

Proseminar Differentialgeometrie 1

Michael Kunzinger

SS 2006

25. Sei (E, B, π) ein Vektorbündel und $\Psi : W \rightarrow W' \times F'$ eine Vektorbündelkarte von E . Zeige, dass $W = \pi^{-1}(W \cap B)$.
26. Seien M, N Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Für X ein glattes Vektorfeld auf M ($X \in \mathfrak{X}(M)$) sei $f_*X := Tf \circ X \circ f^{-1}$ der Push-Forward von X unter f . Zeige:
- (a) f_*X ist ein glattes Vektorfeld auf N .
 - (b) Für $g \in C^\infty(N)$ und $p \in N$ gilt: $(f_*X)(g)(p) = X_{f^{-1}(p)}(g \circ f)$ (verwende (2.4.4) aus der Vorlesung).
 - (c) Zeige mittels (b), dass für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt: $[f_*X, f_*Y] = f_*([X, Y])$.
27. Seien X, Y, Z die folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \\ Z &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Zeige, dass die Abbildung $\alpha : \mathcal{M} := \{aX + bY + cZ \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(aX + bY + cZ) = (a, b, c)$ wohldefiniert ist und dass für $U, V \in \mathcal{M}$ gilt: $\alpha([U, V]) = \alpha(U) \times \alpha(V)$ (Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$).

28. Berechne die Flüsse der Vektorfelder X, Y, Z aus Aufgabe 27. Interpretiere die Abbildungen geometrisch. Sind X, Y und Z vollständig?