



## ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

### МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЕ

Школьные программы, школьные учебники во всем мире постоянно изменяются, и это закономерно — быстро меняется окружающая жизнь. Меняется она и в нашей стране. Семимильные шаги НТР требуют от каждого активного члена нашего общества все большего и более глубокого знания фундаментальных наук. На их использовании основывается возможность по-новому и более эффективно решать многие задачи в нашей повседневной деятельности. В этих условиях школьные программы должны изменяться чаще, чем раньше, быть более гибкими. Они должны чутко отвечать на меняющиеся запросы, учитывать прогнозы будущего развития общества.

В октябре 1964 г. была создана объединенная комиссия АН СССР и Академии педагогических наук РСФСР по определению содержания школьного образования. Эта комиссия сделала важный шаг в направлении сближения школы с жизнью. В конце 1965 г. доклад этой комиссии был обсужден на расширенном заседании Президиума АН СССР. На заседании Отделения математики АН СССР были обсуждены и в принципе одобрены направления изменений программы по математике. Проект программы по математике, утвержденный МП СССР, был принят в качестве основы для дальнейшего уточнения и создания новых учебников. Вскоре после этого были созданы программы по математике, по тому времени вполне современные, и начато составление учебников. С тех пор прошло более 10 лет. Новые программы вошли в действие. Уже состоялись два выпуска учащихся десятых классов, прошедших полный курс по новым программам. Настало время для того, чтобы оглядеться, увидеть успехи и промахи, достижения и недостатки, неизбежные в таком большом деле, чтобы двигаться дальше вперед.

В постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 22 декабря 1977 г. «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду» поставлена задача привести методы обучения, содержание образования и воспитание учащихся в соответствие с требованиями жизни, разгрузить программы и учебники от чрезмерно усложненного и второстепенного материала. Учебные программы и учебники должны содержать в необходимом объеме основы соответствующих наук, обеспечивать политехническую, трудовую и воспитательную направленность изучаемых предметов, внутреннюю преемственность и логическую последовательность на всех ступенях обучения.

Для большинства школьников десятилетнее обучение должно закладывать основу их восприятия мира, определять их способность и подготовленность к практической деятельности в современных условиях и в ближайшем будущем.

Есть разные взгляды на то, какова будет эта деятельность. Несколько лет назад одному из авторов довелось беседовать на эту тему с одним американским коллегой. Он рисовал себе общество будущего как общество потребителей всевозможных благ. Автоматы разгрузят людей от труда по созданию материальных ценностей. Жизнь каждого будет полна наслаждений. Реальная жизнь в капиталистических странах мало похожа на эту картину.

В нашем сознании общество будущего, к которому мы готовим наших детей, рисуется состоящим из людей творческого труда на всех уровнях деятельности.

В последние десятилетия во всех областях науки и техники время ставит все новые и новые задачи. В обозримом будущем человечеству будет нужна непрерывно обновляющаяся технология. Естественно-научная база этой технологии расширяется, будет расширяться и дальше.

Человечество все больше занимает исследование удивительных тайн космоса, микромира и самого поразительного из того, что есть на земле, — жизни. Человек будущего должен быть подготовлен к пониманию этих явлений. На наших глазах повсеместно происходит математизация наук. Проникновение математики не только в другие науки, но и во все области человеческой деятельности — явление неотвратимое. Жизнь вместе с потоком всего нового стучится в двери школы.

Сейчас трудно назвать профессию, которая не имела бы дела с ЭВМ. На предприятиях широко распространены станки с программ-

ным управлением и другие средства автоматизации. Школа должна научить ими пользоваться, научить пониманию того, что такое модель, алгоритм и программа, дать умение использовать нужную программу или самому провести на микромашинах нужный расчет.

Начало века в культурных странах всего мира характеризовалось пересмотром сравнительной роли и метода классического и реального образования. Античные языки, считавшиеся одним из главных атрибутов образованного человека, уступили место точным наукам. И в то же время печать античности или в лучшем случае эпохи Возрождения оставалась даже в программах и учебниках реальных училищ.

Образованный человек вместо знания латинского и греческого языков должен был теперь знать, как с помощью таблиц логарифмов тригонометрических величин решаются треугольники, какими искусственными приемами можно вычислить объемы и поверхности шарового сегмента или шарового слоя. Он должен был уметь решать изысканные задачи на построение циркулем и линейкой и др. Многие из этого в самом деле было полезно будущим математикам или физикам. Уместно и сейчас ознакомиться с этим интересующихся школьников в кружках и на факультативных занятиях. Но сохранять эти разделы в общеобразовательной программе заведомо не нужно.

Слишком много другого, неизмеримо более важного для самой математики и ее жизненных применений, нужно сейчас знать любому грамотному человеку. Драгоценных школьных часов еле хватает для самого необходимого.

Между тем содержание курса математики оставалось у нас почти неизменным до середины 60-х гг. Сохранение этого положения обрекало бы на отставание от передовых стран в самом важном — подготовке кадров.

Кроме очевидного отставания школьного курса математики от хода жизни отметим еще то, что многие учащиеся слабо усваивали этот курс. В статье методиста МП РСФСР И. С. Петракова «Итоги контрольных работ по математике, проведенных Министерством просвещения РСФСР в мае 1962 г.» (Математика в школе, 1962, № 6) приведены такие факты и цифры. В простых задачах, требовавших лишь элементарных вычислений, около 40% учащихся шестых классов ошиблись в действиях над положительными и отрицательными числами. В девятых классах лишь 72% учащихся справились с совсем простыми вопросами, касавшимися графика функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

В контрольных и экзаменационных работах 1965/66 учебного года (см. статью методиста МП РСФСР А. В. Соколовой в № 1 «Математики в школе» за 1967 г.) лишь 52,5% школьников сумели правильно построить треугольник с данными углами, провести в нем высоты и измерить угол между стороной и высотой. Среди причин, которые вызвали эту, в общем неудовлетворительную, картину, можно назвать многие. Одной из них, на наш взгляд, явились и недостатки программы, действовавшей в то время. Несмотря на то что она отработывалась десятки лет, в ней не было достаточного идейного единства и системы в подаче материала. Школьников в своей массе курс математики мало привлекал.

В программах, разработанных в период реформы 60-х гг., наиболее существенными были несколько нововведений. В программы IX и X классов был введен математический анализ. Вместо курса алгебры появился курс «Алгебра и начала анализа».

Современное научное мировоззрение, жизненная практика пронизаны идеями движения. Без понимания того, что такое переменное, без понимания функциональной зависимости, без графиков, без производной и интеграла нельзя по-настоящему понять ни одного физического явления, большинства производственных процессов. Курс физики IX и X классов построен на этих понятиях. С их помощью строятся модели почти всех без исключения физических явлений. По старой практике преподавания все эти математические понятия зачастую вводились в курсах физики задолго до появления их в математике, где они обычно или вообще не рассматривались, или рассматривались слишком поздно. Скорость и ускорение — тому пример.

Такие геометрические вопросы, как вычисление площадей и объемов, решаются с помощью элементарного интегрирования намного проще и естественней, чем с помощью античных или средневековых приемов, которые преподносились учащимся старших классов нашей школы. Элементы анализа при прохождении алгебры введены сейчас в программы школьного обучения всех развитых стран и притом на достаточно ранних стадиях обучения. Совершенно необходимо было сделать это и в советской школе.

Второе существенное новшество в программе 60-х гг. — это включение в геометрию основ векторной алгебры и начал аналитической геометрии в виде координатного метода. Как и в случае анализа, векторные представления в физике стали важнейшими неотъемлемыми элементами физической науки. Учащиеся

встречались с ними в курсах физики, и не только логически оправданным, но просто необходимым было, чтобы эти, в сущности несложные и легко воспринимаемые учащимися понятия, и в математике рассматривались и излагались раньше или одновременно с изучением тех явлений реального мира, которые описываются с их помощью.

Третий, впервые введенный в новых программах вопрос — это отображения. Каждому современному человеку приходится иметь дело с географическими картами, планами местности, планами зданий, чертежами технических изделий и другими примерами отображений. В прежних курсах отображения поверхностей вообще не рассматривались; не изучалась и симметрия в разных ее видах. Как это ни удивительно сейчас звучит для нас, все это не считалось математикой. В новых программах все эти вопросы отражены.

Первоначально в программу 60-х гг. предполагалось включить элементы теории вероятностей. От этого пришлось отказаться из-за недостатка времени. Современная теория вероятностей может рассматриваться как раздел теории меры. Надо отметить, что в новых программах и учебниках имеется некоторая пропедевтика возможного впоследствии введения в школу начал теории вероятностей. Элементарная терминология: объединение и пересечение геометрических фигур в программе есть, что удачно сочетается с изучением неравенств и без труда усваивается школьниками. Этот язык и соответствующие представления интересны еще и с другой стороны. Они являются подготовкой к простейшим основным операциям математической логики, облегчая понимание логических конструкций.

В наше время логический анализ и символика стали повседневным средством описания структуры и процессов управления различными объектами и видами деятельности.

В разных областях человеческой деятельности приходится решать вопросы выбора оптимального решения в многовариантных ситуациях. Не редкость в строительной конторе увидеть сетевой график, изображающий сложные логические и временные связи отдельных работ и этапов строительства. Для задач линейного программирования, используемых в цехе, на ферме и в автохозяйствах, основным орудием являются системы неравенств, их геометрическая интерпретация. Естественно желать, чтобы человек, окончивший среднюю школу, мог их сознательно воспринять.

Из-за недостатка времени пришлось во время проведения реформы пожертвовать и комбинаторикой, и комплексными числами, не

смотря на их полезность и большую привлекательность для учащихся.

Возрастные особенности человека таковы, что главную общую часть нужных ему знаний и навыков он должен приобретать в первые 16—17 лет своей жизни, из которых около 10 лет он проводит в школе.

Для тех, кто будет продолжать учиться в высшей школе, срок обучения растягивается иногда еще до 10 лет, а иногда и на всю жизнь, но не это меньшинство следует иметь в виду при построении школьных планов. Сроки пребывания в школе — сжатые, поэтому учебный материал нужно давать экономно, доходчиво, творчески. Может быть, влияние и искусство педагога подчас оказываются даже в большей степени важными для усвоения предмета, чем программы и учебники.

Для того чтобы вложить в рамки 10-летнего образования все новые разделы, пришлось использовать два рода ресурсов. Во-первых, несколько увеличить интенсивность работы в младших классах. Как это было твердо установлено психологами, дети, учившиеся по до-реформенным программам, искусственно задерживались в своем развитии. Ребенок, прекрасно усвоивший на жизненном опыте, что такое отрицательная температура, не имел права говорить об отрицательных числах до VI класса школы. Ему предлагалось решать «по вопросам» специально подобранные задачи, которые, кстати сказать, осваивались не более чем третью учащихся. Новые программы значительно раньше вводят элементарные алгебраические действия, уравнения, неравенства.

Необходимо учитывать, что в условиях насыщения техникой производства и быта, наличия телевизора, радио, магнитофона, повсеместного дошкольного обучения, общего культурного роста населения дети развиваются гораздо раньше и лучше подготовлены к восприятию математических понятий.

Вторым источником учебного времени явилась разгрузка от устарелого материала, о котором мы говорили выше. Исключен был материал, который забывается почти сразу после окончания школы и бесполезен почти для всех. Не все, конечно, равноценно в исключенных из программы вопросах. Для будущих математиков некоторые из них давали возможность развить в себе находчивость, любовь к строгим математическим построениям. Для тех ребят, кто хотел бы приобщиться к изящным и увлекательным главам, лежащим вне школьных программ, остаются кружки и факультативные занятия.

В целом введение новых программ по ма-



тематике явилось огромным шагом вперед. Действующие сейчас программы стоят в основном на уровне мировых стандартов; в большинстве развитых стран изучение основных понятий математического анализа и векторной алгебры составляет неотъемлемую часть школьного курса математики. Нужно воздать должное проницательности и чувству гражданского долга академика А. Н. Колмогорова, под председательством которого в конце 60-х гг. был разработан проект перестройки математического образования в средней школе и который принял большое и непосредственное личное участие в осуществлении тяжелой задачи проведения проекта в жизнь. Необходимо отметить, что А. Н. Колмогорову также принадлежит большая заслуга организации в 50—60-х гг. специальных математических школ при университетах, где на первых порах он с ближайшими учениками сам вел преподавание. Эти школы способствуют отбору и развитию школьников с математическими способностями и играют немалую роль для дела подготовки кадров по математике, физике и новым областям техники. Реформа школьного образования была проведена вовремя и в целом достаточно успешно. Одним из свидетельств этого является то, что, по общему мнению, окончившие школу по новой программе оказались лучше или, во всяком случае, не хуже подготовленными к восприятию вузовских курсов, чем абитуриенты прошлых лет.

В отдельных случаях закончившие школу по новым программам, возможно, показали на приемных экзаменах менее прочные навыки в решении задач. Однако это в большой степени объясняется тем, что сами экзаменаторы еще не перестроили требования и оценку знаний в соответствии с происшедшими изменениями.

Конечно, при проведении такой большой и чрезвычайно трудной работы, как коренная перестройка всего школьного образования, затрагивающая миллионы людей, трудно было сразу отработать практику работы в новых условиях, избежать отдельных промахов, порой серьезных. С нашей точки зрения, в действующих программах есть отдельные вкусовые увлечения, некоторые диспропорции и другие недостатки, впрочем, мало значительные в сравнении с большим положительным вкладом в математическое образование, итогами всего этого дела.

Более серьезной критики заслуживают новые учебники для старших классов. По-видимому, на их качестве сказалось то, что реформе нужно было провести в сжатые сроки.

Все еще недостаточно согласованными ока-

зались курсы математики и физики. Понятие производной у физиков появляется в VIII классе, а учителя математики знакомят с ним учащихся только в IX. По-разному трактуется в обоих этих предметах и понятие вектора.

В № 3 журнала «Математика в школе» за 1979 г. в рубрике «Проблемы и суждения» опубликована статья «О школьном математическом образовании», содержащая общую критику проведенной реформы среднего математического образования. Еще одна статья, написанная в безапелляционном тоне, состоящая в основном из личных выпадов, без какой-либо серьезной аргументации, опубликована в газете «Социалистическая индустрия» (№ 68 от 21 марта 1979 г.). Она написана в неуместной эмоциональной манере, со ссылками, вместо деловых аргументов, на крик души каких-то неизвестных учениц, на песенку А. Пугачевой и т. п. Останавливаться на разборе последней статьи, понятно, нет надобности.

Статья в «Математике в школе» содержит ряд замечаний, заслуживающих внимания. Часть этих замечаний высказывалась и раньше (правда, не на страницах печати).

К сожалению, авторы статьи, исходя из этих отдельных, частных критических замечаний, в своих выводах безосновательно объединяют и огульно осуждают и различные учебники, и программы, и весь замысел школьной реформы.

Остановимся на некоторых из этих замечаний. Наиболее спорным в новых учебниках является, по-видимому, то, что в них значительное место отводится теоретико-множественным представлениям, кое-где используемым в курсе без надобности. Следует ли так подробно останавливаться на рассмотрении отрезка или области как совокупности точек, различных вариаций этих определений, учитывая, что эти детали, в сущности, дальше в школьном курсе не очень нужны. Хотя в целом теоретико-множественные представления и обозначения применительно к конечным и другим конкретным множествам необходимы для понимания логического и математического описания реальных объектов и процессов. Скорее можно было бы поставить в упрек, что они пока недостаточно развернуты, не проиллюстрированы достаточными практическими применениями и задачами.

Геометрические фигуры, изучаемые в школьной математике,— всегда либо гладкие многообразия размерностей 0, 1, 2, 3, либо объединение таких многообразий. Иногда эти многообразия с краем, иногда без края; граница геометрической фигуры всегда снова многообразие меньшей размерности. Учащим-

ся этого вполне достаточно. Кстати, о размерах геометрических фигур, как нам кажется, нужно говорить с самого начала. отождествление геометрической фигуры и множества точек представляется неудачным.

В теоретико-множественной терминологии очень просто звучит определение геометрического места как множества всех точек, обладающих данным свойством. Так определяются окружность, сфера и др. Удобства такого определения — часто кажущиеся. Как нам представляется, лучше определить геометрическое место как фигуру (многообразие), у которой все принадлежащие ей точки и только они обладают нужным свойством. Формальное представление о континууме, отрезке или области как состоящим из точек, в сущности не требуется.

Второе замечание, касающееся геометрии, является чисто терминологическим. Вместо принятого в русской терминологии термина «равенство» фигур в учебниках предлагается ввести слово «конгруэнтность». Это представляется спорным. Термин «равенство» вовсе не вызывал никакой путаницы и не означал тождественности фигур, как, может быть, казалось авторам этого новшества.

Однако этот термин как более специальный, не тождественный общему термину «равенство», имеет свои преимущества. Во всяком случае и применяя его, обоснованно использовать и термин «равенство», говоря, скажем, о равнобедренном треугольнике.

Думается, что мало удачно введение векторных величин в геометрии как параллельных переносов. Векторные величины в окружающем мире имеют очень разнообразную природу: здесь и силы, действующие на тела, и напряжение электрических, магнитных и гравитационных полей, и скорости, и ускорения, и сдвиги. Определение вектора через один и не самый характерный пример реализации этого понятия отвлекает учащихся от самого существенного, что содержится в этом понятии, и к тому же требует еще и кропотливой подготовки. Мы уж не говорим о векторных пространствах, с которыми будут впоследствии иметь дело некоторые ученики.

В обычном представлении вектор есть направленный отрезок или набор вещественных чисел (координат вектора), что равносильно; и это легко объяснить ученикам. Векторные величины в природе выражаются в размерных единицах: в сантиметрах, метрах в секунду и т. п. с указанием направления, т. е. векторами. Вероятно, так и следует рассказывать об этом в школьных учебниках.

Кажется излишне абстрагированным и изложение ряда вопросов в курсе алгебры и начал анализа. Авторы учебника для VI—VIII классов определяют, например, функцию как особый вид бинарных отношений. Отдельно рассматриваются общие свойства этих отношений: рефлексивность, симметричность и транзитивность. Вряд ли такая абстракция здесь приносит пользу. При определении обратной функции вместо рассмотрения величин, находящихся в определенных взаимоотношениях друг с другом, речь опять ведется об абстрактных отношениях. Такой способ изложения, на наш взгляд, скорее всего затуманивает суть понятия обратных функций.

По-видимому, авторы учебника хотели определить функцию вначале в более общем виде, чтобы затем рассмотреть нужные им понятия как частный случай. В современной математике есть, однако, и другие весьма важные обобщения понятия функции, которые непрямо и нелегко сводятся к отображениям множеств (это, например, «обобщенные функции»).

Может быть, в школьном курсе педагогически правильно было бы первоначально рассматривать числовые функции одной переменной с их производными и интегралами, а общее понятие функции давать позднее.

Могут показаться спорными предлагаемые присмыслы записи решений уравнений и неравенств. Так, обычная запись корней уравнения  $x^2 - 4x + 3 = 0$  в виде  $x_1 = 1, x_2 = 3$  заменена другой:  $\{1; 3\}$ . Вместо того чтобы писать  $x > -1$ , что обычно делают даже многие математики, пишут  $\{x | x > -1\}$ . Однако и примененная форма записи как предиката, соответствующая принятой в математической логике, кибернетике, технике управления, программировании, вплоть до технических инструкций, и приучение учащихся к такой записи еще в школе с предвидением будущего, возможно, вполне оправданны.

Реформа среднего образования была связана с очень значительными трудностями, вызванными тем, что всеобщее среднее образование обязано удовлетворить большое количество разных запросов. Хотя в высшую школу перейдет меньшинство учащихся, тем не менее подготовка школьников должна быть такой, чтобы любой из них по окончании средней школы, при условии хорошего усвоения материала и приобретения соответствующих навыков, мог поступить в любой вуз страны (не считая тех, где требуется специальная одаренность и подготовка: консерватории, художественные вузы, институты физкультуры и т. п.). Это означает, что кроме знаний и



навыков, нужных всем гражданам в предстоящие годы для активной деятельности, окончивший должен обладать достаточно развитым геометрическим воображением, в определенной степени строгим логическим мышлением на современном уровне, владеть навыками работы с ЭВМ.

Кроме того, ему нужно развить в себе способность к ассоциативному мышлению, изобретательность и интуицию. Он должен уметь находить и понимать связи явлений, выявляемые на логических описаниях и математических моделях. Его не должны затруднять задачи, требующие находить «изюминку» в рассуждениях или выкладках.

В школьных программах и учебниках надо было выдержать разумное равновесие между всеми этими требованиями, подчас нелегко совместимыми.

На наш взгляд, те несколько усложненные места учебников, о которых речь шла выше, свидетельствуют о крене в сторону абстракции, большем, чем это было необходимо.

Те частности, о которых шла речь в упомянутых критических замечаниях, касаются в основном определений, аксиоматики, терминологии и т. п. В рамках большого осуществленного плана они свидетельствуют о необходимости дальнейшей тщательнейшей доработки, а в некоторых случаях переработки учебников, а кое в чем и программ. Очень опасно на основании отдельных частных недостатков делать поспешные выводы о неудаче реформы и призывать к возврату ставших уже архаичными программ и учебников.

Следует сказать, что такие крайние выводы, первоначально высказывавшиеся на бюро Отделения математики, при более подробном ознакомлении с вопросом не были поддержаны на общем собрании Отделения.

В критической статье, о которой шла речь выше, говорится, что перестройка курса математики привела к его искусственному усложнению, к большой перегрузке учащихся, к формализму в знаниях, к отрыву от практики. С этим трудно согласиться. Содержание нового курса значительно лучше отвечает, как мы видели, требованиям сегодняшнего дня. Авторы пишут о том, что понятия вектора, уравнения, функции стали недоступны учащимся. Как могли *стать* недоступными понятия, которые либо вообще отсутствовали в дореформенной программе (как векторы), либо рассматривались на самом элементарном уровне?

Поступающие из школ и из вузов сведения порой разноречивы, но в целом в них нельзя найти свидетельств неудачи реформы. В об-

щем, для учащихся новый программный материал оказался не менее доступным, чем прежний.

К тому же, рассматривая итоги реформы, нельзя забывать о том, как трудны всегда первые шаги нового. Учительский персонал в своей массе был не полностью подготовлен к ее проведению; методические пособия были изданы в недостаточном количестве, и значительная часть учителей практически оказалась лишенной их. Естественно, по новому материалу гораздо труднее оказывать помощь учащимся в семье. Это также психологически настраивает против реформы.

Во всем мире, в том числе и в СССР, в последнее время заметно общее уменьшение интереса к точным наукам и технике среди молодежи. Это также не могло не сказаться на эффекте реформы среднего образования.

В заключение хочется выразить уверенность в том, что, невзирая на все трудности, путем дальнейших усилий, методической работы, после некоторой доработки учебников и программ (небольшой в сравнении с тем главным, что уже сделано) наша школа получит полноценные программы и учебники по математике, отвечающие современным жизненным требованиям.

Академик Л. В. КАНТОРОВИЧ,  
академик С. Л. СОБОЛЕВ

## О ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ<sup>1</sup>

1. Когда обсуждаются вопросы минувших или еще только вызревающих перемен в школьной математике, невольно хочется напомнить, что математика, как и родной язык с его литературой, выполняет функции одной из опорных колонн школьного здания. Ее нельзя безнаказанно колебать без того, чтобы не пришла в движение и вся с трудом сконструированная постройка. В самом деле, изучение математики в школе, если учитывать и начальные классы, а это необходимо делать, продолжается все десять лет. Ни один другой

<sup>1</sup> От редакции. Публикуемая статья действительного члена АПН СССР А. И. Маркушевича, возглавлявшего работу Центральной комиссии АН СССР и АПН СССР по определению содержания образования в средней школе, написана им в феврале этого года. Незадолго до своей кончины А. И. Маркушевич сообщил редакции, что хочет внести в статью некоторые дополнения. Однако выполнить намеченную работу Алексей Иванович не успел. Статья публикуется в своем первоначальном варианте.