Proseminar Differentialgeometrie 1

Michael Kunzinger

SS 2006

32. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\alpha \in \Lambda^2 E^*$ und $\beta \in \Lambda^1 E^*$. Dann gilt für $e_1, e_2, e_3 \in E$:

$$(\alpha \wedge \beta)(e_1, e_2, e_3) = \alpha(e_1, e_2)\beta(e_3) - \alpha(e_1, e_3)\beta(e_2) + \alpha(e_2, e_3)\beta(e_1)\,.$$

33. Sei E ein n-dimensionaler Vektorraum und $k \leq n$. Zeige: $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in E^*$ sind linear abhängig genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = 0$.

34. Seien $\varphi, \psi \in L(E, E)$. Leite die folgenden Eigenschaften der Determinante direkt aus der Definition 2.7.12 her:

    (a) $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi)$.

    (b) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

    (c) φ ist ein linearer Isomorphismus genau dann wenn $\det(\varphi) \neq 0$. (*Hinweis*: Falls φ kein Isomorphismus ist, existiert ein $e_1 \neq 0$ mit $\varphi(e_1) = 0$. Ergänze e_1 zu einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von E und berechne $\varphi^*\omega(e_1, \dots, e_n)$).

35. Zeige: für glatte Funktionen a_{ij} sind folgende Aussagen äquivalent:

    (i) $d(\sum_{i<j} a_{ij}\, dx^i \wedge dx^j) = 0$.

    (ii) $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} = 0$ für alle $i < j < k$.