Proseminar Differentialgeometrie 1

Michael Kunzinger

SS 2006

13. (a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist.

    (b) Gib ein Beispiel für zwei Funktionen f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, sodass $f \circ g$ C^∞ ist, aber g nicht C^∞ ist.

14. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$. Bestimme die Nullstellenmenge $M := f^{-1}(0)$ von f (Verwende z.B. *Mathematica*). Definiert f die Struktur einer Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ auf M? Wie hängt dies mit Beispiel 2.1.7 (iii) aus der Vorlesung zusammen?

15. Zeige, dass durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y - z &= 0 \\ 2x^2 + 3xy - 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

eine Teilmannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ festgelegt wird. Bestimme die Dimension von M.

16. Seien M, N Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

    (a) Sei (ψ, V) eine Karte von M und W offen in M. Dann ist auch $(\psi|_{V\cap W}, V \cap W)$ eine Karte von M.

    (b) Sei $f : M \to N$ C^∞ und U offen in M. Dann ist $f|_U : U \to N$ C^∞.

    (c) Sei $f : M \to N$ stetig. Zeige: f ist genau dann C^∞, wenn für jede glatte Abbildung $g : V \to \mathbb{R}$ mit V offen in N gilt: $g \circ f$ ist glatt.