# Proseminar Differentialgeometrie 1

**Michael Kunzinger**

SS 2006

21. (a) Sei $(\psi, V)$ die folgende Karte der $S^1$: $V = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 < \theta < 2\pi\}$, $\psi(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$. Sei $f : S^1 \to \mathbb{R}$ so, dass $f(\cos\theta, \sin\theta) = e^{2\theta}$ auf $V$. Berechne $\frac{\partial}{\partial\theta}\big|_{p_0} f$, wobei $p_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

    (b) Sei $M$ eine Mannigfaltigkeit, $(\psi, V)$ eine Karte und $\psi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Sei $f : p \mapsto g(x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Drücke $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p f$ durch $g$ aus.

22. Sei $(\psi, V)$ die in 21. (a) angegebene Karte der $S^1$ und $(\varphi, U)$ die folgende Karte: $U = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) \mid x \in (-1, 1)\}$, $\varphi : (x, -\sqrt{1-x^2}) \mapsto x$. Drücke $\frac{\partial}{\partial\theta}$ durch $\frac{\partial}{\partial x}$ aus, und umgekehrt.

23. (a) Gib eine Basis des Tangentialraums der $S^2$ in einem allgemeinen Punkt an (verwende Kugelkoordinaten als Parametrisierung).

    (b) Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$ die Einschränkung der Abb. $(x^1, x^2, x^3) \mapsto x^2$ auf die $S^2$. Bestimme die Matrix der Tangentialabbildung von $f$ in $p \in S^2$ bezüglich der in (a) angegebenen Basis und der natürlichen Basis von $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

24. Sei $\mathcal{F}_p(M)$ der Raum der lokal um $p$ definierten glatten Funktionen, die von der Form

$$f = c + \sum_{i \in I} f_i g_i$$

sind, wobei $c$ konstant ist und $I$ eine endliche Menge ($c$ und $I$ hängen von $f$ ab), und $f_i(p) = g_i(p) = 0$ für alle $i \in I$. Zeige: eine lineare Abbildung $\partial$ auf der Menge der lokal um $p$ definierten glatten Funktionen ist genau dann eine Derivation, wenn sie auf $\mathcal{F}_p(M)$ verschwindet. (Auf diese Weise erhält man also eine weitere äquivalente Möglichkeit, den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit zu definieren.)