

Proseminar Differentialgeometrie 1

Michael Kunzinger

SS 2006

29. Seien E, F n -dimensionale Vektorräume, $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_n\}$ Basen von E bzw. F und $\mathcal{B}_{E^*} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$, $\mathcal{B}_{F^*} = \{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ die zugehörigen dualen Basen. Sei $\varphi : E \rightarrow F$ ein linearer Isomorphismus, der bezüglich $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ die Matrix $[\varphi]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} = A = (A^i_j)_{i,j}$ besitzt. Schließlich sei $[\varphi^{-1}]_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E} = B = (B^i_j)_{i,j}$. Zeige:

(a) $[\varphi^*]_{\mathcal{B}_{F^*}, \mathcal{B}_{E^*}} = A^t$.

- (b) Sei $t \in T_s^r(E)$, $t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s}$. Dann ist

$$\varphi_s^r t = (t')_{j'_1 \dots j'_s}^{i'_1 \dots i'_r} f_{i'_1} \otimes \dots \otimes f_{i'_r} \otimes \beta^{j'_1} \otimes \dots \otimes \beta^{j'_s}$$

mit $(t')_{j'_1 \dots j'_s}^{i'_1 \dots i'_r} = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot A^{i'_1}_{i_1} \cdot A^{i'_r}_{i_r} \cdot B^{j_1}_{j'_1} \cdot \dots \cdot B^{j_s}_{j'_s}$.

30. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\psi = (x^1, \dots, x^n)$, $\varphi = (y^1, \dots, y^n)$ Karten von M .

- (a) Sei $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Dann gilt auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche von ψ und φ :

$$t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} = (t')_{j'_1 \dots j'_s}^{i'_1 \dots i'_r} \frac{\partial}{\partial y^{i'_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i'_r}} \otimes dy^{j'_1} \otimes \dots \otimes dy^{j'_s}$$

wobei

$$(t')_{j'_1 \dots j'_s}^{i'_1 \dots i'_r} = \frac{\partial y^{j'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{j'_s}} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

Hinweis: Verwende 29 (b) mit $E = F = T_p M$ und $\varphi = \text{id}_{T_p M}$, sowie 2.4.15 aus der Vorlesung.

- (b) Folgere aus (a), dass für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k.$$

31. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeige:

- (a) Die Abbildung $A : T_1^1(E) \rightarrow L(E^*, E^*)$, $A(t) = \alpha \mapsto t(\alpha, \cdot)$ ist ein linearer Isomorphismus mit Inverser $B : L(E^*, E^*) \rightarrow T_1^1(E)$, $B(F)(\alpha, e) = F(\alpha)(e)$.
- (b) Die Abbildung $\tilde{A} : T_1^1(E) \rightarrow L(E, E)$, $\tilde{A}(t) = e \mapsto t(\cdot, e)$ ist ein linearer Isomorphismus mit Inverser $\tilde{B} : L(E, E) \rightarrow T_1^1(E)$, $\tilde{B}(F)(\alpha, e) = \alpha(F(e))$.