

О ПЕРСПЕКТИВАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ¹

1. ВВЕДЕНИЕ

За последний год в нашей периодической печати появился ряд важных работ, посвященных содержанию школьного математического образования. В первую очередь необходимо отметить статьи А. Н. Колмогорова и А. И. Маркушевича, а также проект объема знаний по математике для восьмилетней школы, разработанный Комиссией по математическому образованию математического отделения АН СССР. Эти работы освещают существенные стороны математического образования и заслуживают всестороннего обсуждения. Настоящая статья непосредственно примыкает к работам, указанным в конце статьи.

Интерес к проблемам математического образования, который сейчас заметен во всем мире, не случаен и вызван глубокими изменениями в оценке роли науки для общественного прогресса. Наше время характерно стремительным ростом запаса научных знаний, быстрой сменой технических идей, всепроникающей автоматизацией труда — физического и умственного, — математизацией не только науки, но и большинства видов практической деятельности. Буквально на наших глазах произошло радикальное изменение требований к общекультурному и техническому развитию рабочих большинства массовых профессий. Теперь сотни тысяч и даже миллионы рабочих должны разбираться в сложных технических схемах (в частности, уметь читать чертежи), графиках функций, производить и проверять не всегда простые расчеты. Сотни тысяч рабочих и колхозников заняты рационализацией производственных процессов и изобретательством. С каждым годом все шире разворачивается очное и заочное специальное техническое, экономическое и сельскохозяйственное образование. Все это требует хороших основ математических зна-

ний, далеко выходящих за традиционные пределы арифметики и школьных элементов алгебры и геометрии.

Отошло в прошлое то время, когда можно было, получив в юности специальность, пройти с этим запасом знаний через всю жизнь. Теперь знания и навыки, полученные в школе, техническом училище, институте, быстро устаревают и, чтобы не отстать от жизни, чтобы остаться знатоком своего дела, необходимо систематически самостоятельно пополнять свои знания. Более того, в наше время многие старые профессии умирают и им на смену появляются новые; возникает необходимость в массовой переквалификации, в коренном изменении профиля работы многих людей. Но, даже оставаясь на той же работе, мы постоянно должны переучиваться: появляются новые машины, новые принципы работы, меняются технологические процессы, коренным образом изменяет форму и содержание изготавливаемая продукция. Так происходит на производстве и в любом ином деле. И вновь в этом процессе систематической переподготовки требуются прочные и довольно широкие познания в математике, а так же «математический стиль мышления». Математические методы теперь пронизывают буквально все области человеческой деятельности. И если еще совсем недавно считалось, что математическое образование необходимо лишь математику, астроному, физику и инженеру, то теперь ни экономист, ни химик не могут уже полноценно работать без знания математики. Без сложнейших математических расчетов, включающих новые теоретические исследования, были бы невозможны запуски современных космических станций и искусственных спутников Земли. Без широкого применения математических методов исследования было бы невозможно уверенное выделение слабых сигналов, которые передали нам космические лаборатории, совершившие облет Луны и сфотографировавшие невидимую ее часть. Трудность эта усугублялась тем, что сигналы воспринимались на фоне шума, превышавшего полезный сигнал во много раз. Математика

¹ В основу настоящей статьи взята работа, написанная в самом начале 1964 г. для сборника, который подготавливался к изданию АПН РСФСР. В полном объеме она печатается в ГДР в сборнике работ советских авторов о школьном математическом образовании.

стала неременной частью всех исследований процессов управления разного типа процессами, в том числе производственными процессами. Математика стала не просто средством формулировки физических законов и средством производства необходимых вычислений, она превратилась в составную часть физического исследования. Без нее нет возможности изучать процессы микромира, поскольку мы лишены способов непосредственного их наблюдения и отмечаем лишь вторичные эффекты. Для проникновения в тайны микромира приходится идти по пути построения математической модели явления, на базе которой можно выводить следствия, в том числе и такие, которые уже доступны экспериментатору. По сравнению результатов наблюдений с теорией проверяется качество предложенной модели, и при этом вновь приходится привлекать математические методы, поскольку одного качественного заключения экспериментатора о совпадении недостаточно. Заметим, что в значительной мере именно этим путем движется вперед современная физика атомных явлений и этот путь оправдал себя хотя бы открытием и предсказанием существования многих элементарных частиц. Сейчас можно сказать, что открыто уже никто не оспаривает значение математических методов в науке, технике, экономике и биологии, но на пути их распространения значительной помехой стоят школьные традиции, школьная программа обучения математике и особенности школьного обучения.

До сих пор речь шла только о школьном математическом образовании вообще и о значении математики для современного общества. Теперь же следует сказать несколько слов о подготовке тех, кому впоследствии придется самому работать над развитием математики или по меньшей мере над ее творческим применением. В наше время таких лиц уже много, и опыт последних, по меньшей мере 15—20 лет учит, что потребность в математиках высокой квалификации возрастает. Ежегодно на механико-математические и физико-математические факультеты педагогических институтов нашей страны принимаются тысячи выпускников средних школ. От того, кто будет принят в университет или педагогический институт, от его математической подготовки и математического кругозора во многом зависит будущее самой математической науки, ее теоретическая и прикладная мощь. Делает ли школа что-нибудь серьезное и

систематическое, чтобы вовремя заметить математические способности и поддержать проявление учащимися интереса к математике? Конечно, нельзя сказать, что в этом направлении не делается ничего. Делается, но не систематически, не слишком продуманно и далеко не достаточно. Определяющим же для нашей школы является то, что было таким образом сформулировано в статье выдающихся математиков М. А. Лаврентьева, С. Л. Соболева, И. Н. Векуа, А. А. Ляпунова и физик-теоретика Д. М. Ширкова²: «Всеобщее обучение — благодатная почва, на которой зарождаются истинные таланты. Нам надо только своевременно выявлять способную молодежь и направлять ее по нужному руслу. Что же нам мешает, почему мы не можем полностью положиться на школу? К сожалению, все еще крепко держится убеждение, что ученик должен знать все предметы одинаково глубоко. На этом принципе в основном и построено обучение в средней школе. Учащихся учат всему понемногу. Желание выпустить из школы разносторонне развитого человека оборачивается другой стороной. Из школы нередко выходит ученик, не знающий хорошо ни одного предмета. Вовремя не подмеченная и не поддержанная склонность к определенным областям знаний зачастую гасит в ребенке загорающийся огонек».

Математическая общественность уже давно стремится преодолеть эту опасность. Почти во всех школах преподаватели математики организуют математические кружки для учащихся, университеты, педагогические институты и другие высшие учебные заведения, организуют и проводят математические олимпиады, устраивают лекции для школьников. Сейчас многие ученые увлеклись непосредственным преподаванием в школах. Это все важно и полезно, но недостаточно. Таким путем охватывается систематической работой над углубленным познанием математики лишь незначительная часть всей учащейся молодежи — в лучшем случае десяток тысяч из многих миллионов. На этом мы, несомненно, теряем многих талантливых людей для науки, для практики.

Школьные математические олимпиады, родившиеся тридцать лет назад по инициативе математиков Ленинградского университета, стали традицией на всей территории нашей страны и даже вышли за ее границы.

² «Факел таланта», газета «Известия», № 71 от 23 марта 1963 г.

Они содействовали пробуждению интереса учащихся к математике, расширению математического кругозора школьников, усвоению традиции общения ученых со школьной учащейся молодежью, помогли открыть много прекрасных математических способностей, способствовали расшатыванию идеи незыблемости школьного курса математики. Однако мне хочется подчеркнуть, что таким путем нельзя уловить все математические способности. Дело в том, что математические таланты могут проявляться многими способами, и далеко не каждый в состоянии проявить его в напряженной обстановке состязания. Многие способны на крупные успехи лишь в спокойной обстановке, когда они никуда не торопятся и не должны изменять своим привычкам. Вот почему так важно, чтобы неудача в олимпиаде не привела к потере веры в свои способности, не погубила интереса к математике.

О НЕКОТОРЫХ НЕДОСТАТКАХ СОВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЫ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Несомненно, что советская система образования почти за пятьдесят лет своего существования дала немало образцов удачного преодоления трудностей и принесла немало успехов. Достаточно сказать, что за это время советская математика выросла в силу международного значения. Но ведь подавляющая часть ее представителей была воспитана именно советской школой. Каждый год мы принимаем в наши университеты большое число молодежи, увлеченной математикой. Это тоже заслуга школы. Видя успехи прошлого, нельзя на них успокаиваться и своевременно не намечать новых задач, стоящих перед обществом, и имеющих у него новых возможностей. Вот почему ни форма, ни содержание школьных программ и обучения, ни методика преподавания не могут оставаться неизменными, закостенелыми. Время от времени все это следует пересматривать с позиций состояния науки, с позиций тех требований, которые уже предъявляет жизнь сегодня или же предъявит завтра. То, что вчера было превосходно, а сегодня еще хорошо, завтра может стать уже неудовлетворительным. Школьное образование — живой организм, и оно должно развиваться. Математическое образование является одной из основных составных частей общего и специального

образования, поэтому ему следует уделить самое пристальное внимание.

Прежде всего отметим, что ни в одном школьном предмете нет и не может быть такого положения, чтобы он излагался почти в точности так же, как пятьдесят, сто и двести лет назад; чтобы в них ничего не сообщалось о результатах, тенденциях и возможностях современной науки. Ни в одном, если не считать математики. По школьным учебникам математики нельзя даже установить, что над миром пронеслась настоящая научная революция и что математика вошла во все области знания и практической деятельности в качестве мощного орудия анализа и исследования. Из учебника невозможно узнать, что сама математика уже не та, какой она была не только во времена Евклида и Птолемея, но даже во времена К. Гаусса, М. В. Остроградского или же Б. Римана и П. Л. Чебышева. Современное содержание курса математики дает поразительно мало возможностей увязать его с удивительными успехами науки и с волнующими задачами наших дней. Но даже то, что возможно, не делается. Нет спора, классическая математика школьной программы является основой всей современной математики и ее применений, но красотами первых камней фундамента трудно увлечься, если не увидать хотя бы контуров здания, которое из них может быть выстроено. Перефразируя известные слова первого теоретика космонавтики К. Э. Циолковского, можно сказать, что традиционная математика является колыбелью современной науки. Но до каких же пор можно держать подрастающую молодежь в колыбели?

Оторванность современных школьных программ от современного состояния науки: прекрасно осознают педагоги и ученые. Попытки, которые делались для изменения положения, были недостаточны и зачастую обращали внимание на детали, а не на целое. Сейчас положение начало меняться повсюду в мире, в том числе и в нашей стране. Недавно Комиссия по математическому образованию при Академии наук СССР предложила проект объема математического образования в восьмилетней школе (3). Это большой и важный шаг. Но прежде чем принять предложенную реформу, нужно поставить массовый эксперимент и проверить ее выполнимость и целесообразность. Нужно подготовить учебники и подвергнуть их как критическому обсуждению, так и проверке в действии.

Очень важно серьезно обсудить не только программу школьного математического образования, но и его характер. Меня мучительно интересует вопрос о правильности традиционной схемы урока: повторение пройденного на базе опроса учащихся (как правило, наиболее слабых), объяснение нового материала, беглый опрос или решение задач у доски с целью выяснения степени усвоения вновь объясненных сведений. Не тратится ли при этом слишком много времени напрасно? Все ли это время используют учащиеся для активной работы над предметом урока? Приучает ли такая система учащегося к ответственности за порученное дело и не лишает ли она его какой-то доли самостоятельности? Не приводит ли это к тому, что учащиеся не приучаются к самостоятельной работе над книгой? А ведь в будущем в нормальной работе именно самостоятельность, а не способность улавливать содержание с чужого голоса и будет как раз необходима в первую очередь.

Сейчас все чаще и настойчивее раздаются голоса о перегрузке учащихся, о невозможности расширения программы из-за недостатка времени. Об этом много пишут и газеты общего направления, и специальные педагогические журналы. Мне кажется, что во всех разговорах о перегрузке учащихся имеется значительная доля недоразумений. Я сам склонен говорить не о перегрузке, а о непозволительном расточительстве времени, о крайне нерациональном его использовании. Речь может и должна идти о недопустимости перегрузки учащихся пассивным сидением, когда не развиваются способности, притупляется внимание, теряется интерес к занятиям. Я убежден, что в школе производительно используется несравненно меньше половины рабочего времени каждого учащегося. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, как много времени уходит на опрос учащихся, на поддержание порядка в классе, на исправление ошибок одного ученика, когда остальные сидят без определенного дела. Я подкреплю эту мысль наблюдением, проведенным в одной из московских школ. После очередного опроса ученика остальным учащимся класса раздали чистые листочки бумаги с просьбой ответить на вопрос: над чем они думали во время ответа товарища? Листочки просили не подписывать. Учащимся обещали, что листочки не будут переданы преподавателю, проводившему занятия. Результат превзошел ожидания: из 38 записок лишь три со-

держали утверждение, что их авторы следили за ответом; в четырех говорилось, что их авторы размышляли о том, что они будут делать, если их спросят вслед за товарищем, в остальных же говорилось о спорте, кино, литературе, но не о содержании урока (правда, урок был не по математике).

Этот пример заставляет задуматься над многим, и в первую очередь над тем — то ли преподается в школе, не слишком ли школьный курс нацелен в прошлое вместо будущего? Не преуменьшаем ли мы развитие современного школьника, который еще с дошкольных лет привык считать и читать графики? Не следует ли пересмотреть всерьез стиль школьного преподавания в сторону большей самостоятельности учащихся и большей напряженности их труда? Учебник должен привлекать детей, заставлять их думать, а не отпугивать и не усыплять.

Несомненно, что без увлеченности школьника делом, без некоторого напряжения с его стороны нельзя добиться хороших результатов, как бы много усилий ни тратил учитель на разъяснения, консультации и дополнительные занятия. Труд учителя пропадает зря, если учащийся не вникает в существо дела и не пытается сам осмыслить содержание предмета. Мы же зачастую стремимся снять ответственность со школьника и переложить ее на учителя. Такая практика приучает некоторых учащихся к мысли, что за них кто-то должен сделать все, а их задача состоит лишь в том, чтобы пожинать плоды работы других.

Потеря интереса к обучению на каком-то этапе рождает безразличие и апатию, безразличие рождает лень, а лень — безделье и потерю способностей. Вот почему важно продумать курс математики так, чтобы его изучение было интересно; содержание было современно, будило мысль и развивало способности, а также открывало пути как в научную, так и в практическую деятельность.

О ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Стремление воспитать молодежь, воодушевленную идеей прогресса математики, — важная и заслуживающая самого пристального внимания сторона математического образования. Важная, но не единственная. Подавляющее большинство воспитанников средней школы впоследствии станут не математиками, а инженерами, экономистами, врачами, людьми самых разно-

образных профессий. Несомненно, что учет их интересов ни в коем случае не должен быть выброшен из поля нашего зрения. На структуру математического образования нужно поэтому взглянуть также с позиций прикладной математики, т. е. той математики, которая помогает при расчете машин, зданий, в экономических расчетах и планировании, в военном деле, а также во всех остальных видах практической деятельности. Мы пришли таким образом к необходимости вкратце остановиться на том, что такое прикладная математика, каковы тенденции ее развития.

До начала нашего века в область прикладной математики относили лишь небольшую часть математики: арифметику, элементарные сведения из геометрии, тригонометрию, методы производства приближенных вычислений, математический анализ, включая дифференциальные уравнения в обыкновенных и частных производных. И это все. Этим ограничивалось математическое образование инженера, а инженер конца XIX века считался лицом, самым образованным в математическом отношении, за исключением, конечно, математиков, физиков и астрономов.

Сохранился ли этот взгляд на содержание прикладной математики? Нет, не сохранился, он уже давно безнадежно устарел. В самом деле, трудами Н. Е. Жуковского и многих других ученых было установлено, что движение тел в идеальной жидкости целесообразно изучать посредством функций комплексного переменного, так называемых аналитических функций. Расчет подъемной силы самолета, тяги винтов и профиля крыльев удалось успешно выполнить посредством теории функций комплексного переменного, с широким использованием ее геометрического аспекта — теории конформных отображений. Вскоре оказалось, что вопросы теории упругости и электродинамики также успешно изучаются с помощью этих средств. Теория функций комплексного переменного вошла с полным правом в число прикладных математических дисциплин, и ее стали преподавать в высших инженерных учебных заведениях. Развитие телефонной сети и появление массового производства вызвали повышение требования к теории вероятностей со стороны инженерного дела. Развитие радиотехники и электротехники привело к широкому использованию интегральных преобразований, в первую очередь преобразований Лапласа, теория ко-

торых вошла в инженерную практику под именем операционного исчисления.

Прекратилось ли на этом расширение требований инженерной науки к математике? Нет, не прекратилось, более того, усложнение техники, использование в ней даже квантовых эффектов неизмеримо расширило и тот математический аппарат, который используется теперь в инженерном деле. Далее, в начале пятидесятих годов вычислительная техника сделала принципиально новый шаг в своем развитии: появились цифровые вычислительные машины, которые не только сделали возможным проведение таких вычислительных работ, которые еще недавно казались фантастическими по своей сложности и невыполнимости, но и позволили вплотную поставить вопрос об автоматическом управлении производственными процессами. Этот вопрос немедленно привел к необходимости логического анализа течения производственных процессов; выяснению того, какая информация должна поступать в управляющий орган, чтобы поддерживать течение процесса в должном режиме, установлению связей между различными характеристиками; появлению методов выделения на фоне случайных шумов реального изменения характера основного процесса. Так, в инженерное дело вторглась математика еще новыми своими частями — математической логикой, теорией случайных процессов, теорией информации и т. д. И этот процесс математизации техники неуклонно развивается все быстрее и быстрее. Этот процесс замечен не только математиками, но и инженерами. Недаром в ряде стран появились инженеры с широким математическим образованием. Недаром во многих высших технических учебных заведениях образованы инженерно-математические факультеты. Недаром, наконец, в ГДР известная Дрезденская Высшая техническая школа переименована в Технический университет.

Пока в нашем кратком наброске роста влияния математики в современной практике была затронута только техника. Нам следует остановиться немного на экономических вопросах, на биологии, медицине, не претендуя при этом даже в малой степени на полноту изложения.

В современном мире экономические вопросы приобрели огромную роль. Массовое производство требует установления рационального его размещения, чтобы затраты на доставку сырья, топлива и готовых изделий потребителям были минимальными.

Важно учесть спрос на товары, так как недоучет этого обстоятельства приведет, с одной стороны, к затовариванию, переполнению складов никому не нужными товарами, а с другой — к потере покупателя. Далее необходимо исследовать, насколько хорошо используется сырье, рационально ли ведется управление технологическим процессом и не допускается ли при этом перерасход материалов, сырья, рабочего времени аппаратуры и обслуживающего персонала. Эти и множество других вопросов встают перед мыслящим экономистом. Ответить на них только качественными соображениями невозможно, нужен точный расчет. Недаром за последние тридцать лет появились новые математические дисциплины, вызванные к жизни как раз задачами, выдвинутыми экономикой, — линейное и нелинейное программирование, динамическое программирование, теория игр, исследование операций и т. д. Современный экономист уже не может быть специалистом гуманитарного толка, он должен уметь считать, и для этого четырех правил арифметики недостаточно. Оказывается, во многих случаях простой арифметический расчет приводит к существенным просчетам, поскольку он не учитывает специфики протекания явления.

Развитие экономики сейчас уже нельзя мыслить без систематического использования современных средств математики и, что еще важнее, без тех особенностей мышления, которые развивает математика.

Само собой разумеется, что многие выпускники школ свяжут свою жизнь не только с работой на фабриках и заводах, транспорте и строительстве, далеко не все станут экономистами и учеными. Многие из них изберут себе другой род деятельности, столь же необходимый для общества. Один из самых распространенных видов деятельности так или иначе связан с биологией, понимаемой в самом широком смысле этого слова. Собственно биология и медицина, агрономия и животноводство, ветеринария и рыбное хозяйство — все это направления биологических наук. Быть может, здесь нет нужды в математическом мышлении и математическом образовании? Быть может, науки о живой природе имеют свой особый путь развития и математические методы еще долгие годы будут чужды их проблемам? Оказывается, нет. Здесь, как и повсюду — в естествознании и технике, экономике и планировании, необходимость в привлечении математиче-

ских методов созрела внутри самих этих наук. И там, где до сих пор господствовало царство личной интуиции, настоятельно ощущается потребность в более объективных и количественно сравниваемых подходах. Какой вес следует придать тому или иному диагностическому признаку при оценке заболевания, как спланировать биологический эксперимент, как выявить эффективность тех или иных рационов кормления животных, как рациональнее всего распределить работы среди имеющегося сельскохозяйственного оборудования? Эти и тысячи других вопросов требуют применения математических средств. Если учесть исключительное разнообразие воздействия лекарственных веществ на различные организмы, то при вынесении рекомендаций об использовании тех или иных новых фармакологических препаратов тщательный статистический анализ экспериментальных данных абсолютно необходим. А изучение динамики развития популяций? Ведь эта задача имеет огромный теоретический и практический интерес. К ней, скажем, сводятся важнейшие народнохозяйственные вопросы, связанные с рыбоводством. Но к ней без математического анализа подойти нельзя. А проблемы изучения механизма управления физиологическими функциями организма, работы мозга и многие, многие другие, которые так смело выдвинуты нашим временем? Разве можно подойти к их решению, не используя математический аппарат, не строя предварительно количественные модели изучаемых явлений, не используя моделирование процессов на электронных вычислительных машинах?

До сих пор совсем не было речи о значении математики для современной физики. Об этом нет никакой нужды и говорить, поскольку в наше время математическое и физическое исследование буквально слились воедино. Недаром так много ценных математических идей, современных направлений математической мысли возникло именно в физике. Впрочем, можно в последней фразе с одинаковым успехом поменять местами слова физика и математика.

В наше время в значительной мере потерял смысл барьер, разделяющий прикладную и теоретическую математику, поскольку нет таких областей математики, которые не находили бы теперь или не нашли бы в ближайшем будущем значительных применений. Если можно говорить о разделении, то только о разделении интересов среди

математиков: одни интересуются развитием своей науки безотносительно к ее конкретным применениям, другие же развивают ее, исходя из своих интересов к конкретным областям знания.

Вся математика находит свое значительное место в задачах изучения и преобразования окружающего нас мира применительно к нуждам человеческого общества. Совсем недавно многие были убеждены, что топология и теория множеств представляют собой математические науки, необходимые только для внутреннего развития самой математики, для построения ее фундамента. Теперь это будет одностороннее и ошибочное мнение. Идеи топологии находят применение в задачах распознавания образов, к которым сводятся многочисленные вопросы практики: диагностика заболеваний, диагностика неисправностей в сложных технических устройствах, автоматическое чтение текстов, выбор решения при управлении тем или иным процессом и т. д. Теоретико-множественные концепции властно проникли в современный мир физика и техника, статистика и биолога. При построении моделей явлений мы вынуждены строить разного типа фазовые пространства состояний изучаемых систем, выделять в этих фазовых пространствах различные множества состояний, выход за пределы которых приводит к тем или иным расстройствам функционирования систем. С таким подходом к основным понятиям теории надежности — новой инженерной науки — можно познакомиться, например, по книге трех авторов³.

Ни с чем не сравнимое увеличение роли математики в современной жизни, математизация инженерного дела, естествознания, экономики, медицины с особой настойчивостью приводит нас к проблеме рациональной системы математического образования на всех его этапах — от первых дней школьной жизни и, по меньшей мере, до окончания молодым человеком высшего учебного заведения.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Мы подошли теперь к основной задаче настоящей статьи и, пожалуй, к основной задаче современной школы — каким должен быть курс математики в школе? Я не буду при этом касаться сравнительно малочис-

ленных школ специально математического или физико-математического направления, а буду говорить о школах общего назначения, охватывающих подавляющее большинство детей школьного возраста. О тех школах, в которых учится основная часть будущих членов общества, как скромных тружеников, так и блестящих изобретателей, врачей и ученых.

То, что было нами сказано, с полной определенностью заставляет нас отказаться от мысли об уменьшении объема математических сведений, излагаемых в средней школе для всех школьников. Речь пойдет об изменениях этих сведений и об изменении формы их изложения. Конечно, то, что я буду предлагать, совсем не обязательно, а требует предварительного всестороннего обсуждения и обязательной экспериментальной проверки в разнообразных типичных условиях, прежде чем будет заслуживать перевода на стадию включения в школьные программы. До некоторой степени я согласен с утверждением Э. Бореля, который полвека назад в прекрасном докладе сказал: «...всякое вообще изменение прежде всего приносит некоторый вред и в течение периода приспособления влечет за собой больше неудобств, чем выгод»⁴. Но в гораздо меньшей степени можно принять тезис «многих превосходных учителей», «что в среднем образовании содержание менее важно, чем форма, и что по существу образование ума при помощи точных знаний гораздо важнее, чем приобретение этих знаний». Не отрицая, а полностью разделяя мнение об исключительной важности формы преподнесения знания, я хотел бы все же подчеркнуть и огромное значение содержания этих знаний. Если это содержание не связано с жизнью наших дней, если ребенок всем своим существом ощущает никчемность содержания излагаемых ему знаний, он будет активно противиться их приобретению. Как при плохом обучении, так и при плохом содержании обучения (даже при превосходной форме) результаты будут неутешительными.

Конечно, невозможно заранее предусмотреть во всех деталях, что потребуется знать и уметь каждому из учащихся. Но это и не нужно, так как специальные знания, профессиональные навыки будут получены молодыми людьми позднее в соответствующих учебных заведениях. Средняя школа долж-

³ Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев, Математические методы в теории надежности, изд. «Наука», 1965.

⁴ Э. Борель, Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки, сб. «Математическое просвещение», № 3, Физматгиз, 1958.

на в первую очередь дать основы научных знаний, развитие навыков логического мышления и привычку к алгоритмическому мышлению, привычку четко мыслить и излагать свои мысли. Я, пожалуй, ничего не добавил к тому, о чем уже говорилось много раз на протяжении последних лет. Мне только хочется подчеркнуть, что средняя школа должна дать основы научных знаний. Почему же мы так медленно решаемся на формулировку того, что является в наше время основой математических знаний, и не вводим эти новые основы в курс математики средней школы? Конечно, в первую очередь потому, что никто не решится утверждать, что то, что составляет содержание элементарной математики, перестало быть необходимым, потеряло свое значение для общественного прогресса. В действительности нужны и свободное владение арифметическими операциями, и решение треугольников с помощью тригонометрических функций, и основы геометрии, и безупречное владение алгебраическими преобразованиями. Но я считаю, что настала пора в понятие «основы науки» ввести начала математического анализа — элементы дифференциального и интегрального исчисления вплоть до правил нахождения площадей плоских фигур и объемов тел вращения, элементы теории вероятностей, элементы теории множеств, элементы математической логики, представление о принципах работы вычислительных цифровых автоматов и о программировании для них.

О необходимости введения основ математического анализа в курс средней школы писали многие выдающиеся педагоги нашей страны уже на протяжении ста с лишним лет; М. В. Остроградский и А. Я. Хинчин оставили нам прекрасные и страстные слова в защиту этого тезиса. В упомянутом мной докладе Э. Бореля также сказано об этом настолько хорошо, что трудно удержаться и не привести оттуда соответствующую цитату. «Поразительные научные успехи XVIII века, которые повлекли за собой развитие техники в XIX веке, можно связать с четырьмя великими именами: Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница. Благодаря аналитической геометрии и дифференциальному исчислению, оказалось возможным решить исчерпывающим образом проблемы механики на основе прочно установленных принципов. Это, быть может, самый важный факт в истории человечества; благодаря одержанным таким образом техническим победам, человек завоевал и организовал земной шар. Нет ни од-

ного объекта в материальном мире и ни одной мысли в области духа, на которых не отразилось бы влияние научной революции XVIII века. Ни один из элементов современной цивилизации не мог бы существовать без принципов механики, без аналитической геометрии и дифференциального исчисления. Нет ни одной отрасли в деятельности человека, которая не испытала бы на себе сильного влияния гения Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница.

Я, впрочем, ошибся: нечто все-таки ускользнуло от этого влияния и осталось без изменений, — а именно, система преподавания математики в средней школе».

Мне могут возразить и сказать, что слова Э. Бореля уже устарели, поскольку в наших программах имеются и элементы аналитической геометрии, и основы теории пределов, и даже элементы дифференциального исчисления. Это так, но в ней нет элементов интегрального исчисления, которые могли бы работать уже в самой средней школе и многое упростить в изложении курса геометрии, а также физики.

Теория вероятностей в своих элементарных понятиях очень проста и доступна, ее легко увязать, с одной стороны, с традиционным материалом алгебры, а с другой — с тем, что сообщается в физике и химии, а также в биологии. Кроме того, концепция случайного так прочно вошла в современную практику, что без нее нельзя обойтись ни в физике, ни в технике, ни в экономике, ни в науках о живой природе. Необходимость введения элементов теории вероятностей в программы массовой средней школы ощущается многими педагогами у нас, ощущается она и в других странах. Недаром в США, Японии и Югославии уже сделаны попытки введения ее в программы средней школы и созданы пробные учебники.

Теория множеств — одно из изящнейших созданий математики XIX в. — легла в основу всей современной математики, а также многих концепций физики и техники. Немногие сведения, которые не займут большого времени, могут раздвинуть интеллектуальные горизонты учащихся. К окончанию школы учащиеся подводят итоги многочисленным обобщениям понятия числа, они впервые встречаются с множеством всех действительных чисел и узнают, что рациональные числа расположены в этом множестве всюду плотно, что дает основу всем приближенным вычислениям. Но каков объем того и другого множества чисел, насколько расширили мы запас чисел, введя

в рассмотрение наряду с рациональными все действительные числа? Эти вопросы просты и одновременно философски и математически значимы. Они не позволят школьникам оставаться равнодушными и увеличат интерес к математическому образованию.

Математическая логика за последние двадцать лет совершила буквально триумфальный марш, и не только внутри математики, но и в технической практике. Появление вычислительных быстродействующих машин, их проникновение во все области деятельности укрепило позиции математической логики в программе средней школы. Добавлю к тому, что они говорили, что этот шаг значительно поможет выработке привычки четкого логического мышления, правильного расчленения и синтеза суждений.

Цифровые вычислительные автоматы стали в наши дни настольно в центре внимания, так много пишут об их важности и универсальности их применений, что аргументировать введение в программу средней школы сведений о принципах их устройства и элементах программирования нет нужды. То, о чем говорилось хотя бы раз в школе, прочно оседает в нашем сознании, даже если изучение было недостаточно глубоким. Я убежден, что те первичные сведения о программировании, о которых идет речь, окажут огромную услугу впоследствии многим воспитанникам школы.

Я не касаюсь содержания курса геометрии, в последнее время у нас много и интересно об этом говорилось. В конечном счете идеи, выдвинутые в свое время Ф. Клейном, сохранили свое значение и теперь. Переход к этим идеям потребует коренной перестройки сложившегося курса геометрии, и этот переход следует совершить.

Можно было бы предложить проект программы и расписать по годам предлагаемые нововведения. При этом пришлось бы потеснить арифметику и многое преобразовать внутри самих предметов, чтобы вводимые новые сведения вошли не в качестве каких-то дополнительных привесок к старому курсу, а в качестве органической части всего курса в целом. При этом пришлось бы коснуться и преподавания смежных дисциплин, чтобы математические понятия и правила действия не оставались только внутри самой математики, а находились бы в постоянной работе. Ничто так не содействует усвоению предмета, как действие с ним в разных ситуациях.

Создание хорошей программы является необходимым, но далеко не достаточным

условием успеха. Для того чтобы преподавание приносило хорошие плоды, нужно еще очень многое. Школа имеет дело не с бездушными предметами, требующими лишь обработки, а с множеством сложных характеров, требующих индивидуального подхода, меняющегося не только с годами, но буквально непрерывно. От педагога требуется, чтобы он сумел увлечь своим предметом, и работа учащегося проходила бы не под постоянным давлением принуждения, а под знаком увлеченности, личной заинтересованности. К сожалению, этого добиваются далеко не все учителя и по отношению далеко не ко всем ученикам. Следствием этого является сначала безразличие учащихся, затем формальное отношение к занятиям и последующие неудачи. Для математики довольно распространенным бичом является формализм знаний, который состоит в заучивании понятий, правил, доказательств и результатов без проникновения в их суть, без того, чтобы постигнуть их содержание. Как часто почти каждый педагог может встретиться с таким положением, что учащийся бодро отвечает правила, уверенно повторяет дословно доказательство теоремы по учебнику с сохранением всех принятых там обозначений, но достаточно спросить только — «Почему ты взял эту линию, а не другую?» — или же просто изменить обозначения, как уверенность учащегося теряется. Он уже неспособен еще раз повторить так хорошо заученное доказательство. К сожалению, это случается даже с теми учениками, которые систематически получают хорошие оценки. Причина этого явления, явления, которое со временем становится все более опасным для жизни общества, в значительной мере связана с тем, что школа зачастую не стремится к выяснению того, насколько учащиеся усвоили суть дела. Как часто в школе педагог удовлетворяется тем, что он натаскивает на решении стандартных задач и производстве вычислений, но совершенно не обращает внимания на развитие инициативы учащихся, на развитие их способности рассуждать, замечать ошибки, вникать в суть определений.

Борьба с формализмом в знаниях по математике учащихся, борьба с формализмом в педагогическом процессе крайне назрела. Каждый успех в этой борьбе будет означать серьезный вклад в научный и технический прогресс ближайшего будущего⁵.

⁵ См. «О формализме в школьном преподавании математики», «Советская педагогика», 1944, № 11—12,

Строгий логический анализ хода технологического прогресса является одной из основных предпосылок успеха его математического описания с целью последующего осуществления его автоматизации или для выяснения возможностей его усовершенствования. Математическое образование может многое сделать для развития привычки и потребности в систематическом проведении полноценной логической аргументации любого положения. В математике, как известно, нет и не может быть «почти доказанных» теорем. Утверждения, доказывающие математическое предложение, либо таковы, что они полностью снимают всякую возможность сомнений в его правильности, либо же таковы, что их недостаточно для признания этого положения математическим фактом. Научить аргументировать каждый шаг своих рассуждений полноценным образом является одной из важнейших задач школьного математического образования. Вот почему необходимо, чтобы в самостоятельной работе школьника обязательно были и занимали подобающее место не только задачи на проведение формальных преобразований или же на применение стандартных приемов решения, но и задачи, требующие логических рассуждений, самостоятельного проведения доказательств. В результате обучения математике нужно добиться такого положения, чтобы подавляющее большинство учащихся приобрели способность улавливать нечеткость рассуждений, отсутствие необходимых звеньев доказательств. Такая логическая скрупулезность сейчас является не причудой математиков, а практической необходимостью. Без нее невозможно переложить на машину ни решение математических задач, ни управление технологическим процессом, ни передать ей проведение обширных и утомительных для человека банковских операций (ведение счетов, начисление процентов и т. д.). Со всей ответственностью можно заявить, что для будущего общественного прогресса несравненно важнее приучить учащихся к логически безупречному мышлению, чем подменять эту большую задачу рассмотрением частных и зачастую лишь по форме прикладных примеров. Я не против рассмотрения небольшого числа хорошо составленных и продуманных задач действительно прикладного значения, но я против того,

21—27; «Известия Академии педагогических наук РСФСР», вып. 4, 1946, стр. 7—20; А. Я. Хинчин, Педагогические статьи, под редакцией Б. В. Гнеденко, изд. АПН РСФСР, 1963, стр. 106—127.

чтобы их обилие (и непродуманность) вытеснило собой то, что особенно необходимо для настоящего и будущего. Тем более я являюсь решительным противником такого положения, когда под видом связи с практикой желают выхолостить суть математического образования и подменить его заучиванием рецептов, решением стандартных задач по готовым правилам, рассмотрением примеров, лишь одетых в прикладные одежды. Полноценное математическое образование с логически отточенными доказательствами сейчас необходимо несравненно больше, чем в какую бы то ни было пору в прежние времена.

В наше время очень важно продумать систему школьного воспитания, при которой научные интересы подрастающего поколения не отодвигались бы на второй план интересными и даже в разумных размерах полезными, но все же с общественной точки зрения второстепенными сторонами жизни. Очень важно, чтобы подрастающее поколение было хорошо физически развито, этого следует настойчиво добиваться. Но увлечение футболом и другими видами спорта не должно заслонять от молодежи того, что будущее страны, так же как и их собственное будущее, зависит не от того, забьет или не забьет какой-то футболист мяч в ворота противника, а от того, насколько глубоко будут усвоены ими основы научных знаний, насколько далеко развились их научные интересы и представления.

Необходимо срочно создать в нашей стране математический журнал для школьников, который в доступной форме открывал бы перед ними увлекательную картину современного развития науки, ту роль, которая завоевана математикой во всех областях знания, и то обилие проблем, которые возникают в математике как в связи с решением задач практики, так и в связи с развитием самой математики как теоретической науки.

Л и т е р а т у р а

[1] А. И. Маркушевич, К вопросу о реформе курса математики, «Математика в школе», 1964, № 6, стр. 4—8.

[2] А. И. Маркушевич, Математическая наука и школьное образование, «Советская педагогика», 1965, № 1, стр. 42—47.

[3] Объем знаний по математике для восьмилетней школы, «Математика в школе», 1965, № 2, стр. 21—24.

[4] А. Н. Колмогоров, Геометрические преобразования в школьном курсе геометрии, «Математика в школе», 1965, № 6, стр. 24—29.

[5] А. Н. Колмогоров, И. М. Яглом, О содержании школьного курса математики, «Математика в школе», 1965, № 4, стр. 53—62.