Proseminar Differentialgeometrie 1

Michael Kunzinger

SS 2006

9. Sei c eine reguläre Kurve im $\mathbb{R}^3$. Zeige:
   (a) c ist Teil einer Geraden genau dann, wenn $\kappa = 0$.
   (b) Ist c Frenet, so liegt c genau dann in einer Ebene, wenn $\tau = 0$.

10. Unter der Hauptnormale einer Frenet-Kurve c im $\mathbb{R}^3$ im Punkt $c(s_0)$ versteht man die Gerade $\lambda \mapsto c(s_0) + \lambda e_2(s_0)$. Zeige, dass c auf einem Kreis liegt, falls alle Hauptnormalen von c einen Punkt gemeinsam haben.

11. (a) Zeige, dass man nahe $(x_0, y_0) = (\pi, \pi/2)$ im Gleichungssystem

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \quad \sin x + \cos y = v$$

   x und y als glatte Funktionen von (u, v) schreiben kann. (Präzisiere zunächst diese Aufgabenstellung!)

   (b) Zeige, dass nahe dem Punkt $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

   u und v eindeutig als glatte Funktionen von x und y festgelegt sind. Berechne $\frac{\partial u}{\partial x}$ an der Stelle $(1, 1)$.

12. Zeige, dass der Zylinder M im $\mathbb{R}^3$, der die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ hat, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 2 im $\mathbb{R}^3$ ist. Gib außerdem eine lokale Parametrisierung, eine Darstellung als lokaler Graph und eine lokale Trivialisierung von M an.