Proseminar Differentialgeometrie 1

Michael Kunzinger

SS 2006

1. (a) Seien E, F endlichdimensionale Vektorräume und $f : E \to F$ eine Abbildung. Wann heißt f differenzierbar in einem Punkt $x \in E$? Was versteht man unter der Ableitung $Df(x)$ von f in x?

   (b) Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?

   (c) Sei $f : E \to F$ linear. Zeige, dass $Df(x) = f$ für alle $x \in E$.

   (d) Sei $f : E_1 \times E_2 \to F$ bilinear. Zeige, dass für $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ und $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ gilt:
   $$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$
   (*Hinweis:* $Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))$).

2. Zeige, dass
   $$c : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ \ c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$$
   eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Sphäre um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ liegt.

3. Eine Kurve c ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = 2\cos\theta - 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Bestimme die Gleichung von c in kartesischen Koordinaten und zeige, dass c eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass c einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von c?

4. Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve
   $$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)\,.$$