Proseminar Differentialgeometrie 1

Michael Kunzinger

SS 2006

17. (a) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein homogenes Polynom vom Grad ≥ 1, das an mindestens einer Stelle einen positiven Wert annimmt. Zeige: dann ist die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

    (b) Zeige, dass das ein- bzw. zweischalige Hyperboloid $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^3 - x_3^3 = 1\}$ bzw. $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^3 - x_3^3 = 1\}$ eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

18. *Präzisierung von Bem. 2.2.2 (iv) aus der Vorlesung:*

    (a) Zeige, dass durch die Karte $(\psi, \mathbb{R})$, $\psi : x \to x^3$ eine C^∞-Struktur auf $\mathbb{R}$ definiert wird, die ungleich der Standard-C^∞-Struktur ist.

    (b) Finde einen Diffeomorphismus zwischen den beiden in (a) angegebenen Mannigfaltigkeiten.

19. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit (Hausdorff und AA2). Sei U offen in M und $A \subseteq U$ abgeschlossen. Dann existiert eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f|_A = 1$ und $f|_{M \setminus U} = 0$.

20. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit (Hausdorff und AA2). Sei $p \in U$, U offen in M und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Zeige, dass es eine glatte Funktion $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ gibt, die auf einer Umgebung von p mit f übereinstimmt.