Übungen zur Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie (2)

Sommer-Semester 2008, K. Auinger

21. Seien $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$; zeige, dass für das Spatprodukt

$$a_1 a_2 a_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

gilt.

22. Zeige, dass sich die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems nicht ändert, wenn
    (a) eine Gleichung mit einer Konstanten $\neq 0$ multipliziert wird;
    (b) eine Gleichung zu einer anderen addiert wird.

23. Bringe die folgenden Matrizen auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2i \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 12 & 13 & 14 & 5 & 6 \\ 11 & 16 & 15 & 6 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

24. Finde die allgemeine Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & + & 4x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 10 \end{array}$$

25. Dasselbe für:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & ix_2 & + & (1+i)x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & ix_3 & = & 0 \\ -ix_1 & + & x_2 & - & (2-i)x_3 & = & 1 \end{array}$$

26. Dasselbe für:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 12 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 10 \end{array}$$

27. Für einen beliebigen Körper K seien $\lambda, \mu \in K$ und A, B, C seien beliebige Matrizen über K. Zeige die folgenden Gesetze (wobei "=" stets so zu verstehen ist, dass eine Seite genau dann definiert ist, wenn die andere definiert ist, und die beiden Seiten in diesem Fall übereinstimmen):
    (a) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
    (b) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$
    (c) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

28. Bestimme A^2, A^3, A^4, AB, BA für:
    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
    (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

29. Finde 2×2-Matrizen A, B über $\mathbb{Q}$, sodaß $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ gilt. Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit.

30. Zeige: in jedem Vektorraum V über dem Körper K gilt: $(-c)u = c(-u) = -(cu)$ für alle $c \in K$ und $u \in V$.

31. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bilden einen Teilraum?
    (a) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0\}$
    (b) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\}$
    (c) $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$
    (d) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 0\}$
    (e) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 1\}$

32. Dasselbe für $\mathbb{R}^3$ ($x = (x_1, x_2, x_3)$):
    (a) $\{x \mid x_1 + x_2 = x_3\}$
    (b) $\{x \mid x_1 = 2\}$
    (c) $\{x \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$

33. Dasselbe für $\mathcal{P}_2$ (Menge aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grad höchstens 2):
    (a) Menge aller Polynomfunktionen vom Grad genau 2
    (b) Menge aller $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = 0$
    (c) Menge aller $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = 1$

34. Seien U und W Teilräume eines Vektorraums V; zeige: $U \cup W$ ist genau dann ein Teilraum, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

35. Wird $\mathcal{P}_2$ von den folgenden Polynomfunktionen aufgespannt?
    (a) $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$
    (b) $x^2-2,\ x+3,\ x^2+2x+5$.

36. Sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig oder abhängig? Bilden sie eine Basis?
    (a) $x = (1,0,1)$, $y = (0,1,0)$
    (b) $x = (1,1,0)$, $y = (1,1,1)$, $z = (0,0,1)$
    (c) $x = (1,-1,0)$, $y = (1,1,-1)$, $z = (0,0,1)$.

37. Dasselbe für $\mathcal{P}_2$:
    (a) x^2+3x+1, $2x+3$, 2
    (b) $3x^2+4x-3$, $6x+4$, 6.

38. Welche der folgenden Mengen bildet eine Basis für $\mathcal{P}_3$?
    (a) $\{1, x, x^2, x^3\}$
    (b) $\{x^3+1, x^2+2x+1, x^3-x^2, x^3+x+2\}$.

39. Ergänze die Vektoren $(1,2,1)$ und $(2,3,1)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

40. Seien v_1, v_2, v_3 Elemente eines Vektorraumes; zeige: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$ linear unabhängig ist.

41. Bestimme die Dimension des Teilraums von $\mathbb{R}^4$, der von $x = (1,2,-1,3)$, $y = (2,1,3,-2)$ und $z = (-1,4,-9,13)$ aufgespannt wird.

42. Für die Teilräume $U = [(1,0,1,2),(1,1,2,4),(2,1,3,6)]$ und $W = [(-1,2,1,2),(1,-1,1,1)]$ von $\mathbb{R}^4$ berechne $\dim(U \cap W)$ und $\dim(U+W)$.

43. Bestimme alle Teilräume von $\mathbb{R}^3$.

44. Zeige: die Elemente $1, \sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

45. Sei $\mathbf{P} = \{2,3,5,\dots\}$ die Menge aller Primzahlen. Zeige: die Menge $\{\log p \mid p \in \mathbf{P}\} \subseteq \mathbb{R}$ ist linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.