1. Übung Finanzmathematik, WS2024

Im folgenden bezeichne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ stets einen Wahrscheinlichkeitsraum wobei $|\Omega| < \infty$ und $\mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω ist. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine weitere σ-Algebra die von der Partition $B_1, \ldots, B_k$ erzeugt wird.

1. Sei X eine ZV mit $X = \sum_i \alpha_i I_{B_i}, \alpha_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass X dann $\mathcal{G}$-messbar ist.

2. Sei X eine ZV die $\mathcal{G}$-messbar ist. Zeigen Sie, dass X dann die Form aus dem vorherigen Beispiel hat.

3. Zeigen (begründen) Sie zwei der folgenden Eigenschaften der bedingten Erwartung (wobei X eine ZV bezeichnet):
   - $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
   - Die Abbildung $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ is linear.
   - Falls $X \geq 0$ dann gilt auch $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
   - Sei $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ eine weitere σ-Algebra. Dann gilt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.
   - Ist Y $\mathcal{G}$-messbar, dann gilt $Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]$.

4. Zeigen Sie zwei weitere der obigen Eigenschaften.

5. Seien X, Y ZV die je endlich viele Werte annehmen. Zeigen Sie dass

   $$\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$$

   genau dann gilt wenn es eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $h(Y) = X$.

6. (alternative Charakterisierung der bedingten Erwartung) Bezeichne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum wobei $|\Omega| < \infty$ und $\mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω ist. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine weitere σ-Algebra die von der Partition $B_1, \ldots, B_k$ erzeugt wird. Sei Z eine $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable sodass für alle $B \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}I_B Z = \mathbb{E}I_B X$. Zeigen Sie dass $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

7. Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und einen (möglichst interessanten) stochastischen Prozeß der ein Martingal ist.

2. Übung Finanzmathematik, WS2024

1. Gegeben sei ein Martingal X und ein previsibler Prozeß H. Zeigen Sie, dass $M_t := (H \cdot X)_t$ wieder ein Martingal definiert und dass insbesondere $\mathbb{E}(H \cdot X)_T = 0$.

2. Bezeichne X den random walk. Berechnen Sie die Doob-Zerlegung des durch $Z_t := X_t^2$ definierten Prozesses.

3. Umgekehrt sei X ein adaptierter Prozeß sodass $\mathbb{E}(H \cdot X)_T = 0$ für alle previsiblen Prozesse H. Zeigen Sie, dass X ein Martingal ist.

4. Sei $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1/4, \mathbb{P}(\{0\}) = 1/4, \mathbb{P}(\{1\}) = 1/2$, $X_0 = 1$, $X_1(\omega) = 1+\omega$ und $\mathcal{F}$ die von X erzeugte Filtration. Bestimmen Sie explizit die Menge der erreichbaren Auszahlungen $K = \{(H \cdot X)_1 : H \in \mathcal{H}\}$.

5. Sei $\Omega = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1/3, \mathbb{P}(\{1\}) = 2/3$, $S_0 = 1$, $S_1(\omega) = 1+\omega$ und $\mathcal{F}$ die von S erzeugte Filtration. Bestimmen Sie die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Versuchen Sie $L(\mathbb{P})$ und die Menge der Martingalmaße graphisch darzustellen.

6. Mittels des Vektorraumisomorphismus aus der Vorlesung überträgt sich die Topologie von $\mathbb{R}^N$ aus die Menge L^d der signierten Maße. Gegeben $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \in L^d$ zeigen Sie, dass
$$\lim_n \sigma_n = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{F}, \lim_n \sigma_n(A) = \sigma(A). \tag{1}$$

7. Zeigen Sie, dass die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $W \subseteq L^d$ konvex und abgeschlossen ist.

3. Übung Finanzmathematik, WS2024

1. Konstruieren Sie ein Modell in dem es mehr als ein äquivalentes Martingalmaß gibt. Hinweis: Vielleicht wollen Sie $T = 1$ und $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ betrachten.

2. Konstruieren Sie ein Modell mit $T = 2$ in dem es genau ein äquivalentes Martingalmaß gibt.

3. Konstruieren Sie ein Modell in dem es ein (absolut stetiges) Martingalmaß gibt, aber keines das auch äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist.

4. Es gelte (NA). Sei Z ein Derivat, $\mathbb{Q} \in M^e$. Dann ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} Z$$

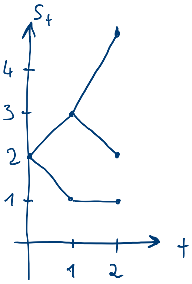
   ein arbitragefreier Preis von Z.

5. Betrachten Sie das durch $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $X_0 = 2, X_1(\omega) = X_0 + \omega$ gegebene Modell. Finden Sie ein Derivat, das nicht erreichbar ist.

6. Ein 2-d Prozess $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n)_n))$ mit $X = (X^1\ X^2)$ ist ein Martingal wenn für jedes $i \in \{1, 2\}$ der Prozeß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n^i)_n))$ ein Martingal ist. Zeigen Sie, dass das noch nicht folgt, wenn X^1, X^2 Martingale in der jeweils eigenen Filtration sind.

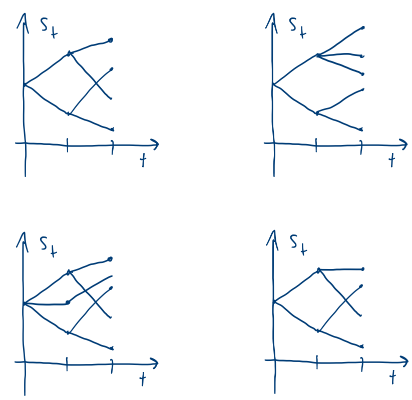
4. Übung Finanzmathematik, WS2024

1. Das Bild stellt ein Martingal $S = (S_k)_{k=0}^2$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum dar. Bestimmen sie eine konkrete Wahl von Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$ und S die zu dem Bild passt. (Hinweis: Der Prozeß nimmt nur ganzzahlige Werte an.)

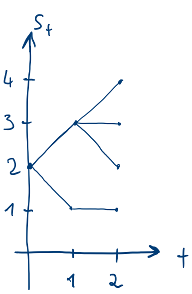


   Angenommen dass Bild stellt die möglichen Entwicklungen eines Preisprozesses dar. Bestimmen sie den ‘fairen Preis’ der europäischen Call option $(S_2 - 2)_+$

2. / 3. Überlegen sie für die ersten beiden / die letzten beiden dargestellten Modelle ob Sie NA erfüllen und ob Sie vollständig sind.



4. Bestimmen Sie im unten dargestellten Modell die Menge aller absolut stetigen Martingalmaße und für die europäische Call Option $(S_2 - 3)_+$ jeweils (optimale) untere und obere Schranken für die Menge der arbitragefreien Preise.



5. Fortsetzung: Finden Sie im Modell aus dem letzten Beispiel eine Strategie, die die europäische Call Option $(S_2 - 2)_+$ repliziert.

6. Ein 2-d Prozess $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n)_n))$ mit $X = (X^1 \ X^2)$ ist ein Martingal wenn für jedes $i \in \{1, 2\}$ der Prozeß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n^i)_n))$ ein Martingal ist. Zeigen Sie, dass das noch nicht folgt, wenn $\alpha X^1 + \beta X^2$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Martingal in der eigenen Filtration ist.

5. Übung Finanzmathematik, WS2024

1. Beweisen Sie: Ein Ereignis A ist von der σ-Algebra $\mathcal{G}$ genau dann unabhängig wenn
$$\mathbb{P}[A|\mathcal{G}] = \mathbb{P}[A].$$

2. Sei $\Omega = \{-1, 1\}^N, Y_n(y_1, \ldots, y_N) = y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Bezeichne weiters $X_n = c + Y_1 + \ldots + Y_n, c \in \mathbb{R}$ den Aktienpreisprozeß in unserem Modell.

   Zeigen Sie, dass das Modell vollständig ist und das eindeutige Martingalmaß $\mathbb{Q}$ folgende Bedingungen erfüllt:

   - $\mathbb{Q}(Y_n = 1) = 1/2, n \leq N$
   - $\mathcal{F}_n, Y_{n+1}$ unabhängig für $n < N$.

3. Betrachten Sie wieder das Modell aus dem vorherigen Beispiel. Sei ein Derivat $f(X_N)$ gegeben. Finden Sie eine Rekursion für den Wertprozeß $v_t(X_t) := V_t := \mathbb{E}[f(X_N)|\mathcal{F}_t]$ und die Strategie $H_t = h_t(X_{t-1})$ die
$$\mathbb{E}[f(X_N)] + (H \cdot X)_N = f(X_N)$$
   erfüllt.

4. Zeigen Sie, dass $\sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[-\exp(-(H \cdot X)_T]$ nicht angenommen wird, falls das Modell X Arbitrage zulässt.

5. k sei fest gewählt. Für welche Verteilung $p_1, \ldots, p_k$ wird $H((p_i))$ maximal?

6. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{Q} \mapsto H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$ strikt konvex ist.

7. Ein 2-d Prozess $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n)_n))$ mit $X = (X^1\ X^2)$ ist ein Martingal wenn für jedes $i \in \{1, 2\}$ der Prozeß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X^i_n)_n))$ ein Martingal ist. Zeigen Sie, dass das noch nicht folgt, wenn $\alpha X^1 + \beta X^2$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Martingal in der eigenen Filtration ist.

6. Übung Finanzmathematik, WS2024

1. Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen sie dass die Legendretransformierte f^* (bezüglich des euklidischen Skalarproduktes) konvex und unterhalb stetig ist.

2. Im Fall $N = 1$, berechnen Sie die Legendretransformationen der Abbildungen $x^2/2, e^x$ und $ax + b$.

3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt konvexe, stetig differenzierbare Abbildungen mit $f^* = g$. Diskutieren Sie, was daraus für die entsprechenden Abbildungen folgt.

4. Im CCR (mit $a < 0 < b$) sei $\mathbb{P}$ sodass alle Y_i unabhängig und verteilt mit $\mathbb{P}(Y_i = +1) = r \in (0, 1)$. Lösen Sie das exp-Nutzenmaximierungsproblem.

5. Gegeben Sei ein 1-Perioden Mark mit k von einander unabhängigen Aktien sodass $(X_1^{(i)} - X_0^{(i)}) \sim N(\mu_i, 1), \mu_i > 0$. Lösen Sie das exp-Nutzenmaximierungsproblem mit Hilfe des Gibbs-Jaynes-Prinzip.

6. Seien $Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig und $N(0, 1)$ verteilt. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Z_k$$
nicht fast sicher existiert.

   Hinweis: Das folgt zum Beispiel aus dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov.

7. Zeigen Sie, dass $\sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}[-\exp(-(H \cdot X)_T]$ angenommen wird falls X (NA) erfüllt.