

# Übungen aus Analysis

Günther Hörmann, Michael Kunzinger

Wintersemester 2010/11

## IV. INTEGRATION

### Zu §9: Riemann-Integral

**53** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine R-integrierbare Funktion und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Beweisen Sie (sorgfältig),

dass die Funktion  $\lambda \cdot f$  ebenfalls R-integrierbar ist und  $\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$  gilt.

(Hinweis: erledigen Sie der Reihe nach die Fälle  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = -1$  und  $\lambda < 0$ .)

**54** Beweisen Sie: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und in höchstens einem Punkt  $x_0 \in [a, b]$  unstetig, so ist  $f$  R-integrierbar. Folgern Sie daraus, dass beschränkte Funktionen auf  $[a, b]$  mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen stets R-integrierbar sind.

**55** Sei  $a > 1$ . Berechnen Sie  $\int_1^a \frac{dx}{x}$  mittels Riemann-Summen.

(Hinweis:  $1 < a^{1/n} < a^{2/n} < \dots < a^{(n-1)/n} < a$ .)

**56** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und ungleich der Nullfunktion. Zeigen Sie:  $\int_a^b |f(x)| dx > 0$ .

### Zu §10: Integration und Differentiation; Satz von Taylor

**57** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = 0$  für  $x < 0$  und  $f(x) = 1$  für  $x \geq 0$ .

(a) Beschreiben Sie die Stammfunktionen zu den Einschränkungen von  $f$  auf  $I_1 := ]-\infty, 0[$  und  $I_2 := ]0, \infty[$ .

(b) Geben Sie alle differenzierbaren Funktionen  $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  an, für die gilt:  $\forall x \neq 0$  ist  $F'(x) = f(x)$ . Welche davon lassen sich stetig auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen? ( $F$  kann also als *Stammfunktion* bezeichnet werden. Wir haben aber in der VO Stammfunktionen nur auf Intervallen definiert.)

(c) Hat  $f$  eine (überall differenzierbare) Stammfunktion auf  $\mathbb{R}$ ?

**Aufgaben 58-61: Berechnen Sie die Integrale bzw. finden Sie Stammfunktionen:**

$$\boxed{58} \text{ (a) } \int_0^x \frac{2y+1}{y^2+y+3} dy \quad (x > 0) \qquad \text{(b) } \int \sin^3(x) \cos(x) dx \qquad \text{(c) } \int \tan(t) dt$$

$$\boxed{59} \int \frac{x}{-6+11x-6x^2+x^3} dx. \quad (\text{Hinweis: das Nennerpolynom hat ganzzahlige Nullstellen.})$$

$$\boxed{60} \text{ (a) } \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \text{(b) } \int \arcsin(x) dx.$$

$$\boxed{61} \text{ (a) } \int xe^{x^2} dx \qquad \text{(b) } \int x^2 e^x dx$$

**62** (a) Sei  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Polynomfunktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig. Wie sieht die Taylor-Reihe von  $p$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$  aus? Ist die Summe gleich dem Funktionswert? Was erhalten wir speziell für  $x_0 = 0$ ?

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion  $\tan$  um  $x_0 = 0$ .

**63** Sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal stetig differenzierbar ( $n \geq 1$ ) und bei  $x_0 \in ]a, b[$  gelte:

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist  $n$  ungerade, so besitzt  $f$  in  $x_0$  kein lokales Extremum.

(b) Ist  $n$  gerade, so besitzt  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Extremum. Dieses ist ein lokales Maximum, wenn  $f^{(n)}(x_0) < 0$  ist, und ein lokales Minimum, falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .

Wenden Sie diese Kriterien auf die Funktion in Aufgabe **50** (aus Einf. in die Analysis, SS 08) im Punkt  $x_0 = 0$  an. (Fallunterscheidung  $a = 0$  und  $a > 0$ .)

**64** Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von  $\sin$  oder  $\cos$  (wählen Sie selbst) mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Zeigen Sie, dass die Reihe für jedes  $x \in \mathbb{R}$  die Funktion darstellt. (Hinweis: vergleichen Sie z.B. die Argumentation in der VO, 10.11, Beispiel 1.)

## Zu §11: Uneigentliche Integrale

**Aufgaben 65-66: Untersuchen Sie, ob die uneigentlichen Integrale konvergent sind.** (Können Sie gegebenenfalls auch einen Wert finden?)

$$\boxed{65} \text{ (a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad \text{(b) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2-2x}}$$

$$\boxed{66} \quad (a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

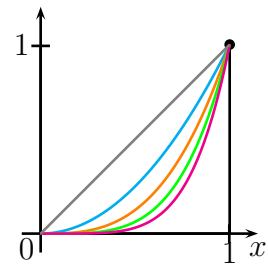
$\boxed{67}$  Für welche  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ ?

## V. FUNKTIONENFOLGEN UND -REIHEN

**Zu §§12 und 13: Gleichmäßige und punktweise Konvergenz; Potenzreihen**

$\boxed{68}$  Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f_n(x) := x^n$ .

- (a) Konvergiert  $(f_n)$  punktweise?  
 (b) Konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig?



$\boxed{69}$  Es sei  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) := \frac{(-1)^n x^2}{1+n^2 x^2}$ .

- (a) Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  gleichmäßig oder punktweise?  
 (b) Definiert  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  eine stetige Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

$\boxed{70}$  Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$  eine Potenzreihe um  $x_0 \in \mathbb{C}$ . Beweisen Sie die *Formel von Hadamard* für den Konvergenzradius  $R$ :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

(mit der Vereinbarung  $R = 0$  zu setzen, falls der Limes superior unendlich ist, bzw.  $R = \infty$ , falls er Null ist). (Hinweis: Wurzeltest.)

$\boxed{71}$  Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius  $R$  für die angegebenen Potenzreihen. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den reellen Randpunkten  $x = x_0 \pm R$ .

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \log(n+1)} \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} (-3)^k x^{2k+1}$$

**72** Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius  $R$  und finden Sie die Summenfunktionen (für *reelle*  $x \in ]-R, R[$ ) für die angegebenen Potenzreihen. Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten in den reellen Randpunkten  $x = \pm R$ .

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$       (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$  (Hinweis: auf (a) zurückführen.)      (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

**73** Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für die Funktion  $\arcsin : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

(Hinweis: Kennen Sie vielleicht die Reihe für die Ableitung schon aus der VO?)

**74** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Finden Sie die Taylor-Reihe von  $f$ , indem Sie eine bekannte Potenzreihenentwicklung umformen. Folgern Sie, dass die Funktion  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird. Benützen Sie dies, um eine Reihenentwicklung für den Wert des folgenden Integrals anzugeben

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

## Zu §14: Fourier-Reihen

**75** Sei  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  (Vektorraum der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$ ).

Zeigen Sie:  $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .

Folgern Sie daraus, dass durch  $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$  ein (unitäres) Skalarprodukt auf  $\mathcal{C}[a, b]$  definiert wird.

**76** Bestimmen Sie die (reelle Form der) Fourier-Reihe der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f(x) := |x|$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ).

**77** Sei  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f(x) := \exp(iax)$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ).

★ **Zusatzaufgabe (freiwillig)** Aus der VO, Beisp. 14.4, kennen wir die Fourier-Reihe der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f(x) := (\pi - x)/2$  ( $0 < x < \pi$ ),  $f(0) = f(2\pi) := 0$ , nämlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Wie wir festgestellt haben, konvergiert die Reihe punktweise gegen  $f$ . (Allerdings z.B. im Punkt  $x = \pi/2$  nicht absolut.)

Zeigen Sie nun durch direkte Abschätzungen, dass für  $0 < \delta < \pi$  auf dem Intervall  $[\delta, 2\pi - \delta]$  sogar gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Partialsummen im angegebenen Intervall eine gleichmäßige Cauchy-Folge bilden. Dazu schreiben Sie die entsprechenden Teilsummen vermöge  $s_m(x) := \sum_{k=1}^m \sin(kx)$  und mittels  $\sin(kx)/k = (s_k(x) - s_{k-1}(x))/k$  um und wenden dann die sogenannte *Abelsche partielle Summation* an: es ist allgemein  $\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1})$ , wobei  $A_k := \sum_{j=1}^k a_j$  an eine Stammfunktion erinnert. Zusammen mit einer gleichmäßigen Schranke für  $|s_l(x)|$  kommen Sie zum Ziel.)

Bemerkung: Das Ergebnis kann übrigens auch aus einem Konvergenzsatz über Fourierreihen gefolgert werden, weil  $f$  stückweise stetig und stetig differenzierbar ist und auf  $[\delta, 2\pi - \delta]$  stetig ist [vgl. Heuser, Band 2, Satz 137.2].

**78** Es sei  $(f_n)$  eine Folge von stetigen Funktionen auf  $[0, 2\pi]$ . (Zum Beispiel die  $n$ -ten Partialsummen einer Fourier-Reihe.) Führen Sie folgende Bemerkung aus der VO, 14.8, im Detail aus:

(a) Wenn  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, dann folgt daraus auch die Konvergenz im quadratischen Mittel, d.h.  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(b) Die Umkehrung der Aussage in (a) gilt nicht.

**79** Was besagt die Parseval-Gleichung für die Funktionen aus den Aufgaben **76-77**?

## VI. TOPOLOGISCHE GRUNDBEGRIFFE

### Zu §15: Metrische und normierte Räume

**80** (“Metrik des französischen Eisenbahnsystems”) Bezeichne  $P$  (für Paris) einen beliebigen Punkt im  $\mathbb{R}^2$  und  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm. Wir definieren  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } x - P, y - P \text{ linear abhängig} \\ \|x - P\| + \|y - P\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Veranschaulichen Sie typische Fälle für die Lage von  $x$  und  $y$  in einer Skizze.

Zeigen Sie, dass  $d$  eine Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  definiert. (Verwenden Sie Skizzen zur Unterstützung.) Skizzieren Sie jeweils die Menge aller Punkte, die von  $Q := P + (4, 0)$  bzw.  $R := P + (1, 0)$  Distanz 2 bezüglich  $d$  haben.

**81** Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum (über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ).

(a) Zeigen Sie aus den Axiomen für die Norm, dass durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  ( $x, y \in V$ ) eine Metrik auf  $V$  definiert wird.

(b) Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung:  $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$  für  $x, y$  aus  $V$ .

**82** Wir betrachten  $\mathbb{R}^2$  mit den Normen  $\|\cdot\|_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ). Skizzieren Sie jeweils für  $p = 1, 2, \infty$  die Menge  $K_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$  aller Punkte mit Abstand kleiner gleich 1 vom Ursprung.

Mit welchen Faktoren  $\lambda, \mu > 0$  müssen Sie stauchen, um  $\lambda \cdot K_\infty \subseteq \mu \cdot K_2 \subseteq K_1$  zu erreichen? (Notation:  $X$  Teilmenge eines Vektorraumes,  $\nu$  ein Skalar, dann ist  $\nu \cdot X := \{\nu z : z \in X\}$ .)

**83** Sei  $\mathbb{R}$  mit dem üblichen euklidischen Abstand als Metrik versehen. Sind folgende Teilmengen offen oder abgeschlossen (oder “weder-noch”)? [Argumentation an Hand von Skizzen genügt!] ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ )

$$A = [a, b[, \quad B = \{a\}, \quad C = \bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right[, \quad D = [a, \infty[$$

**84** Im  $\mathbb{R}^2$  mit der üblichen euklidischen Norm  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ : Sind folgende Teilmengen offen oder abgeschlossen (oder “weder-noch”)? [Argumentation an Hand von Skizzen genügt!]

$$E = [a_1, b_1[ \times [a_2, b_2[ \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i = 1, 2), \quad F \text{ eine endliche Teilmenge,}$$

$$G = \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|z\| < 2\}, \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \frac{1}{x}\}$$

**85** Bestimmen Sie für die Mengen in Aufgaben **83-84** jeweils den Rand, das Innere und den Abschluss.

## Zu §16: Konvergenz und Stetigkeit

**86** Zeigen Sie: Grenzwerte konvergenter Folgen in metrischen Räumen sind eindeutig.

**87** Skizzieren Sie jeweils die ersten Glieder der Folge  $(x_k)$  im  $\mathbb{R}^2$  und berechnen Sie den Grenzwert für  $k \rightarrow \infty$ , falls er existiert:

(a)  $x_k := \left( \frac{k-1}{k}, \frac{1}{k} \right)$

(b)  $x_k := \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \frac{\log k}{k} \right)$

(c)  $x_k := \left( \left(-\frac{k+1}{k}\right)^k, (-1)^{k+1} \right)$

(d)  $x_k := \left( \frac{2^k}{3^{k+1}}, \sqrt[k]{k} \right)$

**88** Ist die Folge aus Aufgabe **87**(c) beschränkt? Falls ja, geben Sie explizit eine Konstante  $C$  an, für die  $\|x_k\| \leq C$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Welcher Wert für  $C$  ist optimal, das heißt im vorliegenden Fall minimal?

**89** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

(a) Zeigen Sie: für jedes  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$  sind die *partiellen Funktionen*  $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto f(a, y)$ , und  $h_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x, b)$ , stetig.

(b) Ist  $f$  stetig in  $(0, 0)$ ?

(Hinweis: Berechnen Sie z.B.  $\lim_{r \searrow 0} f(r, r)$ .)

*Eventuell selbst zu überlegen* bzw. zur Verdeutlichung häufiger Missverständnisse: Warum steht Ihre Schlussfolgerung in (b) nicht im Widerspruch zu dem Satz aus der VO, wo Äquivalenz der Stetigkeit von Abbildungen in den  $\mathbb{R}^n$  zur Stetigkeit aller Komponentenfunktionen gezeigt wurde?

**90** Der komplexe Vektorraum  $\mathcal{C}([a, b])$  der stetigen (komplexwertigen) Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  sei versehen mit der Norm  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$  (gemäß VO ist das ein

Banach-Raum). Zeigen Sie, dass das lineare Funktional  $L : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$  stetig ist und berechnen Sie seine Operatornorm  $\|L\|_{\text{op}}$ .

**91** Es sei  $E := \{L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ linear}\}$  und  $\|\cdot\|$  bezeichne die euklidischen Normen auf  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$ . Zeigen Sie, dass durch  $\|L\|_{\text{op}} := \sup\{\|Lx\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$  eine Norm auf  $E$  definiert wird.

**92** (a) (Mit den Bezeichnungen aus **91**) Zeigen Sie, dass  $\|L\|_{\text{op}} = \sup\{\|Lx\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$  gilt.

(b) Wie würden Sie die Operatornorm der linearen Abbildung  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  konkret bestimmen? Verwenden Sie (a), um die Frage in eine Extremwertaufgabe für eine reelle Funktion auf dem Intervall  $[-1, 1]$  zu verwandeln.

(Hinweis: Dies ist trotzdem noch rechenaufwendig! Falls Sie den Wert tatsächlich berechnen wollen, nehmen Sie hier möglichst einen Computer oder Taschenrechner [und Skizzen] zu Hilfe.)

**93** Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := e^{-\frac{x}{e}} = \exp(-x/e)$ . Zeigen Sie, dass genau ein Punkt  $a \in \mathbb{R}$  existiert mit  $a \cdot e^{\frac{a}{e}} = 1$  und überdies  $0 < a < 1$  gilt.

**94** Es sei  $A$  eine lineare Abbildung auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $\|A\|_{\text{op}} < 1$  und  $b \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  der Gleichung

$$x = b + Ax$$

gibt. Es folgt also  $x = (I - A)^{-1}b$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Welche Näherungsformel für  $(I - A)^{-1}$  ergibt das iterative Verfahren aus dem Beweis des Fixpunktsatzes von Banach für den Startwert  $x_0 := b$ ?

## Zu §17: Kompaktheit

**95** Welche der Teilmengen aus Aufgaben 83-84 sind kompakt? Von welchen dieser Teilmengen ist der Abschluss kompakt? Welche dieser Teilmengen haben kompakten Rand?

**96** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ . Zeigen Sie, dass  $(K, d|_{K \times K})$  ein vollständiger metrischer Raum ist.

(Hinweis: Hilft Ihnen dabei die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß weiter?)

**97** (a) Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt und  $A \subseteq X$  abgeschlossen mit  $A \cap K = \emptyset$ . Zeigen Sie: es gibt ein  $c > 0$  derart, dass

$$\forall x \in A \forall y \in K : d(x, y) \geq c.$$

(Hinweis:  $X \setminus A$  ist offen und enthält alle Punkte aus  $K$ ; überdecken Sie  $K$  mit geeigneten Kugeln.)

(b) Geben Sie ein Beispiel im  $\mathbb{R}^2$  (mit der euklidischen Metrik) an, das belegt, dass die Aussage in (a) falsch wird, wenn  $K$  nur als abgeschlossen vorausgesetzt wird.

## VII. DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

### Zu §18: Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

**98** Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x^2 + ye^{2z} + \log(x^2 + y^2)$ . Sind diese stetig?

**99** Es sei  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ .

(a) Ist  $r$  in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar?

(b) An welchen Stellen ist  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := x \cdot r(x, y)$  partiell differenzierbar? Wie lauten die partiellen Ableitungen?

**100** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ist  $f$  zweimal partiell differenzierbar? Gilt die Relation  $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$  (auf ganz  $\mathbb{R}^2$ )?

**101** Sei  $U := \mathbb{R}^2 \times ]0, \infty[ \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $u(x, y, t) := \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$ .

(a) Es bezeichne  $\nabla_{(x,y)} u$  die Abbildung  $(D_1 u, D_2 u) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, dass für alle  $(x, y, t) \in U$  gilt:

$$\nabla_{(x,y)} u(x, y, t) = -\frac{u(x, y, t)}{2t} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



(b) Sei  $\Delta_{(x,y)} u := D_1^2 u + D_2^2 u$ . Zeigen Sie, dass  $u$  in  $U$  die Wärmeleitungsgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta_{(x,y)} u.$$

**102** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$  ( $t \in I$ ). Drücken Sie die Differenzierbarkeit von  $f$  und die Ableitung  $\dot{f}(t) := Df(t)$  mit Hilfe der Komponentenfunktionen  $f_j: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) aus. Wie können Sie den Vektor  $\dot{f}(t) \in \mathbb{R}^m$  in Bezug auf  $f$  und  $f(t)$  geometrisch deuten?

Illustrieren Sie die Diskussion am Beispiel:  $f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) := (\cos(t), \sin(t))$ .

**103** (a) Es sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq_{\text{offen}} U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  ( $x \in U$ ). Zeigen Sie, dass  $f$  im Punkt  $a$  aus  $U$  genau dann differenzierbar ist, wenn alle Komponentenfunktionen  $f_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) es sind. Drücken Sie die Ableitung  $Df(a)$  durch jene der  $f_1, \dots, f_m$  in  $a$  aus.

(b) Begründen Sie, warum  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(r, \varphi, \theta) := (r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta))$  differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

**104** Diskutieren Sie die Differenzierbarkeit der Funktionen aus Aufgaben **89** und **99**.

**105** (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := 2x^2 + 6xy + 3y^2$  im Punkt  $(3, 2)$  in Richtung zum Punkt  $(2, 3)$ .

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von  $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) := \log(\sqrt{x^2 + y^2})$  in einem Punkt  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  in Richtung zum Ursprung.

**106** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  (siehe VO,

Beispiel 18.2.3). Zeigen Sie, dass an der Stelle  $(0, 0)$  alle Richtungsableitungen von  $f$  existieren, die Funktion dort aber nicht differenzierbar ist.

**107** Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := \sin(x) + e^{x^2 y} + y^3$ , im Punkt  $(0, 2, f(0, 2))$ . Gibt es Punkte  $(x_0, y_0)$ , über denen die Tangentialebene horizontal (d.h. parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene) ist?

**108** Es sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq_{\text{offen}} U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $x \in U$  mit  $\text{grad } f(x) \neq 0$  und  $c := f(x)$ .

Zeigen Sie, dass  $\text{grad } f(x) \in \mathbb{R}^n$  in folgendem Sinne normal auf die Niveaumenge („Niveau-Hyperfläche“)  $N_f(c) := f^{-1}(\{c\}) = \{y \in U : f(y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^n$  steht: ist  $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $\gamma(I) \subseteq N_f(c)$  und  $\gamma(0) = x$  (d.h.  $\gamma$  „ist eine Kurve in  $N_f(c)$  durch  $x$ “), so folgt (mit der Notation  $\dot{\gamma}(t) := D\gamma(t)$ )

$$\langle \text{grad } f(x) | \dot{\gamma}(0) \rangle = 0.$$

**109** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $a, b \in U$  derart, dass auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen  $a$  und  $b$  in  $U$  enthalten ist.

(a) Zeigen Sie folgende Version des Mittelwertsatzes (VO 18.18) für *reellwertige* differenzierbare Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ : Es gibt einen Punkt  $\xi$  auf der Verbindungsstrecke zwischen  $a$  und  $b$ , so dass

$$f(b) - f(a) = Df(\xi) \cdot (b - a).$$

(Hinweis: betrachten Sie die Funktion  $f \circ \gamma$ , wobei  $\gamma(t) = a + t(b - a)$  für  $0 \leq t \leq 1$  die Verbindungsstrecke von  $a$  nach  $b$  durchläuft.)

(b) Zeigen Sie an Hand eines Gegenbeispiels, dass für *vektorwertige* differenzierbare Abbildungen  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  die (a) entsprechende Aussage im Allgemeinen falsch ist.

*Zusatzfrage (freiwillig):* Warum gilt dennoch die folgende Aussage?

Ist die Jacobi-Matrix  $DF(\xi) = 0$  für alle  $\xi$  auf der Strecke von  $a$  nach  $b$ , dann ist entlang dieser Strecke  $F$  konstant (d.h. gleich einem festen Vektor aus  $\mathbb{R}^m$ ).

**110** Es sei  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $h(t) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2} dx$ .

(a) Berechnen Sie die Ableitung von  $h$  sowie  $h(0)$ .

(b) Sei weiters  $G(t) := (\int_0^t e^{-u^2} du)^2$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Zeigen Sie, dass  $G + h$  konstant ist und bestimmen Sie diese Konstante durch Berechnung von  $G(0) + h(0)$ . Beweisen Sie nun durch Grenzübergang  $t \rightarrow +\infty$  die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Zu §19: Taylor-Formel und lokale Extrema

**111** (a) Formulieren Sie den Spezialfall der Taylor-Formel für eine Funktion von zwei Variablen ohne Verwendung der Multi-Index-Notation.

(b) Wie lautet die Taylor-Approximation zweiter Ordnung für die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := \sin(x) + e^{x^2 y} + y^3$  (vgl. **107**) an der Stelle  $(0, 2)$ ?

**112** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) := (y - x^2)(y - 2x^2)$ . Zeigen Sie (nach Peano 1884):

(a)  $\text{grad } f(0, 0) = 0$ , aber  $f$  hat in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum

(Hinweis: skizzieren Sie die Gebiete im  $\mathbb{R}^2$ , wo  $f$  positives oder negatives Vorzeichen hat.)

(b) entlang jeder Geraden durch den Ursprung wird  $f$  über  $(0, 0)$  minimal.

**113** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $z_0 \in U$  mit  $\text{grad } f(z_0) \neq 0$ . Weiters seien die Abbildungen  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(y) := D_y f(z_0)$  (Richtungsableitung) sowie  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $h(t) := (\cos(t), \sin(t))$  gegeben. Finden Sie die Maximal- und Minimalwerte der Funktion  $R := g \circ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**114** Es sei  $A$  eine symmetrische reelle  $(n \times n)$ -Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) := \frac{1}{2}\langle Ax|x \rangle + \langle b|x \rangle + c$ . Finden Sie jeweils (hinreichende) Bedingungen an  $A$ ,  $b$  und  $c$ , damit folgendes gilt:

- (a)  $f$  hat genau ein striktes lokales Maximum
- (b)  $f$  hat keine kritischen Stellen
- (c)  $f$  hat unendlich viele kritische Stellen und all diese sind (nicht strikte) lokale Minima.

**Aufgaben 115-117** Bestimmen Sie jeweils die lokalen Maxima und Minima der gegebenen Funktionen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind diese global?

**115**  $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$ .

(Sogenanntes *folium cartesii*, diskutiert in einem Brief von Descartes an Mersenne vom 23. August 1638; [aus E. Hairer und G. Wanner, *Analysis by its history*, Springer-Verlag 1996].)

**116**  $f(x, y) := 3xe^y - x^3 - e^{3y}$

**117**  $f(x, y) := x^3 - 4y^3 + 3x^2 - y^4$ .

**118** Bestimmen Sie für die Funktion  $f(x, y) := x^2y$  jeweils lokale und globale Maxima und Minima auf

- (a) der offenen Kreisscheibe  $x^2 + y^2 < 1$
- (b) dem Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1$
- (c) der abgeschlossenen Kreisscheibe  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**119** Bestimmen Sie im  $\mathbb{R}^3$  die Punkte mit minimalem bzw. maximalem Abstand vom Ursprung auf dem Schnitt des Ellipsoides  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  mit der Ebene  $x + y + z = 0$ . (Dadurch erhalten Sie die Neben- und Hauptscheitel der Schnittellipse.)

**120** Es sei  $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(z) := \|A \cdot z\|^2$ , wobei  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie Maximum und Minimum von  $f$  auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = 1$ . Vergleichen Sie mit Aufgabe **92**.

**121** (a) Es sei  $B$  eine symmetrische (reelle)  $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass das Maximum und Minimum der zugeordneten quadratischen Form  $q(z) := \langle z|Bz \rangle$ ,  $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , auf der  $S^{n-1}$  durch den größten bzw. kleinsten Eigenwert von  $B$  gegeben ist.

(b) Schließen Sie aus (a), wie Sie die Operatornorm für eine beliebige (lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit zugehöriger  $n \times n$ -Matrix  $A$  (bzgl. der Standardbasen) durch Rückführung auf Eigenwerte einer geeignet gewählten Matrix bestimmen können.

Hinweis:  $\|Az\|^2 = \langle z|A^*Az \rangle$ .

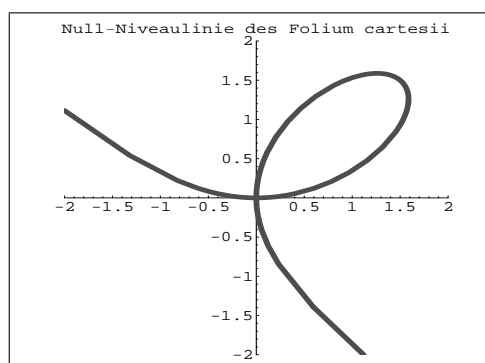
## Zu §20: Implizite Funktionen und Umkehrsatz

**122** („implizit versus explizit“) Es sei  $f(x, y) := x^2 + y^2$ , sodass also die Niveaumenge  $N_f(1) = f^{-1}(\{1\})$  für  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zum Wert 1 den Einheitskreis beschreibt.

In welchen Bereichen des  $\mathbb{R}^2$  kann jeweils eine Variable als differenzierbare Funktion der anderen ausgedrückt werden? Was gibt Ihnen dabei der Satz über implizite Funktionen in die Hand und was sehen Sie in diesem konkreten Beispiel selbst (direkt) besser? Vergleichen Sie aber auch die implizite Berechnung der Ableitungen mit jener aus der expliziten Auflösung nach einer Variable.

**123** Studieren Sie die Niveaumengen der Funktion aus Aufgabe **115**. Für welche Punkte kann der Satz über implizite Funktionen keine Aussage machen? An welchen Stellen ist *notwendig* keine Auflösbarkeit nach  $y$  (als differenzierbare Funktion von  $x$ ) möglich? Wo in der verbleibenden Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ergibt sich jeweils  $y'(x) = 0$ ?

Bemerkung: zur griffigeren Beschreibung der Niveaulinien können wir auch versuchen, diese als parametrisierte Kurvenstücke im  $\mathbb{R}^2$  darzustellen; das heißt wir setzen  $x(t) := r(t) \cos(t)$  und  $y(t) := r(t) \sin(t)$  und hoffen, die Funktion  $r$  aus der Gleichung  $f(x(t), y(t)) = c$  bestimmen zu können. Zum Beispiel funktioniert das hier für die Null-Niveaulinie ganz gut und ergibt nebenstehendes Bild. Probieren Sie es mal aus!



**124** Es sei  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y, z) := xz + \sin(xy) + \cos(xz) - 1$  mit Nullstellenmenge  $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ . Welche Variablen können in einer Umgebung von  $(0, 1, 1)$  jeweils innerhalb  $N$  als Funktion der beiden anderen ausgedrückt werden? Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der sich ergebenden Funktionen.

**125** Es sei  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x y + \sin(xz) + \log(1 + z) - 2 \\ \sin(x^2 y) + y^2 + z^5 - 4 \end{pmatrix}.$$

Welche zwei Variablen lassen sich aus dem Gleichungssystem  $F(x, y, z) = 0$  in einer Umgebung des Punktes  $(0, 2, 0)$  durch die jeweils dritte ausdrücken? Berechnen Sie die Differentiale der sich dabei ergebenden Funktionen an der  $(0, 2, 0)$  entsprechenden Stelle.

**126** Interpretieren Sie die Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^2$ , als Abbildung  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , indem Sie  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  durch  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ersetzen. Berechnen Sie das Differential von  $g$  und untersuchen Sie, auf welcher Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  die Abbildung  $g$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Ist  $g$  ein Diffeomorphismus dieser Teilmenge  $W$  mit ihrer Bildmenge  $g(W)$ ?

**127** (Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$  [vgl. Aufgabe **103**](b))

Es sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$f(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(a) Ist  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus?

(b) Nun sei  $U := ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \subseteq \mathbb{R}^3$ . Beschreiben Sie die Bildmenge  $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ , indem Sie für einen Punkt  $(x, y, z) = f(r, \varphi, \theta)$  die Größen  $r$ ,  $\varphi$  und  $\theta$  geeignet als Radius, Winkel der Projektion auf die Ebene  $z = 0$  und Winkel mit der  $z$ -Achse interpretieren (Skizze!).

(c) Wir setzen  $g := f|_U: U \rightarrow V$ . Zeigen Sie, dass  $g$  bijektiv ist.

*Zusatzfrage:* Ist  $g$  ein Diffeomorphismus?