном в 1-й степени есть — **A**, а свободный член равен $\mathbf{B}/\mathbf{4}$ (ч. I, отдел 9 глава 1 § 219). Значит, решив уравнение:

$$z^2 - Az + B/4 = 0$$

найдем ***x*** и ***y***:

$$x = z_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B}{4}} = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

$$y = z_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B}{4}} = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Отсюда видно, что радикал $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ можно представить в виде суммы двух простых радикалов только тогда, когда **A** есть число положительное и $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}$ есть точный квадрат.

Подобным же образом выведем, что при тех же условиях и при $\mathbf{A} \geq \sqrt{\mathbf{B}}$:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Примеры.

$$1)\ \sqrt{10 + \sqrt{51}} = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{10^2 - 51}}{2}} + \sqrt{\frac{10 - \sqrt{10^2 - 51}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10 + 7}{2}} + \sqrt{\frac{10 - 7}{2}} = \frac{\sqrt{34} + \sqrt{6}}{2} = \frac{5{,}830 + 2{,}449}{2} = 4{,}139$$

$$2)\ \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{\frac{8 + 2}{2}} - \sqrt{\frac{8 - 2}{2}} =$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3} = 2{,}236 - 1{,}732 = 0{,}504.$$

$$3)\ \sqrt{\frac{9}{11} + \frac{4}{11}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9 + \sqrt{32}}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{\frac{9 + 7}{2}} + \sqrt{\frac{9 - 7}{2}}}{\sqrt{11}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8} + 1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{88} + \sqrt{11}}{11} = \frac{9{,}381 + 3{,}317}{11} = 1{,}154.$$

$$4)\ a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}} = \sqrt{2r^2 - \sqrt{4r^4 - a_n{}^2 r^2}}$$

(Известная геометрическая формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника). Здесь:

$$A = 2r^2; \quad B = 2r^2 — a_n^2 r^2; \quad \sqrt{A^2 — B} = a_n r$$

поэтому:

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{2r^2 + a_n r}{2}} - \sqrt{\frac{2r^2 - a_n r}{2}} = \sqrt{r\left(r + \frac{a_n}{2}\right)} - \sqrt{r\left(r - \frac{a_n}{2}\right)}$$

Глава шестая .

Дополнительные сведения о неравенствах.

404. Два рода вопросов относительно неравенств. Относительно неравенств (как и равенств), содержащих буквы, могут быть предлагаемы вопросы двоякого рода:

1) решить неравенство, содержащее неизвестные, т. е. определить, между какими пределами должны заключаться численные значения неизвестных, чтобы оно было верно, т. е. больше чего или меньше чего должны быть эти значения неизвестных;

2) доказать тождественное неравенство, т. е. обнаружить верность его при всевозможных значениях букв, или, по крайней мере, при значениях, ограниченных заданными наперед условиями.

Решение обоих вопросов основывается на некоторых свойствах неравенств, подобных тем, которые служат основанием для решения уравнений.

405. Равносильные неравенства. Неравенства, содержащие одни и те же неизвестные, называются равносильными, если они удовлетворяются одними и теми же значениями этих неизвестных; так, 2 неравенства $3x + 2 < x + 10$ и $3x < x + 8$ равносильны, так как оба они удовлетворяются значениями x, меньшими **4**, и только этими значениями.

Относительно равносильности неравенств докажем теоремы, весьма сходные с подобными же теоремами относительно равносильности уравнений.

406. Теорема 1. *Если к обеим частям неравенства (содержащего неизвестные) прибавим (или отнимем) одно и то же число, то получим новое неравенство, равносильное первому.*

Обозначим левую часть неравенства, содержащего неизвестные, одною буквою **A** и правую часть — другою буквою **B**, и пусть m есть какое угодно число; докажем, что два неравенства:

$$A > B \qquad (1)$$

$$A + m > B + m \qquad (2)$$

равносильны. Положим, что первое неравенство удовлетворяется при некоторых значениях букв. Это значит, что при этих значениях численная величина **A** делается больше численной величины **B**, но тогда при тех же значениях букв и численная величина суммы $A + m$ сделается больше численной величины суммы $B + m$, так как если к обеим частям неравенства придадим поровну, то знак неравенства не изменится. Значит, всякое решение неравенства (1) принадлежит и неравенству (2).

Обратно, если при некоторых значениях букв численная величина суммы **A**+

m делается больше численной величины суммы **B** + ***m***, то для тех же значений букв и численная величина **A** сделается больше численной величины **B** (если от обеих частей неравенства отнимем поровну, то...); следовательно, все решения неравенства (2) удовлетворяют и неравенству (1); значит, эти неравенства равносильны.

Переходя от неравенства (2) к неравенству (1), мы замечаем, что от обеих частей неравенства можно отнять одно и то же число.

Замечание. Число, прибавляемое к обеим частям неравенства или отнимаемое от них, можег быть дано в виде какого-нибудь буквенного выражения, причем выражение это может содержать в себе и неизвестные, входящие в неравенство; нужно только, чтобы прибавляемое выражение при всех значениях неизвестных, удовлетворяющих данному неравенству, представляла собою определенное число (а не принимало бы, например, вида $^{\mathbf{0}}/_{\mathbf{0}}$, или ∞).

Следствие. *Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком.*

Если, например, имеем неравенство: **A > B + C**, то, отняв от обеих частей по **C**, получим: **A —C > B**.

407. Теорема 2. *Если обе части неравенства (содержащею неизвестные) умножим (или разделим) на одно и то же положительное число, то получим новое неравенство, равносильное первому.*

Докажем, что два неравенства:

$$\mathbf{A} > \mathbf{B} \qquad (1)$$

$$\mathbf{A}m > \mathbf{B}m \qquad (2)$$

равносильны, если только ***m*** положительное число.

Пусть при некоторых значениях неизвестных численная величина **A** делается больше численной величины **B**; тогда при тех же значениях неизвестных и численная величина произведения **A*m*** сделается больше численной величины произведения **B*m***, так как от умножения обеих частей неравенства на положительное число, как мы знаем, знак неравенства не изменяется. Значит, все решения неравенства (1) удовлетворяют и неравенству (2).

Обратно, если при некоторых значениях букв численная величина **A*m*** делается больше численной величины **B*m***, то при тех же значениях букв и численная величина **A** сделается больше численной величины **B**, так как от деления обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не изменяется.

Замечание. Положительное число, на которое, по доказанному, мы имеем право умножить или разделить обе части неравенства (не изменяя его знака), может быть дано в виде буквенного выражения, причем это выражение может содержать в себе и неизвестные, входящие в неравенство. Но при этом надо особо рассмотреть, при всех ли значениях букв, входящих в выражение, на которое мы умножаем или делим обе части неравенства, это выражение остается положительным числом.

Например, умножим обе части неравенства **A > B** на выражение $(x — 5)^2$;

$$\mathbf{A} > \mathbf{B} \qquad (1)$$

$$\mathbf{A}(x - 5)^2 > \mathbf{B}(x - 5)^2 \qquad (2)$$

Множитель $(x - 5)^2$ остается положительным числом при всех значениях x, кроме одного: $x = 5$. Значит, неравенства (1) и (2) равносильны в том случае, если первое из них не удовлетворяется значением $x = 5$; в противном же случае неравенство (1), удовлетворяясь всеми решениями неравенства (2), имеет еще свое особое решение: $x = 5$ (это решение, конечно, неравенству (2) не удовлетворяет).

Следствие. Если обе части неравенства содержат положительный общий множитель, то на него можно сократить неравенство. Например, в обеих частях неравенства:

$$(x - 5)^2(x - 1) > (x - 5)^2(3 - x)$$

есть общий множитель $(x - 5)^2$. Этот множитель при $x - 5$ обращается в $\mathbf{0}$, а при всех остальных значениях x он есть число положительное. Решение $x = 5$ не удовлетворяет данному неравенству. Желая решить, удовлетворяется ли оно при других значениях x, мы можем сократить обе части неравенства на $(x - 5)^2$ как на число положительное; после сокращения получим: $x - 1 > 3 - x$. Все значения x, удовлетворяющие этому неравенству, за исключением $x = 5$, удовлетворяют и данному неравенству.

408. Теорема 3. *Если обе части неравенства (содержащего неизвестные) умножим (или разделим) на одно и то же отрицательное число и при этом переменим знак неравенства на противоположный, то получим новое неравенство равносильное первому.*

Эта теорема доказывается совершенно так же, как и теорема 2-я; надо только принять во внимание, что от умножения или деления обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный.

По поводу этой теоремы можно высказать такое же замечание, какое было сделано по отношению к теореме 2-й.

Следствия, а) Переменив у всех членов неравенства знаки на противоположные (т. е. умножив обе его части на -1), мы должны изменить знак неравенства на противоположный.

б) Нельзя умножить обе части неравенства на буквенного множителя, знак которого неизвестен.

в) Неравенство с дробными членами можно привести к целому виду. Возьмем, например, такое неравенство:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}. \qquad (1)$$

Перенесем все члены в левую часть и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{AD - BC}{BD} > 0. \qquad (2)$$

Если **BD** положительное число, то мы можем его отбросить, не изменяя знака неравенства, потому что отбросить **BD** все равно, что умножить на это число обе части неравенства. Отбросив **BD**, получим неравенство, не содержащее дробей:

$$\mathbf{AB - BC > 0.}$$

Если **BD** отрицательное число, то мы можем его отбросить, переменив при этом знак неравенства на противоположный; тогда снова будем иметь неравенство с целыми членами:

$$\mathbf{AB - BC < 0.}$$

Но если знак **BD** неизвестен (что бывает вообще тогда, когда **B** и **D** содержат неизвестные), то мы не можем умножать обе части неравенства на **BD**. Тогда рассуждаем так: чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы у нее числитель и знаменатель были одновременно или положительны, или отрицательны. Следовательно, неравенство (2) удовлетворится при таких значениях букв, при которых,

$$\begin{cases} AD - BC > 0 \\ BD > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} AD - BC < 0. \\ BD < 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение неравенства (1) сводится к решению системы двух неравенств, не содержащих знаменателей.

409. Доказательство неравенства. Нельзя установить каких-либо общих правил для обнаружения верности предложенного неравенства. Заметим только, что один из приемов состоит в том, что предложенное неравенство преобразовывают в другое, очевидное, и затем, исходя из этого очевидного неравенства, путем логических рассуждений доходят до предложенного. Приведем некоторые примеры.

I. *Доказать, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел больше их среднего геометрического,* т. е. что

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

если a и b положительные числа, неравные друг другу.

Предположим, что доказываемое неравенство верно. В таком случае будут верны и следующие неравенства:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{ab}\right)^2; \ \frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab; \ a^2+2ab+b^2 > 4ab;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 > 0; \ (a-b)^2 > 0.$$

Очевидно, что последнее неравенство верно для всяких неравных значений a и b, как положительных, так и отрицательных. Из этого, однако, нельзя еще сразу заключить, что и доказываемое неравенство верно; надо еще убедиться, что из последнего неравенства можно получить, как следствия, все предыдущие. Просматривая эти неравенства от последнего к первому, видим, что все они равносильны друг другу, если добавить ограничение, что буквы a и b должны теперь означать только положительные числа, так как если одна из этих букв — отрицательное число, то $\sqrt{ab}$ будет мнимое число, а если обе буквы — отрицательные числа, то $\frac{a+b}{2}$ будет отрицательное число, а $\sqrt{ab}$ - число положительное, а отрицательное число не может быть больше положительного 2).

Если допустим, что $a = b$, то тогда в написанных выше.неравенствах знак > изменится на знак = и мы придем к заключению, что среднее арифметическое двух равных положительных чисел равно их среднему геометрическому.

II. *Доказать, что величина дроби*

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}$$

заключается между большею и меньшею из дробей:

$$\frac{a_1}{b_1},\quad \frac{a_2}{b_2},\quad \frac{a_3}{b_3},\ \cdots\frac{a_n}{b_n},$$

если все знаменатели b_1, b_2 ...— числа положительные или все отрицательные.

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ будет дробь, которая не больше никакой из остальных дробей, и $\frac{a_n}{b_n}$ — дробь, которая не меньше никакой из остальных дробей.

Положим, что $\frac{a_1}{b_1}=q_1$ и $\frac{a_n}{b_n}=q_n$. Тогда, согласно предположению:

$$\frac{a_1}{b_1}=q_1,\ \ \frac{a_2}{b_2}\geqslant q_1,\ \ \frac{a_3}{b_3}\geqslant q_1,\ \cdots\frac{a_n}{b_n}\geqslant q_1,$$

$$\frac{a_n}{b_n}=q_n,\ \ \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqslant q_n\cdots\frac{a_2}{b_2}\leqslant q_n,\ \ \frac{a_1}{b_1}\leqslant q_n.$$

Отсюда, если числа b_1, b_2 ... b_n положительные:

$$a_1=b_1q_1,\ \ a_2\geqslant b_2q_1,\ \ a_3\geqslant b_3q_1\cdots a_n\geqslant b_nq_1$$

и

$$a_n=b_nq_n,\ \ a_{n-1}\leqslant b_{n-1}q_n\cdots a_2\leqslant b_2q_n,\ \ a_1\leqslant b_1q_n.$$

Сложив почленно все неравенства 1-й строки между собою и все неравенства 2-й строки между собою, получим:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\, q_1 \qquad \text{и}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\, q_n$$

Разделив обе части этих неравенств на положительное число $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ окончательно найдем:

$$q_n\geqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}\geqslant q_1,$$

что и требовалось доказать.

Так же доказывается предложение для того случая, когда все знаменатели числа отрицательные.

III. *Доказать, что если сумма переменных чисел* ***x*** *и* ***y*** *остается постоянной, то их произведение будет наибольшее при равенстве этих чисел.*

Пусть ***x* + *y* = *a***, где ***a*** постоянное число. Если ***x* = *y***, то каждое из этих чисел будет $^{a}/_{2}$ и тогда ***xy*** сделается равным $\frac{a^2}{4}$

Требуется доказать, что если ***x* =/= *y***, то ***xy*** < $\frac{a^2}{4}$. Преобразуем это доказываемое неравенство так:

$$xy<\frac{a^2}{4};\quad 4xy<a^2;\quad 4xy<(x+y)^2;$$
$$4xy<x^2+2xy+y^2;\quad 0<x^2-2xy+y^2;$$
$$0<(x-y)^2.$$

При неравных ***x*** и ***y*** последнее неравенство, очевидно, верно. Переходя от него последовательно к предыдущим неравенствам, замечаем, что все они равносильны. Значит, и первое неравенство верно.

Если, напр., ***x* + *y*** =**10**, то наибольшая величина произведения есть **5•5 = 25**.

Глава седьмая.

Понятие о комплексных числах.

410. Цель введения в алгебру мнимых чисел. Корень четной степени из отрицательного числа, как мы видели (ч. I, отдел 6 глава 6 § 167), не может быть выражен ни положительным, ни отрицательным числом; такой корень называется мнимым числом.

Введение в алгебру мнимых чисел вызвано соображениями, подобными тем, по которым в нее допущены отрицательные числа: и те, и другие имеют целью обобщить некоторые алгебраические предложения и формулы. Напр., допустив мнимые числа, мы можем принимать, что квадратное уравнение имеет всегда два корня, что трехчлен 2-й степени разлагается всегда на два множителя первой степени, и т. п. Особенно важное значение имеют мнимые числа в теории уравнений высших степеней.

Заметим, что корень всякой четной степени из отрицательного числа сводится к нахождению корня из квадратного корня из отрицательного числа; так, $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[3]{\sqrt{-2}}$ и вообще $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[n]{\sqrt{-a}}.$

Поэтому в дальнейшем изложении мы будем говорить только о квадратном корне из отрицательного числа.

411. Условия, под которыми вводят мнимые числа. Этих условий два:

1) согласились рассматривать $\sqrt{-a}$, где — ***a*** есть какое угодно отрицательное число, как число особого рода, квадрат которого равен — ***a***;

2) согласились производить над мнимыми числами действия и преобразования по тем же правилам, по каким они производятся над числами вещественными, принимая всегда, что $(\sqrt{-a})^2 = -a$

412. Приведение $\sqrt{-a}$ к виду $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Мнимое число вида $\sqrt{-a}$ можно заменить другим: $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Действительно, $\sqrt{-a}$, согласно первому условию, есть такое число, квадрат которого равен $-a$. Но $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ также есть такое число, квадрат которого равен $-a$, потому что, применяя к этому выражению правило о возвышении в степень произведения (согласно второму условию), получим:

$$(\sqrt{a}\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{-1})^2 = a(-1) = -a.$$

Условились сокращенно обозначать выражение $\sqrt{-1}$ одною буквою ***i*** (начальная буква слова *imaginaire*, что значит мнимый). Таким образом, пишут:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i\ ;\quad \sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = i\sqrt{3}$$

Приведение мнимого числа к виду, содержащему множителя ***i***, яснее обозначает мнимость радикала, которая без того может быть не вполне явною.

413. Комплексные числа. Общий вид всякого вещественного или мнимого числа есть $a + bi$, где a и b суть какие-либо вещественные числа, положительные или отрицательные, а i — обозначение $\sqrt{-1}$. Число вида $a + bi$ называется комплексным числом 3); в нем a есть вещественная часть, bi мнимая часть. При $a = 0$ оно обращается в чисто мнимое число $bi = b\sqrt{-1} = \sqrt{-b^2}$; при $b = 0$ оно дает $a + 0 \cdot i$, что равно одному вещественному числу a, так как произведение $0 \cdot i$, согласно условию второму § 411, должно приниматься равным нулю.

Два комплексных числа вида $a + bi$, $a - bi$ называются сопряженными. Под таким видом представляются корни квадратного уравнения, когда они мнимые. Два комплексные числа вида $a + bi$, $-a - bi$ называются противоположными.

414. Основное начало, которому должны быть подчинены комплексные числа. Условившись над комплексными числами производить действия и преобразования по правилам, выведенным для вещественных чисел, при условии, что $i^2 = -1$, мы должны будем подчинить комплексные числа следующему началу:

Для того, чтобы комплексное число $a + bi$ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $a = 0$ и $b = 0$.

Хотя предложение это можно было бы рассматривать как условие, которое мы ставим относительно комплексного числа и которое, следовательно, не нуждается в доказательстве, однако полезно обнаружить, что оно не находится в противоречии с поставленными нами ранее двумя условиями, а составляет естественное следствие их. Действительно, если положим, что $a + bi = 0$, тогда, совершая над этим равенством преобразования, дозволительные для равенств с вещественными числами, и принимая $i^2 = -1$, мы будем иметь:

$$a = -bi;\quad a^2 = (-bi)^2 = b^2i^2 = -b^2;\quad a^2 + b^2 = 0.$$

Так как a^2 и b^2 суть числа положительные, а сумма двух положительных чисел не может равняться нулю, то выведенное равенство возможно только тогда, когда каждое из них отдельно равно нулю; значит, необходимо: $a = 0$ и $b = 0$. Обратно, если положим, что $a = 0$ и $b = 0$, то $a + bi = 0 + 0 \cdot i$; принимая умножение на нуль и сложение с нулем в том же условном смысле, какой принят для вещественных чисел, мы должны принять, что $0 + 0 \cdot i = 0$.

Следствие. Для того чтобы числа $a + bi$ и $a' + b'i$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $a = a'$ и $b = b'$.

Действительно, если $a + bi = a' + b'i$, то $(a - a') + (b - b')i = 0$ и, следовательно, $a - a' = 0$ и $b - b' = 0$, т. е. $a = a'$ и $b = b'$

Обратно, если $a = a'$ и $b = b'$, то число $a + bi$ мы должны принимать равным числу $a' + b'i$, так как эти комплексные выражения в этом случае ничем друг от друга не отличаются.

Из равенства комплексных чисел непосредственно следует, что если 2 числа равны одному и тому же 3-му, то они равны и между собою.

Замечание. Относительно компексных чисел не принято никакого соглашения, какое из них считать большим другого.

415. Действия над комплексными числами. Чтобы произвести какое-нибудь действие над мнимыми числами, надо прежде всего каждое из них привести к виду комплексного числа $a + bi$, затем произвести действия над двучленами такого вида по тем правилам, которые выведены были для двучленов с вещественными членами (согласно условию второму § 411) и, наконец, в результате заменить везде i^2 через -1 (согласно условию первому того же §).

Сложение, $(a + bi) + (a_1 + b_1i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$

$(a + bi) + (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a + a_1 + a_2) + (b + b_1 + b_2)i$ и т. п.

Отсюда легко усмотреть, что сумма комплексных чисел обладает теми же свойствами, какие принадлежат сумме вещественных чисел, т. е. свойствами переместительным и сочетательным.

Вычитание. $(a + bi) - (a_1 + b_1i) = (a - a_1) + (b - b_1)i$

Отсюда видно, что к вычитанию комплексных чисел можно применять общее правило вычитания алгебраических чисел (ч. I, отдел 1 глава 3§ 22), т. е., чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно прибавить число противоположное; так, вместо того, чтобы от $a + bi$ вычесть $a_1 + b_1i$, можно к $a + bi$ прибавить $-a_1 - b_1i$.

Заметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может иногда оказаться числом вещественным (напр., сумма сопряженных комплексных чисел).

Умножение.

$$(a + bi)(a_1 + b_1i) = aa_1 + a_1bi + ab_1i + bb_1i^2 = (aa_1 - bb_1) + (a_1b + ab_1)i$$

Подобным образом можно составить произведение трех и более комплексных чисел.

Легко убедиться (поверкой), что произведение комплексных чисел так же, как и вещественных (ч. I, отдел 1 глава 3 § 34), обладает свойствами: переместительным, сочетательным и распределительным (относительно сложения). Напр., чтобы проверить последнее свойство, выражаемое равенством:

$[(a + bi) + (a_1 + b_1i)]\,(a_2 + b_2i) = (a + bi)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)$ выполним действия, указанные в каждой части этого равенства.

Левая часть дает:

$[(a + a_1) + (b + b_1)i]\,(a_2 + b_2i) = (a + a_1)\,a_2 + (b + b_1)a_2\,i + (a + a_1)b_2i + (b + b_1)b_2\,i^2 =$
$= (aa_2 + a_1a_2 — bb_2 — b_1b_2) + (ba_2 + b_1a_2 + ab_2 + a_1b_2)i.$

В правой части получается то же самое выражение.

Проверим еще следующее важное свойство произведения: *для того, чтобы произведение комплексных чисел равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одно из этих чисел равнялось нулю.*

Действительно, если $(a + bi)\,(a_1 + b_1i) = 0,$

то $(aa_1 — bb_1) + (a_1b + ab_1)i = 0$

и следовательно,

$$\begin{cases} aa_1 - bb_1 = 0, \\ a_1b + ab_1 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножив первое уравнение этой системы на a и второе на b, сложим их:

$$a^2a_1 + b^2a_1 = 0, \text{ или } a_1\,(a^2 + b^2) = 0. \qquad (2)$$

Умножив первое уравнение системы (1) на b и второе на a, вычтем из второго первое:

$$a^2b_1 + b^2b_1 = 0, \text{ или } b_1\,(a^2 + b^2) = 0. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) заключаем, что или $a^2 + b^2 = 0$, или $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. Если первое, то $a = 0$ и $b = 0$ и, следовательно, $a + bi = 0$; если второе, то $a_1 + b_1i = 0$.

Обратно, пусть $a + bi = 0$, т. е. $a = 0$ и $b = 0$; но тогда и $aa_1 — bb_1 = 0$, и $a_1b + ab_1 = 0$; следовательно, и произведение $(a + bi)$ на $(a_1 + b_1i)$ равно 0 .

Заметим, что произведение двух сопряженных комплексных чисел $(a + bi)\,(a_1 — b_1i)$ равно положительному вещественному числу $a^2 + b^2$.

Деление. Обозначим частное $(a + bi) : (a_1 + b_1i)$ через $x + yi$, где x и y предположим вещественными числами. Тогда, по определению деления, будем иметь:

$$(a_1 + b_1i)\,(x + yi) = a + bi$$

т. е. $(a_1x — b_1y) + (b_1x + a_1y)i = a + bi,$

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = a, \\ b_1x + a_1y = b. \end{cases}$$

откуда

Умножив первое уравнение на a_1 а второе на b_1 и сложив оба уравнения, получим:

$$(a_1^2+b_1^2)x=aa_1+bb_1 \quad \text{и} \quad x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}$$

Умножив первое уравнение на b_1 а второе на a_1 и вычтя из второго первое, получим:

$$(a_1^2+b_1^2)y=a_1b-ab_1 \quad \text{и} \quad y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Формулы, найденные для x и y, дают возможное решение, если только a_1^2 + b_1^2=/= **0**, т. е. если a_1 и b_1 не равны одновременно нулю; другими словами, если делитель a_1+ b_1i не равен нулю.

В этом случае, следовательно, будем иметь:

$$(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\,\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Замечание. Это же частное мы могли бы получить проще, умножив в дроби $\frac{a+bi}{a_1+b_1i}$ числителя и знаменателя на комплексное число a_1— b_1i, сопряженное с знаменателем:

$$\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1-bb_1i^2+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\,\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Возвышение в степень. Предварительно найдем результаты от возвышения в степень мнимого числа i, зная, что, согласно условию, i^2 должно принимать равным — **1**.

i^1 = i;
i^2 = — **1**;
i^3 = i^2•i = (— **1**) i = — i;
i^4 = i^3•i = — i^2 = +**1**;
i^5 = i^4 •i = (+**1**)i = i;
i^6 == i^5•i== i^2 = — **1**;
i^7 =i^6•i = (— **l**)i = — i
и т.д.

Таким образом, последовательные степени i дают повторяющиеся результаты, а именно, следующие четыре: i, —**1**, — i, + **1**. Чтобы узнать, какой из этих результатов получится при возвышении i в степень с показателем n, достаточно разделить n на **4** и обратить внимание только на остаток от деления. Так:

$$i^{27} = i^{4\cdot 6+3} = i^3 = -i$$
$$i^{17} = i^{4\cdot 4+1} = i$$

Заметим еще, что i^0 мы будем принимать равным **1**. Теперь легко найдем результаты возвышения $a + bi$ в степень с целым положительным показателем, так:

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$
$$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2(bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.$$

и т. д.

Извлечение квадратного корня. Положим, что $\sqrt{a + bi} = x + yi$

. Откуда: $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$

Следовательно, $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$ (1)

Вопрос приводится к нахождению вещественных корней этой системы. Возвысив оба уравнения в квадрат и затем сложив их, получим:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(Знак перед радикалом отброшен, так как при вещественных значениях x и y выражение $x^2 + y^2$ не может быть отрицательным.) Возьмем последнее уравнение совместно с первым уравнением системы (1); складывая их и вычитая, получим:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}.$$
$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \quad \text{и} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Из второго уравнения системы (1) усматриваем, что знаки у x и y должны быть одинаковые, если $b > 0$, и разные, если $b < 0$. Поэтому:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b>0$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b<0$$

Примеры.

1) $$\sqrt{5+12\sqrt{-1}}=\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+\right.$$
$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=\pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4})=$$
$$=\pm(3+2i).$$

2) $$\sqrt{-1}=\sqrt{i}=\sqrt{0+1\cdot i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) $$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-i}=\sqrt{0-1\cdot i}=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

Замечание. Чтобы из комплексных чисел можно было извлечь корень третьей или высшей степени, им надо придать иной вид (тригонометрический), о чем мы здесь говорить не будем.

Глава восьмая.

Некоторые замечания об алгебраических уравнениях.

Двухчленное уравнение.

416. Общий вид алгебраического уравнения. Мы видели (ч. I, отдел 4 глава 1 § 124), что уравнение, содержащее неизвестное в знаменателях, может быть приведено к целому виду. Далее мы знаем (ч. I отдел 9 глава 4 § 234), что уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, может быть приведено к рациональному виду. Вследствие этого можем сказать, что всякое уравнение, в котором неизвестное связано с данными числами посредством конечного числа 6 алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня (В предположении, что при возвышении в степень и при извлечении корня неизвестное не входит ни в показатель степени, ни в показатель корня.), может быть приведено к такому целому и рациональному виду:

$$\mathbf{A}x^m+\mathbf{B}x^{m-1}+\mathbf{C}x^{m-2}+\ldots+\mathbf{K}x+\mathbf{L}=\mathbf{0},$$

где коэффициенты **A, B, C. ..K** и **L** суть постоянные вещественные или комплексные числа, а ***m*** есть показатель степени уравнения. Некоторые коэффиценты в частных случаях могут равняться **0**.

Уравнение такого вида называется алгебраическим. Алгебраические уравнения степени выше 2-й называются уравнениями высших степеней.

417. Некоторые свойства алгебраического уравнения. Уравнения высших степеней составляют предмет высшей алгебры. Элементарная же рассматривает только некоторые частные случаи этих уравнений.

Высшая алгебра устанавливает следующую важную истину: всякое алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет вещественный или комплексный корень (Теорема Гаусса) (1799). Допустив эту истину (доказательство которой в элементарной алгебре было бы затруднительно), не трудно показать, что алгебраическое уравнение имеет столько корней, вещественных или комплексных, сколько единиц в показателе его степени.

Действительно, согласно теореме Гаусса, уравнение:

$$\mathbf{A}x^{m} + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + \dots + \mathbf{K}x + \mathbf{L} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

имеет вещественный или комплексный корень; пусть этот корень будет a. Тогда многочлен, стоящий в левой части уравнения (1), должен делиться на $x — \alpha$(§ 392). Если сделаем деление, то в частном получим многочлен степени $m—1$, у которого первый коэффициент будет **A**. Обозначив другие его коэффициенты соответственно буквами:
$\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{K}_1$ и приняв во внимание, что делимое равно делителю, умноженному на частное, можем представить уравнение (1) так:

$$(x — \alpha)\ (\mathbf{A}x^{m-1} + \mathbf{B}_1x^{m-2} + \mathbf{C}_1x^{m-3} + \dots + \mathbf{K}_1) = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Приравняв нулю многочлен, стоящий во вторых скобках, получим новое уравнение, которое, по той же теореме, должно иметь некоторый корень β; вследствие этого левая его часть может быть разложена на два множителя: $x — \beta$ и многочлен степени $m — 2$, у которого первый коэффициент попрежнему будет **A**. Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$(x — \alpha)(x — \beta)(\mathbf{A}x^{m-2} + \mathbf{B}_2x^{m-3} + \ \dots) = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

Продолжая эти расоуждения далее, дойдем, наконец, до того, что многочлен, заключенный в последних скобках, будет 2-й степени, причем первый его коэффициент останется **A**. Разложив этот трехчлен на множителей (ч. I, отдел 9 глава 2 § 222), приведем уравнение (1) окончательно к виду:

$$\mathbf{A}(x — \alpha)(x — \beta)(x — \ \gamma)\dots(x — \lambda) = \mathbf{0}, \qquad (4)$$

где всех разностей: $x — \alpha$, $x — \beta$... будет m. Очевидно, что уравнение (4) обращается в тождество при каждом из значений: $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \ \gamma,\dots$, $x = \lambda$ и не удовлетворяется никакими иными значениями x (если **A**=/= **0**); значит, уравнение (1) имеет m корней α, β, $\gamma\dots\ \lambda$. В частных случаях некоторые и даже все корни могут оказаться одинаковыми.

Полезно заметить еще следующие истины, доказываемые в высшей алгебре.

Сумма корней всякого алгебраического уравнения

$$\mathbf{A}x^{m} + \mathbf{B}x^{m-1} + \mathbf{C}x^{m-2} + \ldots + \mathbf{K}x + \mathbf{L} = 0$$

равна — $^{\mathbf{B}}/_{\mathbf{A}}$, а произведение корней равно $^{\mathbf{L}}/_{\mathbf{A}}$ (примером может служить квадратное уравнение).

Если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни, то число этих корней четное (примером может служить биквадратное уравнение).

Если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет n корней вида $p — qi$, оно имеет n корней вида $p — qi$ (примером может служить биквадратное уравнение, комплексные корни которого всегда сопряженные), и так как

$$[x — (p + qi)][x — (p — qi)] = [(x — p) — qi][(x — p)+ qi] =$$
$$= (x — p)^2 — q^2 i^2 = (x — p)^2 + q^2 = x^2 — 2px + (p^2 + q^2),$$

то левая часть уравнения содержит в этом случае n вещественных множителей вида $ax^2 + bx + c$.

Алгебраическое уравнение нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

Уравнения с произвольными буквенными коэффициентами степени не выше 4-й разрешены алгебраически, т. е. для корней этих уравнений найдены общие формулы, составленные из коэффициентов уравнения посредством алгебраических действий.

В этом смысле уравнения с произвольными буквенными коэффициентами степени выше 4-й не могут быть разрешены алгебраически (теорема Абеля[4)]); однако, когда коэффициенты уравнений какой-угодно степени выражены числами, всегда есть возможность вычислить с желаемой степенью приближения все его корни как вещественные, так и мнимые. Указание способов такого вычисления составляет важную часть предмета высшей алгебры.

418. Двучленное уравнение. Двучленным уравнением называется уравнение вида: $ax^m + b = 0$, или, что то же самое, вида $x^m + {}^{b}/_{a} = 0$ [5)]. Обозначив абсолютную величину дроби $^{b}/_{a}$ через q, мы можем двучленное уравнение написать: или $x^m + q = 0$, или $x^m — q = 0$. При помощи вспомогательного неизвестного эти уравнения всегда можно упростить так, что свободный член у первого обратится в +1, а у второго в —1. Действительно положим, что $x = y\ \sqrt[m]{q}$ где, $\sqrt[m]{q}$ есть арифметический корень m-й степени из q :тогда $x^m = q\,y^m$, уравнения примут вид:

$$q\,y^m + q = 0, \text{ т. е. } q(y^m + 1) = 0; \text{ откуда: } y^m + 1 = 0; \text{ или}$$
$$q\,y^m — q = 0, \text{ т. е. } q(y^m — 1) = 0; \text{ откуда: } y^m — 1 = 0;.$$

Итак, решение двучленных уравнений приводится к решению уравнений вида $y^m \pm 1 = 0$. Решение таких уравнений элементарными способами может быть выполнено только при некоторых частных значениях показателя m. Общий прием, употребляемый при этом, состоит в разложении левой части уравнения на множителей, после чего уравнение приводится к виду $\mathbf{ABC}... = 0$, рассмотренному нами раньше (ч. I,отдел 9 глава 3 § 230).

419. Решение двучленных уравнений третьей степени. Эти уравнения следующие:

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^3 + 1 = 0.$$

Заметив, что (§ 395):

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \text{ и}$$
$$x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

мы можем предложенные уравнения написать так:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{ и } (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Значит, первое из них имеет корни уравнений:

$$(x - 1) = 0 \quad \text{и} \quad (x^2 + x + 1) = 0,$$

а второе — корни уравнений:

$$(x + 1) = 0 \quad \text{и} \quad (x^2 - x + 1) = 0.$$

Решив их, находим, что уравнение $x^3 - 1 = 0$ имеет следующие три корня:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},\ x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

из которых один вещественный, а два мнимых; уравнение $x^3 + 1 = 0$ имеет три корня:

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2},\ x_3 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

из которых также один вещественный, а два мнимых.

420. Различные значения корня (радикала). Решение двучленных уравнений m-й степени имеет тесную связь с нахождением всех значений корня той же степени из данного числа. В самом деле, если буквою x обозначим какое угодно значение $\sqrt[m]{A}$, то, согласно определению корня, мы будем иметь: $x^m = A$ и, следовательно, $x^m - A = 0$; таким образом, каждое решение этого двучленного уравнения представляет собою m-й корень из числа A: следовательно, сколько различных решений имеет двучленное уравнение, столько различных значений имеет $\sqrt[m]{A}$.

Докажем, напр., что кубичный корень из всякого числа имеет три различных значения.

Найти все значения $\sqrt[3]{A}$ значит, другими словами, решить уравнение $x^3 - A = 0$. Обозначив арифметическое значение $\sqrt[3]{A}$ через q (оно может быть только одно, ч. I, отдел 6 глава 6 § 166), введем вспомогательное неизвестное y, связанное с x таким равенством: $x = qy$. Тогда уравнение $x^3 - A = 0$ представится так: $q^3y^3 - A = 0$; но $q^3 =$

A; поэтому $q^3y^3 — A = A\,(y^3 — 1)$; следовательно, уравнение окончательно примет вид: $y^3 — 1 = 0$. Мы видели, что это уравнение имеет три корня:

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ y_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Каждое из этих значений, удовлетворяя уравнению $y^3 = 1$, представляет собою кубичный корень из **1**. Так как $x = qy$, то

$$x_1 = q\cdot 1,\ x_2 = q\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3 = q\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Это и будут три значения $\sqrt[3]{A}$; одно из них вещественное, а два мнимые. Все они получатся, если арифметическое значение кубичного корня из **A** умножим на каждое из трех значений кубичного корня из **1**. Напр., кубичный корень из **8**, арифметическое значение которого есть **2**, имеет следующие три значения:

$$2;\ 2.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -1+\sqrt{-3};\ 2.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -1-\sqrt{-3}.$$

Замечание. В высшей алгебре доказывается, что двучленное уравнение $x^m — A = 0$ имеет m различных корней; вследствии этого $\sqrt[m]{A}$ имеет m различных значений, причем, если m число четное и **A** отрицательное, то все эти значения мнимые; если m четное и **A** положительное, то два значения вещественные (из них одно положительное, другое отрицательное, с одинаковой абсолютной величиной); наконец, если m нечетное число, то из всех значении **A** только одно вещественное.

1) Если, напр., данный многочлен будет такой:

$$ax^3 + x^2 + by^2 x + cxy - dx^2y^3 - ex + fy + k,$$

то, расположив его по убывающим степеням x, получим многочлен:

$$ax^3 + (1 - dy^3)x^2 + (by^2 + c y - e)x + (fy + k),$$

для которого, следовательно, $A = a$, $B = 1 - dy^3$, $C = by^2 + c y - e$ и т. д. Коэффициенты этих выражений суть ***a, b, c***...,т. е. коэффициенты данного многочлена.

2)Полезно заметить, что предложенное неравенство становится наглядным, если придадим ему геометрический смысл. На произвольной прямой отложим отрезок **AB**, содержащий a линейных единиц, и в том же направлении — отрезок ***BC***, содержащий b таких же линейных единиц. На отрезке **AC**, равном $a + b$, построим, как на диаметре, полуокружность и из **B** восставим к **AC** перпендикуляр **BD** до пересечения с полуокружностью. Тогда, как известно из геометрии, **BD** есть средняя геометрическая между **AB** и **BC**, т. е. **BD**= $\sqrt{ab}$ средняя арифметическая **AB** и **BC** равна, очевидно, радиусу. Так как хорда меньше диаметра, то **BD** меньше радиуса, если только **BD** не совпадает с радиусом, т. е. если $a =/= b$.

3) Слово „комплексный" означет по-русски „сложный", „составной"; такое название числу вида $a + bi$ было дано впервые немецким математиком *Гауссом* (1777 — 1855). Название „мнимый" (*imaginaire*) было введено французским математиком *Декартом* в 1687 г.

4)Норвежский математик начала XIX столетия (1802 — 1829)

5)Когда двучленное уравнение имеет вид $ax^m + bx^n = 0$, где $m > n$, то его можно представить так: $x^n(ax^{m-n}+b) = 0$ и следовательно, оно распадается на два уравнения: $x = 0$ и $ax^{m-n}+b = 0$.

АЛГЕБРА В НАЧАЛО

ОТДЕЛ ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

(В скобках поставлены соответствующие параграфы.)

Основные сведения о пределах.
Подъем кривой и производные.
Возрастание или убывание функций.
Скорость как производная от пространства.
Ускорение как производная от скорости.
Функция третьей степени.
Графическое решение уравнения 3-й степени.
Функция вида $y = {}^{a}/_{x}$
Уравнение прямой.
Уравнение окружности.
Уравнение эллипса.
Уравнение гиперболы.
Уравнение параболы.
Первообразная функция.
По данному закону скорости найти закон пространства.
По данному закону ускорения найти закон скорости.
Делимость на $x - a$.
Сложные радикалы.
Дополнительные Сведения о неравенствах.

Основные сведения о пределах.

(Отдел 14 §§ 307-318.)

1. Найти предел, к которому стремится дробь

$$\frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 5x + 2}$$

если **x**—>**1**.

Решение. Если **x**—>**1**, то числитель и знаменатель данной дроби стремятся к **0**. Но так как $^{0}/_{0}$ есть неопределенное выражение, то мы остаемся в неизвестности, к какому пределу стремится данная дробь (и даже стремится ли она к какому бы то ни было пределу), если **x**—>**1**.

Поступим так: предположим, что **x** равен не **1**, а какому-нибудь переменному числу, приближающемуся к **1**. Например, пусть **x** = **1** + **h**, где **h** какое-нибудь положительное число, стремящееся к нулю. Тогда величина данной дроби будет:

$$\frac{2(1+h)^2-(1+h)-1}{3(1+h)^2-5(1+h)+2} = \frac{2+4h+2h^2-1-h-1}{3+6h+3h^2-5-5h+2} = \frac{2h^2+3h}{3h^2+h} = \frac{2h+3}{3h+1}$$

(сократить дробь на ***h*** мы имеем право, так как ***h*** **=/=0**).

Предположим теперь, что ***h*****—>0** и, следовательно, ***x*****—>1**

$$\text{пред.}\left(\frac{2h+3}{3h+1}\right)_{h\longrightarrow 0}=\frac{\text{пред. }(2h+3)_{h\longrightarrow 0}}{\text{пред. }(3h+1)_{h\longrightarrow 0}}=\frac{3}{1}=3.$$

Тот же самый предел мы найдем, если допустим, что ***x*** = 1— ***h*** где ***h*** какое-нибудь положительное число, стремящееся к **0**. Таким образом, будет ли ***x*** приближаться к **1**, оставаясь больше **1** или оставаясь меньше **1**, предел данной дроби будет один и тот же, именно **3**.

2. Найти предел, к которому стремится дробь

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x-8},$$

если ***x*****—>1**.

3. То же, если ***x*****—>0**

4. Найти пред. $\left(\frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^3-12x+16}\right)_{x\longrightarrow 2}$

5. Найти пред. $\left(\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}\right)_{x\longrightarrow 2}$

6. Найти пред. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\longrightarrow\infty}$

Решение. Так как

$$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

то

$$\text{пред. }\frac{n}{n+1}=\text{пред. }\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{\text{пред. }\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

7. Найти пред.$\left[\frac{n(n+1)}{2n^2}\right]_{n\longrightarrow\infty}$

8. Найти пред.$\left(\frac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2+1}}\right)_{x\longrightarrow\infty}$

9. Найти предел, к которому стремится дробь, если к числителю и знаменателю ее будем прикладывать одно и то же число, неограниченно возрастающее; другими словами, найти

$$\text{пред }\left(\frac{a+m}{b+m}\right)_{m\longrightarrow\infty}$$

Решение.

$$\text{Пред. } \frac{a+m}{b+m} = \text{пред. } \frac{\frac{a}{m}+1}{\frac{b}{m}+1} = \frac{\text{пред. } \left(\frac{a}{m}+1\right)}{\text{пред. } \left(\frac{b}{m}+1\right)} =$$

$$= \frac{\text{пред. } \frac{a}{m}+1}{\text{пред. } \frac{b}{m}+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1.$$

Таким образом, будет ли дробь $^{a}/_{b}$ правильная ($a < b$), или неправильная ($a > b$), предел дроби, когда $m \longrightarrow \infty$, оказывается один и тот же, именно **1.** Отсюда следует, что правильная дробь, приближаясь к **1**, увеличивается, а неправильная уменьшается. Таким образом, например.

$$\frac{2}{3} < \frac{2+8}{3+8}; \quad \frac{3}{2} > \frac{3+8}{2+8}.$$

10. Доказать, что если $x > 1$, то

$$\text{пред. } (x^n)_{n \longrightarrow \infty} = \infty$$

если $x < 1$, то этот предел есть **0** (показатель n предполагается целым положительным).

Решение. Если $x > 1$, то можно принять, что $x = 1 + h$ где h какое-нибудь положительное число. Тогда

$$x^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots$$

Отсюда следует, что при h положительном

$$x^n = (1 + h)^n > 1 + nh$$

При безграничном возрастании n произведение nh, а поэтому и сумма $1 + nh$, возрастает неограниченно; значит, пред. $(x^n)_{n \longrightarrow \infty} = \infty$.

Пусть теперь $x < 1$. Положим тогда, что $x = \frac{1}{x_1}$, где $x_1 > 1$. Тогда

$$\text{пред. } (x^n) = \text{пред. } \frac{1}{x_1^n} = \frac{1}{\text{пред. } x_1^n}$$

Но $x_1 > 1$; поэтому по доказанному выше пред. $x_1^n = \infty$ и, следовательно,

$$\text{пред. } (x_1^n) = {}^{1}/_{\infty} = \infty$$

Отсюда, между прочим, вытекают те два предложения о бесконечных геометрических прогрессиях, которые были нами ранее доказаны другим путем (ч. I, отдел 10 глава 3 §§ 251,б и 251,в), а именно, что член aq^n прогрессии при неограниченном возрастании n (т. е. при удалении от начала прогрессии) безгранично возрастает, если прогрессия возрастающая ($q>1$), и безгранично убывает (стремится к нулю), если прогрессия убывающая ($q<1$).

11. Доказать, что

$$\text{пред.}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)_{n\to\infty}=\frac{1}{2}$$

12. Доказать, что

$$\text{пред.}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}\right)_{n\to\infty}=\frac{1}{3}$$

13. Доказать, что

$$\text{пред.}\left[\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right]_{h\to0}=3x^2$$

14. Доказать, что

$$\text{пред.}\left[\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right]_{h\to0}=nx^{n-1}.$$

(n целое положительное число).

15. Найти $\text{пред.}\left[\frac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}\right]_{n\to\infty}.$

16. Построить график функции

$$y = x + {}^{1}/_{x}$$

Найти предельное значение этой функции, если $x \to 0$, оставаясь положительным, и предельное значение, если $x \to 0$, оставаясь отрицательным.

Подъем кривой и производные.

(отдел 15 §§ 319-333.)

17. Начертить график функции $y = x^2 - 3x + 2$; определить подъем кривой при $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; вообще при $x = x$.

18. То же для $y = 3x^2 - 2x + 5$.

Найти производные от функций:

19. $y = 5x$ $y = -7\,{}^{1}/_{2}\,x$.

20. $y = 3x - 4$ $y = 3 - 2x$.

21. $y = 10x^2$ $\qquad$ $y = -0{,}8\,x^2$.

22. $y = 3x^2 - 2x + 4$ $\qquad$ $y = x^2 - 2x - 1$.

Возрастание или убывание функций.

Maximum и ***minimum***.

(отдел 15 §§ 334-335.)

23. Построить график функции

$$y = {}^{1}/_{4}(\,3x^2 - 4x - 7)$$

между $x = -3$ и $x = 2$. Определить (и проверить на чертеже), при каких значениях x функция возрастает и при каких убывает. Имеет ли функция *minimum* или *maximum* и чему он равен?

24. Проследить изменение функции:

$$y = 7x^2 + 3x - 2,$$

т. е. определить, при каких значениях x функция возрастает при каких убывает и имеет ли *maximum*, или *minimum* и какие. То же для функций:

25. $y = -x^2 + 8x + 1$ $\qquad$ $y = -5x^2 + 4x + 1$

26. $y = {}^{1}/_{2}\,x^2 + 3x - 7$ $\qquad$ $y = 0{,}1x^2 - {}^{1}/_{4}\,x + 2$

27. $y = x^2 + 3$ $\qquad$ $y = -x^2 + 7$

28 $y = x^2 - 4x$ $\qquad$ $y = x^2 + 4x$

29. $y = 2x^2 - 8x + 5$ $\qquad$ $y = -3x^2 + 9x - 9$

30. $y = 2 - 3x - x^2$ $\qquad$ $y = 7 + 2x - 3x^2$

31. $y = (x - 3)^2 + (3x - 5)^2$

32. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ $\qquad$ $y = \sqrt{3 - 4x - 3x^2}$

Указание. Если радикал рассматривается только в положительном значении, то очевидно, что в двух последних примерах y изменяется в том же смысле, в каком изменяется подкоренная величина. Поэтому вопрос приводится к рассмотрению изменения трехчленов $x^2 - 2x + 10$ и $3 - 4x - 3x^2$

Maximum и ***minimum***.

(отдел 15§§ 334-335.)

33 Данное число a разделить на такие две части, чтобы произведение их было наибольшее из всех возможных.

Решение. Пусть одна часть, x, тогда другая часть равна $a - x$ и их произведение будет $x(a - x) = ax - x^2$. Производная этого двучлена есть $a - 2x$. Из признаков возрастания и убывания функций (§ 335) следует, что

если $a - 2x > 0$, т. е. $x < {}^1/_2\, a$, то функция возрастает;

если $a - 2x < 0$, т. е. $x > {}^1/_2\, a$, то функция убывает.

Чиячит при $x = {}^1/_2\, a$ наша функция получает ***maximum***. Тогда другая часть будет равна .-$a - {}^1/_2\, a = {}^1/_2\, a$, т. е. обе части окажутся одинаковы.

Мы приходим таким образом к следующему выводу, который полезно заметить: если сумма двух переменных чисел равна постоянному числу, то их произведение будет наибольшее из всех возможных тогда, когда эти числа сделаются равными между собою. Например, если $x + y = 10$, то произведение xy будет наибольшее, когда $x = y = 5$.
И действительно: **5 • 5 = 25**; **6 • 4 = 24**; **7 • 3 = 21**; **8 • 2=16** и т. д.

Выводом этим приходится иногда пользоваться для решения различных задач на ***maximum.*** Приведем этому примеры.

34. Из всех прямоугольников с данным периметром какой будет иметь наибольшую площадь?

Решение. Пусть данный периметр есть $2p$, основание x и высота y. Тогда площадь равна xy. Так как $x + y$ есть полупериметр, равный постоянному числу p, то ***maximum*** произведения xy будет при $x = y$, т. е. тогда, когда прямоугольник сделается квадратом.

35. В круге данного радиуса r вписать прямоугольник о наибольшею площадью.

Решение. Если x и y будут основание и высота вписанного прямоугольника, то $x^2 + y^2 = r^2$. Требуется при этом условии найти ***maximum*** произведения xy. Очевидно, что ***maximum*** этого произведения будет при тех же значениях x и y, при которых будет ***maximum*** квадрата его. Но $(xy)^2 = x^2y^2$ и $x^2 + y^2$ = постоянному числу r^2. Значит, ***maximum*** x^2y^2, будет при $x^2 = y^2$, т. е. при $x = y$; тогда же будет и ***maximum*** **xy**. Искомый прямоугольник должен быть квадрат.

36. В данный треугольник вписать прямоугольник с наибольшею площадью так, чтобы его основание лежало на основании треугольника, а две вершины упирались в боковые стороны его.

Решение. Обозначим основание и высоту треугольника b и h и прямоугольника x и y.

Из подобия треугольников находим: $x : b = (h - y) : h$; откуда: $x = \frac{b(h - y)}{h}$ Подставив в выражение площади прямоугольника xy на место x найденную величину, получим:

площадь прямоугольника $= \frac{b(h - y)y}{h}$

Требуется найти, при каком значении y эта дробь будет иметь наибольшее значение. Но в этой дроби знаменатель и множитель b в числителе суть числа постоянные; поэтому дробь получит наибольшее внечение тогда, когда произведение $(h - y)y$ сделается наибольшим. Но в этом произведении сумма сомножителей $h - y$ и y есть число постоянное; вследствие этого ***maximum*** произведения $(h - y)y$ будет при $(h - y) = y$, т. е. при $y = {}^1/_2\, h$.

37. Из всех прямоугольников, вписанных в круг данного радиуса r, какой имеет наибольший периметр?

Решение. Вопрос приводится к нахождению ***maximum*** суммы $x + \sqrt{4r^2 - x^2}$. Вместо этой суммы нам выгоднее искать ***maximum*** ее квадрата:

$$(x + \sqrt{4r^2 - x^2})^2 = x^2 + 4r^2 - x^2 + 2x\sqrt{4r^2 - x^2} = 4r^2 + 2x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

и, следовательно, ***maximum*** произведения $x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Квадрат этого произведения, равный $x^2(4r^2 - x^2)$, имеет ***maximum*** при $x^2 = 4r^2 - x^2$, так как сумма сомножителей есть число постоянное ($4r^2$). Значит, $x = r\sqrt{2}$, но тогда и высота прямоугольника будет равна $\sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2}$ т. е. прямоугольник будет квадратом.

38. В треугольнике даны основание (a) и сумма (s) его боковых сторон. Каковы должны быть эти стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшая?

Решение. Если x и y будут боковые стороны треугольника, то периметр его равен $x + y + a = s + a$, т. е. он есть величина постоянная. Обозначив его $2p$, мы можем воспользоваться формулой, выражающей площадь Δ треугольника по его трем сторонам:

$$\Delta = \sqrt{p(p - a)(p - x)(p - y)}$$

и искать ***maximum*** произведения $(p - x)(p - y)$.
Так как $(p - x) + (p - y) = 2p - (x + y) = 2p - s$, т. е. эта суммма есть величина постоянная, то ***maximum*** ее будет при $p - x = p - y$, т. е. при $x = y$. Значит, искомый треугольник должен быть равнобедренный.

39. Какой из всех прямоугольников с данною диагональю имеет: 1) наибольшую площадь; 2) наибольший периметр?

40. В круге данного радиуса r проведена хорда. Какова должна быть эта хорда, чтобы треугольник, образованный ею и двумя радиусами, проведенными к концам хорды, имел наибольшую площадь?

Указание. Обозначив длину хорды $2x$, мы приведем вопрос к нахождению ***maximum*** выражения $x\sqrt{r^2 - x^2}$, или его квадрата $x^2(r^2 - x^2)$. В окончательном результате увидим, что хорда должна быть стороною вписанного квадрата.

41. Какой из всех прямоугольников с данным периметром $2p$ имеет наименьшую диагональ?

Указание. Если стороны прямоугольника будут x и y, то диагональ его выразится $\sqrt{x^2 + y^2}$, а периметр $2x + 2y$. По условию задачи $2x + 2y = 2p$; следовательно, $x + y = p$ и $y = p - x$. Поэтому диагональ равна $\sqrt{x^2 + (p - x)^2}$ Наименьшая величина ее будет, очевидно, при наименьшей величине подкоренного выражения. Таким образом, вопрос сводится к нахождению наименьшего значения $x^2 + (p - x)^2 = 2x^2 - 2px + p^2$. Это значение найдется при помощи производной так, как это указано на примере, приведенном в конце § 335 отдел 15 этой книги.

Скорость как производная от пространства.

(отдел 15 §§ 337-341.)

42. Некоторое тело движется прямолинейно, таким образом, что в конце t-й секунды от начала движения оно оказывается удаленным от своего начального положения на расстояние e, определяемое равенством:

$$e = 4 — 3t + t^2.$$

Определить: а) закон скорости этого движения; б) когда скорость положительна, когда она отрицательна и когда равна нулю; в) найти ***maximum*** удаления тела от начального положения.

43. Решить те же вопросы, если удаление в выражается формулой:

$$e = 2t^2 — 4t + 5.$$

Ускорение как производная от скорости.

(отдел 15§§ 342-343.)

44. Тело движется таким образом, что скорость v этого движения в зависимости от времени t (сек.) выражается формулой:

$$v = 6t — 4t^2.$$

Определить: а) когда скорость возрастает; б) когда она убывает; в) ***maximum*** скорости; г) закон ускорения.

45. Тело движется по прямой линии; его удаление e от некоторой определенной точки O. взятой на этой прямой, выражается в зависимости от времени t формулой:

$$e = {}^3/_2 — 2t + {}^1/_2 t^2.$$

Определить: а) расстояние тела до точки O в момент, от которого начинается счет времени (в момент $t = 0$);
б) закон скорости;
в) какова скорость в момент $t = 0$ (что означает отрицательный знак перед величиною скорости?);
г) когда тело начинает двигаться в положительном направлении;
д) когда тело проходит точку O (объяснить двойной ответ);
е) каков закон ускорения относительно времени.

46. Те же самые вопросы относительно движения тела, которого расстояние от точки O определяется формулой:

$$e = 8 — 7 t + t^2$$

47. Точка движется по прямой Ox таким образом, что ее расстояние e от O в конце 2-ой секунды выражается формулой:

$$e = t^2 — 12\ t.$$

Найти закон скорости и закон ускорения. Когда скорость сделается равной нулю? В какой момент будет ***minimum e*** ?

48. Скорость некоторого прямолинейного движения выражается формулой: $v = 4 — 6\ t + 3t^2$. Определить: а) начальную скорость; б) начальное ускорение; в) ускорение в конце 2-й секунды; г) среднее ускорение в промежуток времени от конца 1-й секунды до конца 2-й.

Функция третьей степени.

(отдел 15 §§ 344—346.)

Исследовать следующие функции 3-й степени и построить их графики:

49. $y = x^3 — {}^1/_2x^2 — 6x + 2^1/_2$ $y = {}^1/_3 x^3 — x^2 — 3^1/_3 x + 8$

50. $y = x^3 — 6x^2 + 5x + 11$ $y = 3x^3 — 3x^2 — 5x + 2$.

51. $y = x^3 + 2x^2 — x — 1$.

52. $y = x^3 — 7x — 4$;

53. $y = x^3 — 13x + 12$;

54. $y = x^3 — 7x + 5$;

55. $y = x^2(6 — x)$.

Замечание. Если значения данной функции настолько велики, что их неудобно изобразить на чертеже, то можно все их уменьшать в несколько раз. Например, при исследовании функции:

$$y = x^3 + 15x^2 + 12\ x — 27.$$

удобнее уменьшить значения функции в **9** раз, т. е. взять функцию:

$${}^1/_9\, y = {}^1/_9\, x^3 + {}^5/_3\, x^2 + {}^4/_3\, x — 3.$$

Графическое решение уравнения 3-й степени.

(отдел 15§ 347.)

Решить графически следующие уравнения:

56. $x^3 + x — 4 = 0$. 57. $x^3 —3x = —2$.

58. $x^3 —3x =1,5$. **59.** $x^3 —3x + 1 = 0$.

60. $x^3 + x —7 = 0$. **61.** $x^3 —x — 1 = 0$

62. $x^2 — {}^2/_x = 1$. **63.** $x^2 — {}^2/_x = 4$.

64. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} = 3$ **65.** $x^3 — 4x^2 + 5 = 0$.

Замечание. Последний пример можно свести к построению параболы 3-й степени $y = x^3$ и параболы 2-й степени $y = 4x^2 — 5$.

Функция вида $y = {}^a/_x$

(отдел 15§§ 348-349.)

66. Построить график $y = {}^4/_x$ между $x = — 4$ и $x = + 4$.

Найти предельные значения при $x = \pm \infty$ и $x = 0$. Найти производную от этой функции и при ее помощи определить, где функция возрастает и где убывает и куда направлена ее вогнутость.

67. Построить график $y = — {}^1/_x$. Сравнить его с графиком $y = {}^1/_x$ (черт. 23)'

68. Построить графики функций:

1) $y = x + {}^1/_x$ 2) $y = x — {}^1/_x$

Найти производные этих функций и при их помощи решить вопросы о возрастании или убывании функций, а также о ***maximum*** и ***minimum*** их.

Замечание. Графики указанных функций можно, конечно, строить, составив предварительно таблицы их значений для нескольких произвольно взятых значений x. Но можно поступить и так: построить (при одних и тех же осях и в одном и том же масштабе) график функции $y = {}^1/_x$ (это будет гипербола, изображенная на черт. 23) и график функции $y = x$ (это будет биссектриса углов xOy и $x'Oy'$). Затем все ординаты биссектрисы увеличить (для функции $y = x + {}^1/_x$ или уменьшить (для функции $y = x — {}^1/_x$) на соответствующие ординаты гиперболы.

Этот прием можно употреблять вообще тогда, когда данная функция представляет собою сумму или разность двух других функций.

69. Построить графики $x^2 — 7$ и ${}^4/_x$. Найти точки пересечения и при их помощи определить корни уравнения $x^3 — 7x — 4 = 0$ (т. е. уравнения $x^2 — 7 = {}^4/_x$).

70. Построить графики $y = {}^1/_x + 1$ и $x^2 + 2x$ между $x = — 3$ и $x = 2$. Найти точки пересечения и при их помощи решить уравнение $x^3 + 2x^2 — x — 1 = 0$.

Уравнение прямой.

(отдел 16 §§ 350-352; повторить отдел 3 глава 3 §§ 115-117 части I).

71. Каково будет уравнение прямой, параллельной оси x-ов и отсекающей от оси y-ов отрезок, равный $+2$; $+3\,{}^{1}/_{2}$; -4; $-10{,}5$?

72. Каково будет уравнение прямой, параллельной оси y-ов и отсекающей от оси x-ов отрезок, равный $+3$; -5; (вообще m)?

73. Какая прямая выражается уравнением: а) $y = 0$; б) $x = 0$?

74. Что можно сказать о прямой, выражаемой уравнением вида $y = ax$: а) если $a > 0$; б) если $a < 0$?

75. Какая прямая выражается уравнением: а) $y = x$ б) $y = -x$?

76. Чему равен угловой коэффициент прямой, выражаемой следующим уравнением:

а) $y = 2x + 5$ б) $y = x - 3$ в) $y = {}^{1}/_{2}\,x$

г) $y = 7 - 3x$ д) $y = -0{,}5x$ е) $y = -x$

77. Чему равны угловой коэффициент и начальная ордината прямой, выражаемой уравнением:

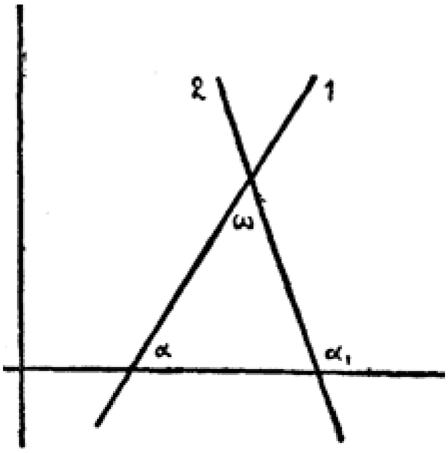
а) $3x + 2y = 10$ б) $-0{,}7y + {}^{3}/_{4}\,x - 5 = 0$ в) $ax + by = c$?

78. Каким уравнением выражается:

а) ось x - ов; б) ось y-ов?

79. Если две прямые, выражаемые уравнениями вида: $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$ параллельны между собою, то что можно утверждать об угловых коэффициентах a и a_1 ?

80. Найти угол, образуемый двумя пересекающимися прямыми $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$.



Черт.1

Решение. Из чертежа 1-го видно, что $\omega = \alpha_1 - \alpha$; следовательно,

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\ (\alpha_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{a_1 - a}{1 + aa_1}.$$

Пусть, например, $y = 2x — 3$ и $y = 5x + 1$. Тогда

$$\text{tg}\,\omega = \frac{5-2}{1+5\cdot 2} = \frac{3}{11}$$

и **log tg** ω = **log 3 — log 11 = 0,4771 — 1,0414 =** $\bar{1}$**,4357**; $\omega = 15°15'$ (приблизительно).

81. Найти условие перпендикулярности двух прямых $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$.

Решение. Из предыдущей задачи видно, что если $\omega = 90°$, то **tg** $\omega = \infty$ и $1 + aa_1 = 0$; следовательно, искомое условие есть следующее:

$$a_1 = — {}^1/_a$$

Наиример, прямые $y = 2x — 3$ и $y = — 0,5x — 3$ перпендикулярны, так как $—0,5 = —{}^1/_2$

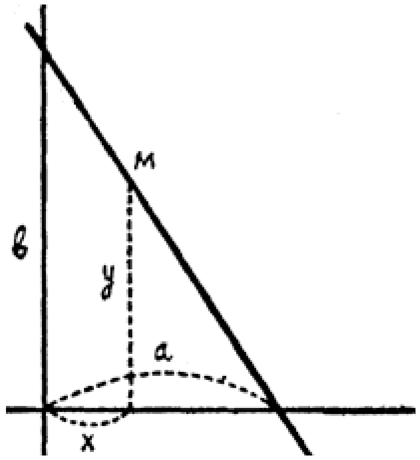
82. Если прямая выражается уравнением:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

то что означают здесь a и b ?

Решение. Положив в уравнении $x = 0$, найдем: $y = b$. Значит, на прямой находится точка $(0,b)$, т. е. прямая отсекает, от оси y-ов отрезок, равный b. Равным образом, положив $y = 0$, найдем: $x = a$. Значит, прямая отсекает от оси x-ов отрезок, равный a.

Это же можно видеть из чертежа 2-го.



Черт.2

Из подобия треугольников следует, что ординаты произвольной точки **M** прямой удовлетворяют пропорции:

$$y : b = (a — x) : a,$$

откуда: $ay = ab — bx$; $bx + ay = ab$. Разделив все члены на ab, найдем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Составить уравнение прямой, проходящей через точку:

83. **(2,5)** **(—2,5)** **(2,—5)** **(— 2,—5)**

84. **(0,7)** **(0,—7)** **(3,0)** **(—3,0)**

Составить уравнение прямой, проходящей через следующие пары точек:

85. **(1,5)** и **(2,3)** **(—3,2)** и **(7,—4)**.

86. **(0,0)** и **(5,6)** **(0,4)** и **(— 2,—3)**.

87. **(0,7)** и **(2,0)** **(—2,—3)** и **(7,8)**.

88. Даны две точки: **(2,5)** и **(7,3)**. Найти расстояние между ними.

Найти расстояние между двумя точками каждой из следующих пар:

89. **(—3,5)** и **(2,3)** **(— 3,5)** и **(2,—3)**.

90. **(3,—5)** и **(2,3)** **(3,—5)** и **(—2,—3)**.

91. Проверить, что если даны две точки: (x_1 , y_1) и (x_2, y_2), то при всех возможных случаях расположения этих точек расстояние l между ними выражается формулой:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Уравнение окружности.

(отдел 16 § 353.)

92. Написать уравнение окружности, центр которой совпадает с началом координат и радиус равен: а) **5**; б)$^{8}/_{3}$; в) **2,7**.

Написать уравнение окружности, радиуса **10**, центр которой лежит в точке:

93. 1) **(12,13)** 2) **(10,13)** 3) **(10,10)**

94. 1) **(7,13)** 2) **(7,8)** 3) **(0,11)**

95. 1) **(0,5)** 2) **(12,0)** 3) **(3,0)**

96. 1) **(—2,4)** 2) **(—2,—3)**, 3) **(7,—5)**

97. Найти радиус окружности, выражаемой уравнением:

а) $x^2 + y^2 = 100$ б) $x^2 + y^2 = 50$.

Показать, что следующие уравнения выражают окружности, найти их радиусы (перед знаками квадратных радикалов надо подразумевать оба знака ±):

98. $25x^2 + 25y^2 = 289$ $4x^2 + 4y^2 = 49$

99. $y = \sqrt{16 - x^2}$ $\qquad$ $y = \sqrt{36 - x^2}$.

100. $y = \sqrt{20 - x^2}$ $\qquad$ $y = {}^{1}/_{3}\sqrt{100 - 9x^2}$

101. $y = {}^{1}/_{2}\sqrt{81 - 4x^2}$ $\qquad$ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

102. $(x + 3{}^{1}/_{3})^2 + (y - 4)^2 = {}^{81}/_{4}$

103. Показать, что уравнение

$$3x^2 + 3y^2 + 8x - 6y = 20$$

(у которого коэффициенты при x^2 и y^2 одинаковы и нет числа, содержащего xy) есть уравнение круга; определить его радиус и положение центра.

Решение. Разделим все члены на общий коэффициент при x^2 и y^2 :

$$x^2 + y^2 + {}^{8}/_{3}x - 2y = {}^{20}/_{3}$$

или

$$x^2 + {}^{8}/_{3}x + y^2 - 2y = {}^{20}/_{3}$$

Чтобы дополнить сумму первых 2 членов до полного квадрата, надо к ней добавить $({}^{4}/_{3})^2$; чтобы сделать то же самое с суммой 3-го и 4-го членов надо добавить к ней $1x^2$. Добавим же к каждой части уравнения по $({}^{4}/_{3})^2 + 1$, т. е. по ${}^{25}/_{9}$; тогда получим:

$$(x + {}^{4}/_{3})^2 + (y - 1)^2 = {}^{20}/_{3} + {}^{25}/_{9} = {}^{85}/_{9}.$$

Отсюда видно, что уравнение представляет окружность, которой центр находится в точке $(-{}^{4}/_{3},\ 1)$ и радиус равен $\sqrt{{}^{85}/_{9}} = {}^{1}/_{3}\sqrt{85}$

104. Показать (таким же приемом, какой указан в решении предыдущей задачи), что вообще уравнение вида:

$$Ax^2 + Ax^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

у которого коэффициенты при x^2 и y^2 одинаковы и нет члена с xy, выражает окружность; найти ее радиус и положение центра.

Найти радиус и положение центра окружностей, выражаемых уравнениями:

105. $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 24 = 0$

106. $x^2 + y^2 = 2y + 35$

107. $y = -7 \pm\sqrt{16 - x^2 - 6x}$

108. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$

109. $y = {}^{3}/_{2} \pm {}^{1}/_{2}\sqrt{20x - 4x^2 + 11}$

110. $5x^2 + 5y^2 - 9y - 38 = 0$

111. Вычислить (с точностью до 0,001) координаты точек, в которых прямая линия $y = 2x - 3$ пересекается с окружностью $x^2 + y^2 = 10$

Уравнение эллипса.

(отдел 16 §§ 357-361.)

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т. е. все они выражают эллипс, которого центр совпадает с началом координат и большая ось лежит на оси x - ов (перед радикалами надо подразумевать оба знака ±):

112. $x^2 + 4y^2 = 100$ $\quad 3x^2 + 16y^2 = 192$

113. $25x^2 + 81y^2 = 2025$ $\quad 4x^2 + 9y^2 = 144$

114. $\frac{5x^2}{9} + y^2 = 5$ $\quad \frac{25}{9}y^2 = 25 - x^2$

115. $y = {}^{1}/_{2}\sqrt{36 - x^2}$ $\quad y = {}^{2}/_{5}\sqrt{100 - x^2}$

116. $y = {}^{3}/_{8}\sqrt{64 - x^2}$ $\quad y = {}^{1}/_{2}\sqrt{20 - x^2}$

Найти положение центра и величину и положение осей эллипсов, выражаемых следующими уравнениями:

117. $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ $\quad$ 118. $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

119. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad$ 120. $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

121. $\frac{x^2}{4} + (y-5)^2 = 1$ $\quad$ 122. $(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 1$

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

т. е. что они выражают эллипс, центр которого лежит в точке (m,n) и большая ось параллельна оси x-ов:

123. $y = \pm {}^{4}/_{5}\sqrt{10x - x^2}$ $\quad$ **124**. $y = 1 \pm {}^{1}/_{4}\sqrt{108 - 9x^2 - 36x}$

125. На эллипсе, заданном уравнением

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

взята точка, которая при положительной абсциссе имеет ординату **1**. Составить уравнение касательной, проходящей через эту точку. Найти координаты точек пересечения этой касательной с осями координат.

126. То же, если точка взята на эллипсе: $y = \pm \frac{1}{5}\sqrt{25 - x^2}$ и при положительной ординате имеет абсциссу **3**.

Уравнение гиперболы.

(отдел 16 §§ 363—368.)

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, т. е. что они выражают гиперболы, которых оси расположены на осях координат; вещественная ось на оси x-ов, мнимая на оси y - ов; написать уравнения асимптот (перед знаками радикалов подразумеваются оба знака ±):

127. $9x^2 - 4y^2 = 36$

128. $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

129. $y = \frac{5}{3}\sqrt{x^2 - 9}$

130. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 64}$

131. $y = \sqrt{x^2 - 16}$

132. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 81}$

Каковы будут величины осей у гипербол:

133. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

134. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

135. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{18} = 1$

136. $x^2 - y^2 = 36$

Определить положение центра и осей гипербол, данных уравнениями:

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

т. е. что они выражают гиперболу, центр которой лежит в точке (m,n) и оси параллельны координатным осям, вещественная ось параллельна оси x-ов, мнимая ось параллельна оси y-ов:

139. $y = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 6x}$

140. $y = -3 \pm \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 10x}$

141. На гиперболе: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$ взята точка, которая при положительной абциссе имеет ординату **1**. Составить уравнение касательной, проведенной через эту точку, и найти точки пересечения ее о осями координат.

142. То же для гиперболы: $y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 49}$, если взятая на ней точка при положительной ординате имеет абсциссу, равную **8**.

Уравнение параболы.

(отдел 16 §§ 370-375.)

Определить положение вершины, оси и директрисы парабол, заданных следующими уравнениями:

143. $y^2 = 10x$ **144**. $y^2 = 6x$ **145**. $y^2 = 9x$

146. $y = \pm\sqrt{3x}$ **147**. $y = \pm\sqrt{7x}$ **148**. $y = \pm\sqrt{12x}$

(В этих шести случаях ось параболы лежит на оси x-ов и направлена в положительном ее направлении.)

149. $y^2 = —9x$ **150.** $y^2 = —10x$; **151**. $y^2 = —x$

(В трех последних примерах ось направлена в отрицательном направлении оси x-ов.)

152. $y^2 = 8x — 16$ **153**. $y^2 = 5x + 15$ **154**. $y = \pm\sqrt{2x + 8}$

(В последних трех примерах координаты вершины будут: $(2,0)$, $(—3,0)$ и $(—4,0)$; ось идет по положительному направлению оси x - ов.)

155. $(y + 2)^2 = 4x$; $y = 1 \pm\sqrt{16x}$; $(y — 4)^2 = 12x$

(Координаты вершины параболы: $(0, — 2)$, $(0,1)$ и $(0,4)$.

156. $2y^2 + 2y — 11x + 73 = 0$

Решение. Уравнение можно преобразовать так:

$$y^2 + y = {}^{11}/_{2}\, x — {}^{73}/_{2}$$

$$(y + {}^{1}/_{2})^2 = {}^{11}/_{2}\, x — {}^{73}/_{2} + {}^{1}/_{4}$$

$$(y + {}^{1}/_{2})^2 = {}^{11}/_{2}\, x — {}^{145}/_{4};$$

$$(y + {}^{1}/_{2})^2 = {}^{11}/_{2}\, (x — {}^{290}/_{44})$$

Отсюда видно, что вершина лежит в точке $({}^{290}/_{44}, —{}^{1}/_{2})$ ось параллельна оси x-ов и направлена в положительную сторону; параметр равен ${}^{11}/_{4} = 2\,{}^{3}/_{4}$

157. $y^2 + 6y — 9x = 0$ **158**. $y = {}^{1}/_{2}\, x^2$

159. $15y = x^2$ **160**. $— 8y = x^2$

Как мы видели в § 212 (ч. 1 отдел 9 глава 1), кривая, выраженная уравнением вида $y = ax^2 + c$, есть парабола $y = ax^2$, только перемещенная параллельным перенесением на c единиц вверх, если $c > 0$, и вниз, если $c < 0$. Ось параболы направлена по положительному направлению оси y-ов, если $a > 0$, и по отрицательному, если $a < 0$. Руководствуясь этим, определить положение вершины, оси и директрисы в следующих примерах:

161. $y = 2x^2 - 8$ $y = 3x^2 + 6$ $y = 5x^2 - 10$

162. $y = 3x^2 - 12$ $y = x^2 - 25$ $y = 4x^2 + 16$

163. $y = -3x^2 + 12$ $y = -4x^2 + 8$ $y = -2x^2 - 10$

Приняв во внимание отдел 9 глава 2 § 224 и отдел 15 глава 4 § 335, определить координаты вершины параболы и направление ее оси, а также решить вопрос о возрастании или убывании функции и о ее нулевых значениях (т. е. точках, в которых парабола пересекается с осью ***x*** - ов):

164. $y = x^2 + 5x + 4$ **165.** $y = x^2 + {}^{11}/_{6}\,x - {}^{5}/_{3}$

166. $y = {}^{8}/_{3} - {}^{2}/_{3}\,x - x^2$ **167.** $y = 2 + 4x - x^2$

168. $y = x^2 + {}^{3}/_{2}\,x - {}^{9}/_{2}$ **169.** $y = -x^2 + 4x - 5$

170. $y = 5 - 2x - x^2$ **171.** $y = -x^2 + 6x - 9$

172. На параболе $y = {}^{3}/_{2}\,x^2$ взята точка с абсциссой **2**. Составить уравнение касательной, проведенной через эту точку.

173. То же для точки с абсциссой **—2**.

174. На параболе $y = {}^{1}/_{3}\,x^2$ взяты две точки, у которых одна и та же ордината, именно **—12;** составить уравнения касательных, проведенных через эти точки.

Первообразная функция.

(отдел 17 §378.)

Найти первообразные функции по следующим производным:

175. $y' = a$ $y' = -5$ $y' = {}^{1}/_{5}$ $y' = 2{,}3$

176. $y' = x$ $y' = 3x$ $y' = {}^{1}/_{3}\,x$ $y' = 0{,}7x$

177. $y' = x + 2$ $y' = x - 7$ $y' = 2x + {}^{1}/_{2}$

178. $y' = 5x - 2$ $y' = 2a \pm b$ $y' = mx \pm p$

179. $y' = 5x^2$ $y' = -2x^2$ $y' = nx^2 \pm m$

180. $y' = 3x^2 + 1x$ $y' = 12x^2 - 4x$ $y' = 21x^2 + 8x - 2$

181. $y' = x^2$ $y' = 4x^3 - 7x$ $y' = ax^2 + bx + c$

182. $y' = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7 \quad y' = -\frac{1}{x^2}$

183. $y' = -\frac{2}{t^2} \qquad y' = \frac{1}{x^2} \qquad y' = \frac{a}{t^2} + b$

184. $y' = x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) \qquad y' = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

(в последних двух примерах надо предварительно раскрыть скобки).

Нахождение площади.

(отдел 17 § 377.)

185. Найти площадь, ограниченную прямой $y = 2x + 1$, осью x - ов и двумя ординатами, соответствующими абсциссам $x = 4$ и $x = 25$. Проверить полученное число посредством формулы элементарной геометрии для площади трапеции.

186. То же между $x = 1$ и $x = 10$; между $x = -1$ и $x = 15$.

187. Определить площадь, ограниченную параболой $y = 2x^2 + 3$, осью x - ов и 2 ординатами при $x = 3$ и $x = 9$.

188. То же между $x = 0$ и $x = 8$; между $x = 1$ и $x = 10$.

189. Определить площадь, ограниченную параболой $y = 3 + 4x + 3x^2$, осью x - ов и ординатами, соответствующим абсциссам $x = 1$ и $x = 2$.

190. Найти площадь, заключенную между осью x - ов и дугою параболы $y = 7x - x^2 - 10$, ограниченную точками пересечения этой кривой с осью x - ов.

191. Дана кривая $y = \frac{10}{x^2}$.Найти площадь, ограниченную этой кривою, осью x - ов и ординатами при $x = 2$ и $x = 8$.

192. Определить площадь, ограниченную кривою, выраженного уравнением $x^2y = x^3 + a^3$, осью x - ов и ординатами при $x = a$ и $x = 2a$.

193. Найти точку пересечения кривой $y = x - \frac{1}{x^2}$ с осью x - ов и затем определить площадь, ограниченную этой кривой и осью x - ов от точки пересечения до ординаты при $x = 2$.

По данному закону скорости найти закон пространства.

(отдел 17 § 379.)

Найти закон пространства, если:

194. $v = 2 + 3t$ и $e = 3$, если $t = 0$

195. $v = t^2 + 4t - 5$ и $e = 4$, если $t = l$

196. $v = 2 - \frac{1}{t^2}$ и $e = 3$, если $t = l$

197. $v = t^2 + \frac{1}{t^2}$ и $e = 4$, если $t = 2$

198. $v = (t - 1)(t - 3)$ и $e = 5$, если $t = 0$

199. $v = \frac{t^2 - 1}{t^2}$ и $e = 6$, если $t = 1$

200. Поезд движется между двумя последовательными остановками со скоростью $v = {}^1/_2\, t(2 - t)$, если скорость измерять километрами в минуту и время выражать в минутах, начиная от первой остановки; показать, что

1) все расстояние между остановками поезд проходит в **2** минуты;

2) ***maximum*** скорости будет $^1/_2$ *км* в минуту;

и 3) расстояние между остановками равно $^2/_3$ *км*.

По данному закону ускорения найти закон скорости.

(отдел 17 § 380.)

201. Камень брошен вертикально вниз со скоростью **30** *м* в секунду; ускорение от действия силы тяжести равно **9,8** *м* в секунду; найти скорость тела по прошествии t секунд от начала падения и пространство, которое камень пройдет в t секунд.

202. Тело движется по прямой линии с ускорением $w = 3t^2 + t - 2$. Найти ***maximum*** и ***minimum*** скорости, если известно, что когда $t = 1$, тогда $v = 10$.

203. Тело движется по прямой линии с ускорением $w = 2 + 6t$. Определить закон скорости, если известно, что $v = -2$, если $t = 0$.

Нахождение объема.

(отдел 17 §§ 381—383.)

204. Парабола $y^2 = 4ax$, которой ось расположена на оси x - ов (в положительном ее направлении), вращаясь вокруг этой оси, производит так называемый параболоид вращения. Найти объем, ограниченный поверхностью этого параболоида и плоскостью, перпендикулярною к оси x - ов в точке ее $x = b$. Показать, что этот объем равен $^1/_2$ объема цилиндра, описанного около параболоида.

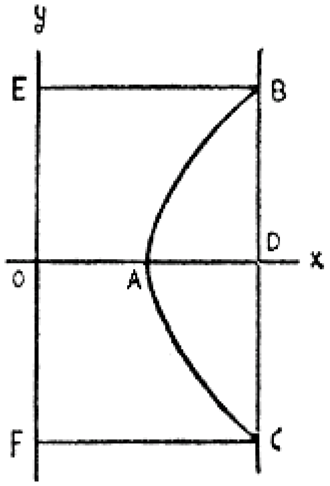
205. Взята часть гиперболы $y = {}^1/_x$, лежащей в угле xOy, и из концов ее проведены перпендикуляры на ось x - ов; один из этих перпендикуляров оказался на расстоянии a от оси y-ов, другой на расстоянии $b > a$. Найти объем тела, происходящего от вращения вокруг оси x - ов фигуры, ограниченной этой осью, двумя указанными перпендикулярами и дугою гиперболы. Показать затем, что если $b \longrightarrow \infty$, то этот объем приближается к конечному пределу.

206. Уравнение $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$ выражает эллипс, которого центр совпадает с началом координат и большая ось расположена на оси x - ов. Найти объем эллипсоида, получаемого вращением этого эллипса вокруг большой оси (предварительно надо найти оси эллипса).

207. Найти объем тела, производимого вращением вокруг оси x - ов кривой $y^2 = x(a — x)$.

208. Чертеж 3 -й изображает равностороннюю гиперболу $x^2 — y^2 = a^2$, пересеченную хордою **BC**, параллельною оси y - ов и отстоящею от нее на расстоянии **OD** = $2a$. Показать, что объем тела, получаемого вращением вокруг оси x - ов части **ABD**, равен объему шара радиуса a.

209. Показать также, что объем тела, получаемого вращением вокруг оси y-ов фигуры **EBACF** (черт. 3). равен половине объема цилиндра, получаемого вращением прямоугольника **EBCF**.



Черт.3

Делимость на $x — a$.

(отдел 18 §§ 391—395.)

210. Найти остаток от деления многочлена $x^4 — 3x^3 — 5x^2 + 20x — 8$ на $x — 1$; на $x + 1$; на $x — 2$; на $x + 2$; на $x — 3$; на $x + 3$.

211. Определить численную величину a в многочлене: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + 11$, чтобы он делился без остатка на $x + 1$.

212. Как можно быстро решить кубичное уравнение, если один его корень известен? Например, решить уравнение $x^3 — 6x^2 + 11x — 6 = 0$, которого один корень есть **1**.

213. Ученик запомнил, что делимость или неделимость двучленов $x^m — a^m$ и $x^m + a^m$ на двучлены $x — a$ и $x + a$ зависит от того, будет ли показатель m четное число или нечетное; но он забыл, когда делимость происходит при четном показателе и когда при нечетном. Как можно легко восстановить в памяти все эти 4 случая делимости?

Сложные радикалы.

(отдел 18 § 403.)

Преобразовать следующие сложные радикалы в сумму или разность двух простых радикалов:

214. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **215.** $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ **216.** $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$

217. $\sqrt{5\pm\sqrt{24}}$ **218.** $\sqrt{158+60\sqrt{6}}$ **219.** $\sqrt{11+\sqrt{105}}$

220. $\sqrt{27-7\sqrt{5}}$ **221.** $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}$

222. $\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ **223.** $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$

224. $\sqrt{a^2+x^2+\sqrt{a^4+a^2x^2+x^4}}$

225. Пусть a_n означает длину стороны правильного n- угольника, вписанного в круг радиуса **R**. Тогда, как известно из геометрии:

$$a_{2n}\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}}.$$

Преобразовать эту формулу в разность двух простых радикалов.

226. Найти необходимое и достаточное условие, чтобы корни уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$ могли быть выражены в виде суммы или разности двух простых радикалов.

Дополнительные Сведения о неравенствах.

(отдел 18 §§ 404 — 409.)

227. Показать, что при всяком вещественном значении x имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\geqslant\frac{x+1}{x^2+3}\geqslant-\frac{1}{6}$$

228. Доказать, что если a и b два положительные числа и $a > b$, то $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

229. Доказать, что если $n > 0$, то

$$\frac{n}{(n+1)(n+3)}<\frac{n+1}{(n+1)(n+4)}$$

230. Доказать, что если x и y два положительных неравных числа, то

$$4(x^3+y^3) > (x+y)^3.$$

231. Умножение обеих частей неравенства

$$F_1(x) > F_2(x)$$

на $f(x)$ приводит ли всегда к равносильному неравенству?

Если, например, обе части неравенства: $2x - 3 > x + 7$ умножим на $2 - x$, то получим ли равносильное неравенство?

Комплексные числа.

(отдел 18 §§ 410-415.)

232. Проверить равенство:

$$i^7 + i^{18} + i^{25} + i^{35} + i^{97} + i^{100} = 0.$$

Вычислить выражения:

233. $(x + i\sqrt{6})(x - i\sqrt{6})$ 234. $\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}$

235. $\sqrt{4 + 2\sqrt{-6}} \times \sqrt{4 - 2\sqrt{-6}}$ 236. $(3\sqrt{-2} + 2\sqrt{-3})^2$

237. $(1+i)^4$; $(-2\sqrt{-2})^6$

Проверить возвышением в квадрат или в куб следующие равенства:

238. $\sqrt{2i} + \sqrt{-2i} = 2$

239. $\sqrt[3]{i} = -i$ 240. $\sqrt{i} = \pm {}^1/_2\sqrt{2}(1+i)$

241. $\sqrt{-i} = \pm {}^1/_2\sqrt{2}(1-i)$ 242. $\sqrt[3]{+\sqrt{-a^6}} = -a\sqrt{-1}$

243. $\sqrt{1 + \sqrt{-2}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$

Выполнить указанные действия:

244. $(\sqrt{9 + 40i} + \sqrt{9 - 40i})^2$ 245. $(\sqrt[3]{1+i} + \sqrt[3]{1-i})^3$

246. $\dfrac{(a+ib)^2}{a-ib} - \dfrac{(a-ib)^2}{a+ib}$ 247. $\dfrac{\sqrt{-(1+i)} - i\sqrt{-(1-i)}}{\sqrt{-(1-i)} + i\sqrt{-(1+i)}}$

248. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы произведение (***a*** + ***bi***)(***c*** + ***di***) было: 1) число вещественное; 2) число мнимое.

249. То же для частного (***a*** + ***bi***)**:**(***c*** + ***di***).

250. Все ли действия над комплексными числами, выраженными под видом ***a*** + ***bi***, выполнимы?

Упростить выражения:

251. $\dfrac{1}{-1 + i\sqrt{3}}$ 252. $\dfrac{1}{-1 - i\sqrt{3}}$

253. $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$ 254. $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$

255. Обозначив для краткости:

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = a_1; \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = a_2 \text{ и } 1 = a_3,$$

проверить равенства:

1) $\alpha_1^{\mathbf{3}} = \alpha_2^{\mathbf{3}} = \alpha_3^{\mathbf{3}} = \mathbf{l;}$

2) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \mathbf{0}$;

3) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \mathbf{1}$;

4) $\alpha_1^{\mathbf{2}} = \alpha_2$;

5) $\alpha_2^{\mathbf{2}} = \alpha_1$;

6) $\mathbf{l} + \alpha_1 + \alpha_1^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$.

256. Доказать при помощи комплексных чисел, что всякое число, равное какой-нибудь степени суммы двух квадратов, есть само сумма двух квадратов.

Решение.

$$(a^2 + b^2)^m = [(a + bi)(a — bi)]^m = (a + bi)^m (a — bi)^m$$

Но если выполним, согласно биному Ньютона возвышение в степень, то найдем, что

$(a + bi)^m = \mathbf{A} + \mathbf{B}i$ и $(a — bi)^m = \mathbf{A} — \mathbf{B}i$, следовательно,

$$(a^2 + b^2)^m = (\mathbf{A} + \mathbf{B}i)(\mathbf{A} — \mathbf{B}i) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2.$$