Aufgabensammlung

zur Vorlesung

Einführung in das mathematische Arbeiten

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Wintersemester 2013/14

Dieses Skriptum enthält Aufgaben zur Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten* für BachelorstudentInnen, die geblockt am Anfang des Semesters (1.10.2013–14.11.2013) stattfindet und in diesem Zeitraum von den jeweiligen Übungen zu den Hauptvorlesungen *„Einführung in die Analysis"* und *„Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie"* begleitet wird. Dementsprechend zerfällt dieses Skriptum in die beiden Teile „Analysis" und „Lineare Algebra und Geometrie". Die entsprechenden Aufgaben bilden die Arbeitsgrundlage für die jeweiligen Übungtermine ab dem 7.10.2013.

Allgemein bilden Übungen mit der dazugehörigen Vorlesung stets eine untrennbare Einheit: Der behandelte Stoff ist identisch, es werden bloß die beiden jeweils passenden Komponenten eines als einheitlich zu sehenden Lernprozesses auf die beiden Lehrveranstaltungstypen aufgeteilt. Ein erfolgreicher Einstieg in das Studium der Mathematik kann daher nur auf der Basis einer engagierten Teilnahme an *beiden* Veranstaltungen entstehen.

Die hier zusammengestellten Aufgaben dienen der eigenständigen Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung. Im Rahmen der wöchentlichen Übungstermine werden die Aufgaben dann von den TeilnehmerInnen vorgetragen und diskutiert mit dem Ziel, dass schließlich alle alles durchschaut haben und die einschlägigen Fragen geklärt wurden..

Einen beträchtlichen Anteil der hier vorliegenden Aufgaben durfte ich in mehr oder weniger veränderter Form von meinen zahlreichen KollegInnen übernehmen, die im Laufe der vergangenen Jahre jeweils die Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten" gehalten haben. Ihnen allen möchte ich an dieser Stelle herzlich danken!

Michael Grosser, September 2013

Inhaltsverzeichnis

ANALYSIS **3**
Erste Beweise 3
Indizes, Summen- und Produktzeichen 4
Mengen, Relationen 6
Abbildungen 7
Komplexe Zahlen 9

LINEARE ALGEBRA UND GEOMETRIE **10**
Erste Beweise 10
Induktion 10
Logik 11
Ordnungseigenschaften, Betrag 13
Gruppen, Ringe, Körper 13

Selbstverständlich bringen Sie in jede Übungsstunde Ihre Unterlagen mit den von Ihnen ausgearbeiteten Aufgaben(teilen) mit. Wenn Sie dann eine dieser Aufgaben an der Tafel präsentieren, werden Sie sich natürlich auf ihre Vorbereitung stützen.

Es ist allerdings wesentlich, dass Sie sich von Anfang darauf einstellen, dass eine solche Präsentation nicht eine gedankenlose Abschreibübung von Ihrer Vorbereitung darstellen soll, sondern dass Sie sich zwar grundsätzlich an dieser orientieren, zwischen den prüfenden Blicken auf Ihre Unterlagen jedoch immer wieder „frisch gekocht“ denken, schreiben und erklärend vortragen, und nicht bloß die „Lösung aus der Konserve/Mikrowelle“ vorführen — diejenigen Ihrer KollegInnen, die die betreffende Aufgabe nicht oder nicht vollständig gelöst haben, sollen ja aus Ihrem lebendigen Vortrag entnehmen, wie es geht.

Seit langer Zeit habe ich überlegt, auf welche Weise ich dieses „frisch denken“ beim Vortragen fördern könnte. Ich habe nun für die (jeweils der „Einführung in das mathematische Arbeiten“ zugeordneten Anfangsabschnitte der) Übungen dieses Semesters für einige der mehr rechnerisch orientierten Aufgaben eine Zweitvariante vorbereitet, die eine Kleinigkeit einfacher ist (kürzere Ausdrücke, kleinere Zahlen etc.) als die Originalvariante in der vorliegenden Aufgabensammlung.

Ihre ÜbungsleiterIn wird von mir die Kollektion dieser Zweitvarianten erhalten, und wenn Sie eines dieser Beispiele vorführen, werden Sie eventuell ersucht, auf Grundlage der Erfahrungen, die Sie mit der hier vorliegenden Originalaufgabe gemacht haben, ad hoc die alternative Light-Version vorzutragen. Ihre Vorbereitung hilft Ihnen dabei natürlich, aber auf eine buchstabengetreue 1:1-Übertragung von Ihrem vorbereiteten Blatt auf die Tafel kann es natürlich nicht mehr hinauslaufen.

Zu Ihrer Orientierung ein einfaches Beispiel von Original- und Alternativversion: Wenn Sie in dieser Aufgabensammlung etwa die Summe $\sum_{k=2}^{6} b_{k-1}$ ohne Verwendung des Summenzeichens schreiben sollen (die Lösung wäre hier $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$), dann würde Sie Ihre ÜbungsleiterIn zum Beispiel auffordern, an der Tafel stattdessen die Summe $\sum_{n=1}^{4} a_n$ ohne Summenzeichen zu schreiben (die Lösung wäre hier $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$).

Analysis

Erste Beweise

1) Sie mussten gerade 31 Euro.Cent-Beträge für die Tage eines Monats aus einer vorliegenden Liste (maschinell) zusammenaddieren. Als gewissenhafte RechnerIn machen Sie die Probe, indem Sie die Eingabe danach ein zweites Mal durchführen. Die Eurobeträge stimmen dann zwar überein, aber ärgerlicherweise ergibt sich bei dieser zweiten Rechnung eine Differenz in den Centbeträgen, die ein Vielfaches von 9 beträgt (also 9, 18, 27,... Cent). Welchen Hinweis gibt Ihnen das, nach welcher Art von Eingabefehler Sie zur Aufklärung der Unstimmigkeit als Erstes suchen sollten? Begründen Sie Ihren Vorschlag mit einer Rechnung!

2) Proposition 2.1.1 aus der Vorlesung besagt, das das Quadrat einer geraden ganzen Zahl wieder gerade ist. Formulieren und beweisen Sie selbständig eine analoge Aussage für ungerade ganze Zahlen.

3) Zeigen Sie mittels eines indirekten Beweises: Ist n^2 gerade (n eine natürliche Zahl), dann ist auch n gerade.

4) *„Die Summe einer (un)geraden Zahl und einer (un)geraden Zahl ist eine (un)gerade Zahl".* Machen Sie aus diesem Durcheinander vier richtige Sätze und beweisen Sie alle vier.

5) Beweisen Sie, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, sodass

$$21a + 56b = 103$$

gilt. *Hinweis:* Gehen Sie indirekt vor, indem Sie annehmen, dass es solche Zahlen gibt. Dann finden Sie einen Teiler der linken Seite der Gleichung, der die rechte Seite nicht teilt.

6) Was ist falsch an folgendem Beweis:

Behauptung: Die Zahl 1 ist die größte natürliche Zahl.

Beweis: Zunächst kommt 0 als größte natürliche Zahl sicherlich nicht in Frage, denn 1 ist ja schon größer als 0. Sei nun N die größte natürliche Zahl. Für einen indirekten Beweis nehmen wir an, dass $N > 1$ ist. Daraus folgt $N = N \cdot 1 < N \cdot N = N^2$. Wir erhalten also, dass die natürliche Zahl N^2 größer ist als N, im Widerspruch zur Wahl von N als *größter* natürlicher Zahl. Damit ist unsere Annahme $N > 1$ falsch und tatsächlich muss $N = 1$ sein.

Indizes, Summen- und Produktzeichen

7) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

   (a) $4 + 8 + 16 + 32 + 64$

   (b) $b_2 + b_6 + b_{18} + b_{54} + b_{162}$

   (c) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k + 1)$

   (d) $2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + 14 - 16$

8) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen an:

   (a) $\sum_{k=2}^{8} 3^{2k-1}$

   (b) $\sum_{l=-4}^{4} a_{l+1}$

   (c) $\prod_{i=2}^{5} ij^i$

   (d) $\prod_{j=3}^{6} k^2$

   (e) $\prod_{j=2}^{4} \sum_{m=1}^{3} (jm + 1)$

   (f) $\sum_{j=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \binom{k}{j}$

9) Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie eine Gleichung für fehlerhaft halten, dann modifizieren Sie deren linke Seite derart, dass eine richtige Gleichung entsteht.

   (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} b_i = \sum_{j=-3}^{10} b_{j+3}$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} (b_i - b_{i-1}) = b_{k-1} - b_1$

   (c) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_n}{a_0}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y^{2k+1} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2n+1} \Big((-1)^j - 1\Big) x^j$

   (e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{2i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_{2j+1}$

   (f) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

   (g) $\displaystyle(\log 5) \sum_{j=0}^{n} c_j = \log \prod_{i=0}^{n} 5^{c_i}$

   (h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

10) Vereinfachen Sie $\sum\limits_{j=73}^{87} a_{85-j}$. Ganze Zahlen mit kleinerem Betrag sollen dabei als einfacher gelten als solche mit größerem Betrag.

11) Ersetzen Sie in (den Termen von) $\sum\limits_{j=0}^{n+1} (j^2 + 2j) \cdot b_{j+1}$ die Laufvariable j durch $j - 1$, ohne den Wert der Summe zu verändern (passende Adaption des Laufbereichs der Summationsvariablen).

12) Lassen Sie in $\sum_{j=0}^{n+1}(j^2+1)\cdot b_{j+1}$ die Summationsvariable j von 1 bis $n+2$ laufen (statt von 0 bis $n+1$), ohne den Wert der Summe zu verändern (passende Adaption des Summenterms).

13) Wieviele Terme enthält jeweils die (Doppel-)Summe

(a) $\sum_{i,j=1}^{10} a_{ij}$

(b) $\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{10} a_{ij}$ (c) $\sum_{\substack{i,j=1\\ i=j}}^{10} a_{ij}$ (d) $\sum_{\substack{i,j=1\\ i\leq j}}^{10} a_{ij}$

(e) $\sum_{\substack{i,j=1\\ |i-j|\leq 2}}^{10} a_{ij}$?

14) Berechnen Sie unter Verwendung der Identität $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ die Summe

$$S = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}\,.$$

Begründen Sie, warum man eine solche Summe „Teleskopsumme“ nennt. Spekulieren Sie, welchen Zahlenwert die kommende Analysis-Vorlesung der „unendlichen Summe“ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ zuweisen wird.

15) Berechnen Sie das Produkt

$$P = \prod_{m=1}^{M} \frac{1}{1+\frac{1}{m}}\,.$$

(Hier spricht man analog zur vorhergehenden Aufgabe von einem „Teleskopprodukt“.) Nun berechnen Sie unabhängig von der bisherigen Rechung $\log P$, indem Sie auf den Logarithmus des Produkts die logarithmischen Rechengesetze anwenden. Welcher Typ von Summe entsteht dabei?

16) Was ergibt sich beim Ausmultiplizieren von

$$(a-x)^1 \cdot (b-x)^2 \cdot (c-x)^3 \cdot \ldots \cdot (y-x)^{25} \cdot (z-x)^{26} \text{ ?}$$

Mengen, Relationen

17) Gegeben $X = \{2, 5, 8, 13\}$, $Y = \{5, 13, 19, 23\}$, $Z = \{2, 8, 16, 20\}$. Bestimmen Sie:

(a) $(X \backslash Y) \cup Z$

(b) $(X \cup Z) \backslash Y$

(c) $(X \cup Y) \backslash (Y \cup Z)$

(d) $X \cup (Y \backslash Z)$

(e) $(Y \cup X) \backslash (X \cap Z)$

18) Beweisen Sie

(a) eines der Distributivgesetze und

(b) eines der De Morgan-Gesetze

aus Theorem 4.1.29. Verwenden Sie für einen der beiden Beweise die Mengentafel, für den anderen die Definitionen der Mengenoperationen und Theorem 3.1.10 (wie im Beweis des Distributivgesetzes in der Vorlesung).

19) Seien A und B Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

(b) $(A \cup B) \cap A = A$

(c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

20) Welche der Eigenschaften „reflexiv“, „symmetrisch“ und „transitiv“ haben die folgenden Relationen R auf M?

(a) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow\ a$ ist Primzahl und teilt b $(M = \mathbb{N})$

(b) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow\ |a| = |b|$ $(M = \mathbb{R})$

(c) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow\ (a$ teilt $b)$ oder $(b$ teilt $a)$ $(M = \mathbb{N})$

(d) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow\ a = 7^m \cdot b$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ $(M = \mathbb{N})$

21) Sei $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Die folgende Tabelle soll eine Relation $\sim$ auf M beschreiben (ähnlich wie Verknüpfungstabellen) - 0 bedeutet, dass zwei Elemente nicht zueinander in Relation stehen, 1 schon. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge, sodass $\sim$ zu einer Äquivalenzrelation wird.

$\sim$	0	1	2	3
0			1	
1				
2			1	
3		0	1	

22) (a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen betrachten wir die (Kongruenz-)Relation

$$x \equiv y \quad :\Longleftrightarrow \quad 4 \text{ teilt } x - y.$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

(b) Finden Sie weitere Beispiele für Äquivalenzrelationen.

(c) Bei einer Versuchsreihe werden 2 Messergebnisse als gleich betrachtet, wenn sie sich um weniger als $10^{-22}m$ unterscheiden. Definiert dieser Gleichheitsbegriff eine Äquivalenzrelation?

Abbildungen

23) Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:

(a) $f_1(x) = x - 2$, $A_1 = \{0, 1, 2\}$, $B_1 = (0, 1)$

(b) $f_2(x) = x^2 - 4$, $A_2 = \{-1, 1\}$, $B_2 = \{-4, 0\}$

(c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant), $A_3 = \{-1, 0\} \cup (1, 4)$, $B_3 = \{a\}$

24) (a) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B. Geben sie die Definitionen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f an in Worten und mittels (logischer oder mengentheoretischer) Formeln an, immer jeweils auf mehrere Arten.

(b) Sind die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^8 \\ f_2 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^4 \\ f_3 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto -3x + 1 \\ f_4 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 7x + 4 \\ f_5 &: \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin x \end{aligned}$$

25) (a) Geben Sie jeweils eine injektive und nicht surjektive, eine surjektive und nicht injektive, eine bijektive und eine weder injektive noch surjektive Funktion von A nach B an, wobei A und B geeignete Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Lassen Sie dabei Ihrer Phantasie freien Lauf und greifen Sie weder auf die Funktionen der vorigen Aufgabe noch auf die Beispiele aus der Vorlesung zurück.

(b) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht bijektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ bijektiv ist? (Beispiel oder Beweis!)

(c) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht injektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ injektiv ist? (Beispiel oder Beweis!)

Die folgende Aufgabe ist von ihrem Umfang her schon ein kleineres Projekt. Sie verlangt von Ihnen ein beträchtliches Maß an Selbständigkeit und cleverer Arbeitsorganisation. Versuchen Sie eventuell, Ihre GruppenleiterIn dazu zu bringen, eine der vier „Disziplinen“ (siehe unten) samt Dopingzusatz mit Ihnen in einer Übungsstunde durchzubesprechen, dann könnten die drei verbleibenden Disziplinen am folgenden Termin von Ihnen und Ihren KollegInnen präsentiert werden.

26) *Wettkampf Bild gegen Urbild: Wer hat die schöneren Formeln?* Seien X und Y Mengen (mit jeweils mindestens 2 Elementen). Der Wettkampf besteht aus vier Teildisziplinen: Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement.

    In der Disziplin „Durchschnitt“ beispielsweise werden für den Kandidaten „Bild“ für alle möglichen $f : X \to Y$ und alle $A, B \subseteq X$ die Mengen $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$ verglichen. Ist die erste dieser Mengen in jedem Fall in der zweiten enthalten, gibt es einen Punkt für „Bild“, ebenso für die umgekehrte Inklusion (d.h. zwei Punkte, falls die beiden Mengen immer übereinstimmen). Analog verläuft der Bewerb für die Kandidatin „Urbild“ und in den anderen Disziplinen.

    Wie geht der Wettkampf punktemäßig aus? Begründen Sie jedes erfolgreiche Abschneiden in einer Teildisziplin mit einem Beweis, jedes erfolglose Abschneiden mit einem Gegenbeispiel. (Zu viel Arbeit? Im Team aufteilen!) Hätte dem Verlierer/der Verliererin ein Doping in Form von Injektivität bzw. Surjektivität der in Betracht gezogenen Funktionen f genützt? Wenn ja, in welchen Teildisziplinen?

    Hinweis zur Bearbeitung. Um Ihnen einen ersten Eindruck zu vermitteln, worum es bei dieser Aufgabe geht, soll hier als Anleitung etwa das Programm für die Disziplin „Durchschnitt“ näher aufgeschlüsselt werden (ohne Doping):

    Für den Kandidaten „Bild“ fragen Sie sich, ob die Formel $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ für alle A, B gilt. Falls ja, beweisen Sie das und geben Sie dem Kandidaten „Bild“ einen Punkt. Falls nicht, skizzieren Sie ein einfaches Gegenbeispiel und lassen „Bild“ leer ausgehen. Genauso untersuchen Sie dann, ob die Formel $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$ für alle A, B gilt, begründen wiederum Ihre Antwort und vergeben im positiven Fall einen weiteren Punkt. Sollten übrigens beide Antworten „ja“ gelautet haben, dann hätte „Bild“ bis jetzt zwei Punkte eingeheimst und es würde sogar die „schöne“ Formel $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle A, B gelten. (Vorsicht, dieser letzte Satz steht bewusst im Konjunktiv!)

    Nun lassen Sie die Kandidatin „Urbild“ in der Disziplin „Durchschnitt“ antreten und stellen und beantworten die analogen Fragen, mit f^{-1} anstelle von f in den Formeln.

27) Es seien X eine Menge und $f : X \to X$ eine Funktion.

    (a) Zeigen Sie, dass
    $$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y) \qquad (x, y \in X)$$
    eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für f an, sodass es nur eine einzige Äquivalenzklasse gibt.

(c) Geben Sie ein Beispiel für f an, sodass jede Äquivalenzklasse einelementig ist. Unter welchen Voraussetzungen an f (injektiv, surjektiv, bijektiv) stimmt das immer?

28) Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \frac{x}{1+2x}$, mit $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Zeigen Sie

$$f^{(n)}(x) := (\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n-mal}})(x) = \frac{x}{1+2nx}\,.$$

Komplexe Zahlen

29) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $|z|$, $\arg z$, $1/z$, $\sqrt{z}$:

(a) $z = 5 - 12i$

(b) $z = -i$

30) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\dfrac{4-i}{6+i}$

(b) $\left|\dfrac{6+i}{3+i}\right|$

(c) $(6+4i)^4$

(d) i^{110}

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3946} i^n$

31) Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Nullstellen der Polynome

(a) $p(x) = 2 + x + 2x^2 + x^3$

(b) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

(c) $p(z) = z^2 + (1+i)z + i$

(d) $p(z) = z^4 + (2+i)z^3 + (3+2i)z^2 + (4+i)z + 2$

32) Zeigen Sie, dass die drei komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ (die *dritten Einheitswurzeln*) eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen bilden. Vergleichen Sie ihre Multiplikationstabelle mit derjenigen der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_3$.

Lineare Algebra und Geometrie

Erste Beweise

1) (a) Zeigen Sie $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.

   (b) Berechnen Sie $\max(x, y) - \min(x, y)$.

   Hinweis: Das Maximum resp. Minimum zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\max(x, y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \min(x, y) := \begin{cases} y & \text{falls } x \geq y \\ x & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$$

2) Schreiben Sie die durch ihre Einträge a_{ij} gegebene Matrix A explizit an.

   (a) $a_{ij} = 2\delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 3)$

   (b) $a_{ij} = \alpha\delta_{i,j-1} + \beta\delta_{i-1,j} \quad (1 \leq i, j \leq 4)$

3) Beweisen Sie die folgende Aussage für ganze Zahlen a, b und c: Falls a das Produkt bc nicht teilt, dann teilt a auch c nicht.

4) Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung der Aufgabe 5 aus dem Analysisteil: Seien a, b und c ganze Zahlen und angenommen es gibt ein d, das a und b teilt, aber c nicht teilt. Dann hat die Gleichung

$$ax + by = c$$

   keine ganzzahligen Lösungen x und y.

Induktion

5) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, k! = (n+1)! - 1, \ n \in \mathbb{N}$

   (c) $\displaystyle(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, \ x \neq 1, n \in \mathbb{N}$

   Folgern Sie aus (a) die bemerkenswerte Formel $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

6) Beweisen Sie, dass sich eine Pizza durch n geradlinige Schnitte, die von Rand zu Rand verlaufen, in höchstens $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Stücke teilen lässt.

7) Jemand behauptet er habe den Induktionsschritt für

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$$

nachgerechnet und deshalb stimme diese Formel. Ist es möglich, dass er tatsächlich den Induktionsschritt nachrechnen konnte? Stimmt die Formel? Falls nein: Warum ist die Formel trotz nachgerechnetem Induktionsschritt falsch?

8) Vergleichen Sie die Formel aus Aufgabe 7 mit der „richtigen“ Formel aus der Vorlesung. Worin besteht der Unterschied?

9) Nehmen Sie eine der mit vollständiger Induktion bewiesenen Summenformeln aus der Vorlesung (aber bitte nicht die aus Aufgabe 8!) und basteln Sie daraus sieben weitere Trickbeispiele wie das aus Aufgabe 7.

10) (*Bernoullische Ungleichung.*) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $x \geq -1$ und $n \geq 1$ gilt.

Logik

11) Beweisen Sie, dass

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

gilt und formulieren Sie gemäß dieser Regel äquivalente Aussagen zu:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2 > n \Rightarrow n > 1$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $4 \mid n \Rightarrow 3 \mid n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$: n^3 ungerade $\Rightarrow n$ ungerade

Hinweis: Das Zeichen „|“ bedeutet „teilt“.

12) Wir betrachten die Aussagen p, q, r und s, über deren Wahrheitswert wir folgendes wissen: p und s sind falsch, q und r sind wahr. Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche ist falsch?

(a) $p \vee r$

(b) $(r \wedge s) \vee q$

(c) $\neg(p \vee q)$

(d) $\neg s \vee \neg r$

13) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, welche Kontradiktionen und welche keines von beiden?

(a) $p \vee (\neg p \wedge q)$

(b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

(c) $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

(d) $(p \vee (\neg p \vee q)) \vee \neg(q \wedge s)$

14) Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen:

(a) Alle Aufgaben sind zu schwer oder langweilig.

(b) Alle Aufgaben sind entweder zu schwer oder langweilig.

Hinweis: Wir folgen hier der Konvention der mathematischen Fachsprache, den bloßen Ausdruck „oder“ als das *einschließende Oder* (mindestens eine der (beiden) Alternative trifft zu) zu interpretieren. Demgegenüber ist die Wendung „entweder ... oder“ als *ausschließendes Oder* (genau eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu verstehen. Falls Ihnen dieser Hinweis Kopfzerbrechen bereitet, dann wiederholen Sie schleunigst den entsprechenden Abschnitt aus der Vorlesung.

(c) Es gibt Dreiecke, die genau zwei rechte Winkel haben.

(d) Wenn zwei Ebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.

15) Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

(a) $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 2$

(b) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x - y = 1$

(c) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x = y$

(d) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \exists y \in \mathbb{R}^+ : y < x$ $\quad (\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\})$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}_0^+ : \forall y \in \mathbb{R}_0^+ : x \leq y$ $\quad (\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\})$.

16) Verneinen Sie die Aussage $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \exists y \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in \mathbb{R} : \exists w \in \mathbb{R} : x^w + y^z = 1$.

Ordnungseigenschaften, Betrag

17) Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Ordnung $\leq$. Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach unten beziehungsweise nach oben beschränkt? Wenn ja, geben Sie Infimum beziehungsweise Supremum an. Handelt es sich dabei jeweils um Minima respektive Maxima?

(a) $[-9, 12]$
(b) $(-4, -3)$
(c) $(-2, 7]$
(d) $(-4, -2) \cup [5, \infty)$
(e) $(-\infty, 5] \cap (2, \infty)$
(f) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, n)$
(g) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1 + \frac{1}{n+1}, n + 1)$
(h) $\emptyset$
(i) $\mathbb{N}_{\mathrm{u}}$, die ungeraden natürlichen Zahlen
(j) $\bigcup_{k\geq 1}(-k, -\frac{1}{k})$

18) Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$ (b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

19) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

(a) $|x - 1|^2 + |y + 3|^2 \leq 1$
(b) $|x| + 2|y| \leq 1$
(c) $|x| \cdot |y| \leq 1$.

20) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $0 \leq x \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so folgt $x = 0$. Warum kann man dieses Resultat als die Aussage interpretieren, dass es keine „unendlich kleinen Zahlen“ gibt?

Gruppen, Ringe, Körper

21) Untersuchen Sie, ob folgende algebraische Strukturen assoziativ beziehungsweise kommutativ sind:

(a) Die Menge der reellen Zahlen zusammen mit der Verknüpfung $a \oplus b := \frac{a+b}{2}$.
(b) Die Menge der reellen Zahlen zusammen mit der Verknüpfung $a \odot b := \frac{ab}{2}$.

Die folgenden Serie von sechs Aufgaben bildet wiederum so etwas wie ein Mini-Projekt. Wenn Sie sich darauf einlassen, könnten Sie die Erfahrung machen, dass in manchen Situationen (und das ist durchaus typisch in der Mathematik!) der allgemeine Fall durchaus einfacher — und auf jeden Fall übersichtlicher und weniger fehleranfälliger — zu behandeln ist als einer der speziellen Fälle. Konkret handelt es sich um „exotische“ Rechenoperationen auf $\mathbb{R}$, die ebenfalls — so wie die gewöhnliche Addition und Multiplikation — die Menge $\mathbb{R}$ zum Körper machen.

22) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} x \oplus y &:= x + y - 3 \\ x \odot y &:= xy - 3x - 3y + 12 \end{aligned}$$

($x, y \in \mathbb{R}$) einen Körper bildet.

Lösen Sie nach Wahl eine der beiden folgenden Aufgaben. Suchen Sie sich dann eine KollegIn, die die andere der beiden Aufgaben gewählt hat und vergleichen Sie, welche von beiden die schwierigere ist.

23) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} x \oplus y &:= x + y - a \\ x \odot y &:= xy - ax - ay + a^2 + a \end{aligned}$$

($x, y \in \mathbb{R}$) einen Körper bildet; hierbei sei $a \in \mathbb{R}$.

24) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} x \oplus y &:= f^{-1}(f(x) + f(y)) \\ x \odot y &:= f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \end{aligned}$$

($x, y \in \mathbb{R}$) einen Körper bildet; hierbei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion.

25) Geben Sie auf der Grundlage von Aufgabe (24) vierzehn verschiedene Möglichkeiten an, die Menge $\mathbb{R}$ mit jeweils zwei von Ihnen definierten Operationen $\oplus$ und $\odot$ zu einem Körper zu machen.

26) Versuchen Sie, mit Hilfe von Aufgabe (24) das Bauprinzip der Aufgaben (22) und (23) zu entschlüsseln. In welchem Verhältnis stehen die Aufgaben der Reihe (22)—(23)—(24) zueinander?

27) Definieren Sie auf $\mathbb{R}$ zwei Operationen $\oplus$ und $\odot$, mit denen $\mathbb{R}$ zum Körper wird, indem Sie die (bijektive) Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - a \in \mathbb{R}$, die zur Konstruktion von Aufgabe (23) verwendet wurde, durch die (ebenfalls bijektive) Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto bx \in \mathbb{R}$ ($0 \neq b \in \mathbb{R}$) ersetzen.

28) Gegeben sei die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{6}] := \{a + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den Operationen

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{6}) \oplus (a' + b'\sqrt{6}) &:= (a + a') + (b + b')\sqrt{6} \\ (a + b\sqrt{6}) \otimes (a' + b'\sqrt{6}) &:= (aa' + 6bb') + (ab' + a'b)\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Bildet $(\mathbb{Q}[\sqrt{6}], \oplus, \otimes)$ einen Körper?

Hinweis: Auf den ersten Blick sieht das nach sehr viel Arbeit aus. Beachten Sie jedoch, dass die obigen Formeln für $\oplus$ und $\otimes$ nichts anderes darstellen als das ganz gewöhnliche „Ausrechnen" der betreffenden Ausdrücke mittels der Standardoperationen von $\mathbb{R}$.

29) Wieviele Beweisschritte, bei denen jeweils ein nur einziges der Körperaxiome (genauer: der Axiome einer kommutativen Gruppe, da nur die Addition vorkommt) angewandt wird, benötigt der Beweis von

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} a_{ij} \ ?$$

30) Es seien $(G, \odot_G), (H, \odot_H)$ und $(K, \odot_K)$ Gruppen sowie $f : G \to H$ und $g : H \to K$ Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie, dass $g \circ f : G \to K$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

31) Wir betrachten einen Ring $(R, +, \cdot)$ mit Eins, weiters sei a eine Einheit. Zeigen Sie, dass

$$f_a : R \to R,\ x \mapsto axa^{-1}$$

ein Ringendomorphismus ist.

32) Berechnen Sie modulo 3 und modulo 4:

(a) $\bar{3} + \bar{2}$	(d) $\bar{2} \cdot \bar{2}$	(g) $\bar{3}^3$
(b) $\bar{1} - \bar{2}$	(e) $\bar{2} \cdot \bar{3}$	(h) $\bar{5}^4$
(c) $\bar{2} - \bar{3}$	(f) $\bar{2} \cdot \bar{4}$	(i) $\bar{2}^{28}$