О ПОНЯТИИ ОТНОШЕНИЯ ДВУХ ЧИСЕЛ*

ПРОФ. А. Я. ХИНЧИН
(Москва, Государственный институт школ)

Вопрос об определении понятия отношения в школьном курсе арифметики в последние годы вызывает в учительской среде много споров, и особенности с тех пор, как автор настоящей статьи в своей переработке известного курса Киселева, решительно порвав со старыми, более или менее пространными определениями, взял на себя смелость просто отождествить понятие отношения с понятием частного. Огромное количество откликов, вызванных этим шагом и в большинстве своем возражающих против него, несомненно, показывает, что в этом вопросе нет не только единодушия, но даже и полной ясности.

Чтобы достигнуть, по крайней мере, этой ясности, необходимо, прежде всего, отдать себе отчет в том, что школьная арифметика не есть математическая дисциплина в подлинном смысле этого слова. Если бы она была тем, что мы называем арифметикой в пределах математики, т. е. учением о числах и действиях над ними, то никакого спора не могло бы и возникнуть, ибо в области «отвлеченных» чисел (которыми только и занимается математически понимаемая арифметика) вряд ли кто-нибудь станет искать различия между отношением и частным; для тех, кто настаивает на необходимости этого различия, оно возникает там, где действия ведутся над именованными числами. Но математика вообще не знает понятия именованного числа; это понятие является порождением той физико-математической пропедевтики, которую на самом деле представляет собою школьная арифметика. Именно поэтому вопрос об определении понятия отношения, поскольку он вызывает дискуссию, не есть вопрос математический.

Большинство товарищей, возражающих против отождествления понятий отношения и частного, соглашается с тем, что всякое отношение есть частное, но указывает вместе с тем, что не всякое частное есть отношение, при этом по традиции говорится о «двух видах деления»: «по содержанию» и «на равные части». Только в первом случае говорят: частное есть отношение. Так, если мы хотим узнать, во сколько раз 10 *кг* превосходит 2 *кг*, то этот вопрос решается делением «по содержанию», и потому полученное частное есть отношение. Если же мы требуем разделить 10 *кг* на 5 равных частей, то эта задача решается делением «на равные части», и полученное частное отношением назвать нельзя. В частности, отсюда следует, что отношение всегда является числом отвлеченным.

Иначе говоря, с этой точки зрения частное является отношением тогда и только тогда, если делимое и делитель числа либо отвлеченные, либо однородные именованные.

Выясним прежде всего, что вся эта концепция лежит вне математики. Математика знает только одно единое деление. «Два вида деления» — это просто два типа конкретных, практических задач, решаемых одним и тем же действием — делением. Поэтому разделение всевозможных частных на два типа — являющиеся и не являющиеся отношениями — ничего общего с математикой не имеет и опять-таки должно быть отнесено за счет того физико-математического конгломерата, какой представляет собою наша школьная арифметика. Не математическая природа частного, а его смысловое значение в данной задаче решает, с этой точки зрения, вопрос о том, следует ли его называть отношением.

Таким образом, вопрос встает лишь о том, какое из двух определений понятия отношения следует предпочесть в школьном курсе арифметики — ограниченное, о котором только что мы говорили, или то более широкое, которое введено в последних изданиях курса Киселева и согласно которому всякое частное является отношением. Прибавим для ясности, что все другие встречающиеся «определения» (например «отношение есть результат сравнения» и т. д.) на самом деле вовсе определениями не являются, а дают лишь попытки описать роль и значение понятия отношения в приложениях. Большая часть этих описаний страдает многословием и неточностью выражений, вследствие чего помещение их в учебнике, а тем более, требование дословного их запоминания может принести только вред и служит ярким образцом той схоластичности, которой до сих пор еще, к сожалению, проникнуто в значительной степени преподавание математики в нашей школе; мы не

---

*В порядке обсуждения.

говорим уже о том, что большинство этих «определений» совершенно не доступно пониманию учащихся данного возраста и потому может быть подвергнуто зазубриванию, но не усвоению *.

При решении вопроса о том, которое из двух толкований термина «отношение» следует предпочесть — ограниченное или широкое, сторонники ограниченного определения часто ссылаются на древних, в частности, на Евклида. Может быть, незачем итти так далеко; в целом ряде гораздо более близких нам и даже современных теорий, особенно геометрических, термин «отношение» фигурирует именно в этом ограниченном смысле (например, отношение двух отрезков). Однако все это — теории, предметом (или, по крайней мере, первичным предметом) которых не является учение о числе — арифметика. Для античной математики вообще характерно, что в составляющем ее здании число не является первичным элементом, а возникает именно как «результат сравнения» конкретных величин («именованных» чисел), к которым и относится целый ряд математических понятий, в частности, понятие отношения.

В нашу эпоху, характерной чертой которой является «арифметизация» математики, т. е. придание понятию числа роли первичного элемента, дело обстоит иначе. Арифметические операции мы производим только над отвлеченными числами, и с этим актом абстракции, уничтожающим множество неясностей и недомолвок, мы знакомим наших детей очень рано (уже в учебнике Киселева, например, эта тенденция проведена с большой последовательностью). Именно поэтому современный математик или физик, имея перед собою выражение $\frac{a}{b}$, в подавляющем большинстве случаев совершенно независимо от имеющихся наименований (т. е. от конкретного истолкования чисел a и b в данной задаче) назовет его «отношением» a к b. «Ведь говорит же большинство физиков без всяких колебаний, что скорость равномерного движения есть отношение пройденного пути к протекшему времени **.

Что такое широкое понимание термина «отношение» характерно для современной науки, в этом не может быть никакого сомнения. Вопрос может стоять лишь о том, насколько это понимание возможно и целесообразно в школьном преподавании.

Наше желание — по мере возможности придать в школьном обучении каждому термину то значение, которое ему свойственно в современной науке, понятно и не нуждается в оправданиях. Здесь никакие ссылки на античные традиции не могут служить возражением, — и так уже слишком долго мы ориентируем наши школьные курсы математики на античные образцы, игнорируя весь прогресс науки — совершенно нетерпимое положение, давно уже преодоленное в других дисциплинах (физика, химия, биология). Единственное, что подчас мешает придать тому или другому понятию в школьном курсе его современно-научное толкование, — это трудность этого толкования, заставляющая искать путей к упрощению. В случаях же (в математике весьма нередких), когда научная концепция понятия проще и яснее традиционной — школьной, не может быть никакого оправдания для сохранения последней.

Ссылкой на традиции можно ведь (и, пожалуй, даже с бо́льшим основанием) защищать «ять» и «фиту»: однако, наша орфография с ними давно расправилась. Иногда диву даешься, сколько этих «ятей» сохранилось еще в школьной математике и какое отчаянное сопротивление вызывает борьба с ними!

Как же обстоит дело в нашем случае? Именно благодаря тому обстоятельству, что школьная арифметика уже отвоевала одну из важнейших позиций научной арифметики — производить действия только над отвлеченными числами, мы не можем встретить никаких затруднений, отождествляя, как это делает в подавляющем большинстве случаев современная наука, термин «отношение» с термином «частное». Вопрос о том, следует ли выражение

$$\frac{20\,кг}{5}$$

называть отношением, возникнуть не может, ибо само записанное действие не мо-

* См. по этому вопросу статью проф. Хинчина «О математических определениях в средней школе». «Математика в школе» № 1 1941 г.

** Строго говоря, это и подобные ему выражения имеют, конечно, кроме своего первичного, простейшего смысла (численное значение скорости равно отношению численных значений пути и времени) еще другой, более глубокий смысл для физики. Фактически для физики здесь происходит деление не только чисел, но и наименований, т. е., говоря языком физики, размерностей. Эта своеобразная арифметика размерностей, составляющая собою неотъемлемые элементы курса физики, может, однако, здесь быть оставлена без внимания, так как в пределах курса школьной арифметики она, безусловно, не может найти себе места.

жет встретиться. Может случиться, что мы встретим запись

$$\frac{20}{5}(кг)$$

(как это принято, например, в учебнике Киселева). Эта запись означает, что искомое число килограммов равно отношению числа 20 к числу 5. Такое истолкование этой записи со всех точек зрения совершенно безупречно. Если угодно говорить об отношении конкретных величин (например отрезков), то следует прямо определять его как отношение численных значений этих величин. Все становится тогда ясным до конца, и не возникает никакой надобности во введении нового, нематематического и потому не допускающего безупречного арифметического применения понимания термина «отношение». Таким образом, замена ограниченного толкования понятия «отношение» более широким (всякое частное есть отношение), с одной стороны, приближает школьную терминологию к современно-научной, а с другой стороны, несомненно, упрощает ее.

Вот из каких простых соображений мы и предложили расширенное понимание термина «отношение» при переработке «Курса арифметики А. П. Киселева».

СТРАНИЧКА ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЛОВАРЯ*

С. В. ФИЛИЧЕВ (Москва)

Алгебраические числа — это числа, служащие корнями уравнения вида $ax^n + a_1x^{n-1} \ . \ . \ . + a_{n-1}x + a_n = 0$, где n — положительное целое число, $a, a_1, \ . \ . \ . \ , a_n$ — рациональные числа и $a \neq 0$.

Алгебраические числа (действительные и комплексные) представляют собой числовое поле (корпус), т. е. сумма, разность, произведение, частное (деление на нуль исключается) всегда представляют собой алгебраические же числа.

Алгорифм — слово, происходящее от имени арабского математика IX в. Альхваризми (Мохаммед бен Муза аль-Ховарезми), в сочинении которого даны правила производства арифметических действий. Алгорифм соответствует русскому слову «обозначение». Теперь в понятие алгорифм вкладывают определенное математическое правило, указывающее приемы нахождения некоторого результата, не прибегая при этом ни к каким испытаниям в каждом частном случае, при этом правило не дает общего выражения (формулы) для результата. Например, говорят: алгорифм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел последовательным делением, алгорифм десятичных дробей и т. д. Между прочим, нахождение общего наибольшего делителя путем разложения чисел на простые множители не будет алгорифмом, так как при разложении чисел на простые множители будет ряд испытаний о годности того или другого множителя. В настоящее время под алгорифмом разумеют всякий арифметический или алгебраический процесс, который выполняется по строго определенным правилам. Какая-нибудь задача будет решена, если для ее решения установлен определенный алгорифм.

Арифметика (от греческого ἀριθμός — число и ἀριθμητική — наука о числах) — первая составная часть математики, изучающая числа, обыкновенно выраженные цифрами по десятичной системе счисления, и действия над ними. В настоящее время к арифметике относят учение о рациональном числе (числа натуральные, отрицательные и дробные), об иррациональном, комплексном и т. д. К арифметике же относят и комбинаторику (см. «Энциклопедию математических наук» на немецком или французском языках). К школьной, элементарной арифметике относят обычно: 1) натуральные числа и действия с ними, 2) дробные числа и действия с ними, 3) приложение целых и дробных чисел к практическим надобностям (действия с именованными числами, решение задач на пропорциональные величины, процентные вычисления и т. д.).

Первыми историческими математиками, излагавшими арифметику как науку, были греки: Эвклид (306—283 до н. э.), Никомах (I в. н. э.), Диофант (325—409).

Первая русская арифметика появилась в конце XVI в. Первой арифметикой, введшей арабские цифры в России, была арифметика Л. Магницкого (1703).

Биллион (от фр. слова billion) то же, что миллиард (от фр. слова milliard) — у нас и у французов число, равное 1 000 миллионов (10^9), а у немцев и англичан — число, равное 1 000 000 миллионов (10^{12}).

Град — новая мера углов, введенная во Франции. Окружность делится не на 360, а на 400 равных частей, называемых градами, другими словами, прямой угол делится на 100 градов. Сотую часть града называют

* В названном разделе редакция журнала будет давать краткие объяснения терминов, понятий элементарной математики, краткие биографические сведения об известных математиках и пр