Übungen zur Einführung in die Analysis

(Einführung in das mathematische Arbeiten)

Sommersemester 2010

Schulstoff

1. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 1.* Wiederholen Sie die Definiton des Logarithmus sowie die Rechenregeln für Logrithmen und Potenzen und berechnen Sie (ohne einen Taschenrechner zu verwenden):
   (a) $\log_2 32$.
   (b) $\log_{17} 4913$.
   (c) $2^x = 1048576$.
   (d) $3^x = 11$ (verwenden Sie Logarithmen zur Basis 3).
   (e) $3^x = 11$ (verwenden Sie Logarithmen zur Basis e).
   (f) $8^{\log_2 3}$.
   (g) $16^{\frac{1}{4}\log_2 5}$.
   (h) $e^{3\log 5}$.
   (i) $e^{2\log x}$.
   (j) $e^{4\log 6x}$.

   Hinweis: Wir folgen hier der Konvention, log (ohne Basis) für den Logarithmus zur Basis e (e, die Eulersche Zahl) zu schreiben.

2. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 2.*
   (a) Lösen Sie die Gleichung: $7^{x+2} - 7^{x-1} = 349$.
   (b) Lösen Sie das Gleichungssystem: $4^x 8^y = 512$, $5^{x-y} = 25$.

3. *Sinus und Cosinus.* Wiederholen Sie die Definition der Winkelfunktionen, und ihre Funktionsgraphen.
   (a) Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (b) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, \pi]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (c) Bestimmen Sie alle $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (d) Bestimmen Sie alle $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (e) Bestimmen Sie alle $x \in [0, \pi]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (f) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (g) Bestimmen Sie alle $x \in [-2\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (h) Bestimmen Sie alle $x \in [6\pi, \frac{13\pi}{2}]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.

4. *Trigonometrie* Die Grundkante der (quadratischen) Cheopspyramide ist 230 m lang, die Seitenflächen sind unter $\alpha = 51{,}9^\circ$ zur Grundfläche geneigt. Berechnen Sie a) die Höhe, b) die Länge einer Seitenkante, c) den Rauminhalt der Pyramide!

5. *Differenzieren 1.* Differenzieren Sie nach der angegebenen Variable:

   (a) $f(x) = \dfrac{(1-\sqrt[3]{2x})^2}{x\sqrt{x}}$

   (b) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}$

   (c) $f(y) = \sqrt{\dfrac{\sin y - 1}{\cos x + 1}}$

   (d) $x(z) = \sin(\tan z)$

   (e) $g(x) = \dfrac{c^x}{x^c}$

   (f) $g(c) = \dfrac{c^x}{x^c}$

   (g) $h(x) = x^x$

   (h) $y(v) = x^{x^x}$

6. *Kurvendiskussion.* Unter Diskussion des Graphen einer Funktion (Kurvendiskussion) verstehen wir die Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereiches, der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte, Monotonie, Wendepunkte, Tangenten an die Wendepunkte und des Krümmungsverhaltens (im Fall der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte und Wendepunkte, so vorhanden).

   Diskutieren Sie die folgenden Funktionen und zeichnen Sie den Graphen.

   (a) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

   (b) $g(x) = |x|$

   (c) $h(x) = x \sin x$

   (d) $i(x) = \frac{\sin x}{x}$, Vorsicht bei 0! Untersuchen Sie die Funktion dort empirisch, falls Sie keine weiter führenden Techniken aus der Schule kennen.

   (e) $j(x) = \sqrt{9 - x^2}$

7. *Unbestimmte Integrale.* Berechnen Sie die folgenden Integrale

   (a) $\displaystyle\int (3x+4)^3\,dx$

   (b) $\displaystyle\int e^{2+5y}\,dt$

(c) $\int \sin(5x - 9)\, dx$

8. *Bestimmte Integrale.* Berechnen Sie:

(a) $\int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

(b) $\int_0^1 3^x\, dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x)\, dx$

(d) $\int_{t_1}^{t_2} \left(ax^2 + bx + c\right)\, dt$

Summen- und Produktzeichen, Induktion

9. *Summen- und Produktschreibweise* Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

(a) $\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=3}^{7} a_{j-2}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} p_{2k-1} = \sum_{j=-n+1}^{0} p_{-1-2j}$

(c) $\sum_{t \in \{9,16,25,36,49\}} m_j^t = \sum_{p=2}^{6} m_i^{(p+1)^2}$

(d) $\sum_{k=0}^{n} r^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2n} \Big((-1)^j + 1\Big) r^j$

(e) $\sum_{j=1}^{n} c_{3j-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_{3j+2}$

(f) $\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

(g) $s^{\sum_{i=0}^{n} p_i} = \prod_{j=0}^{m} s^{p_j}$

(h) $\sum_{t=n}^{N} (q_t - q_{t-1}) = q_n - q_N$

(i) $\log \prod_{i=0}^{n} 3^{a_i} = (\log 3) \sum_{j=1}^{n} a_j$

(j) $\prod_{j=0}^{n} j(n-j)p^{\frac{1}{2}j(n-j)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{m-1} k(m-k)p^{k(m-k)}}$

(k) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

10. *Bernoullische Ungleichung.* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Ordnungseigenschaften, Betrag

11. *Ordnung und Schranken.* Betrachten wir $\mathbb{R}$ mit der (natürlichen) Ordnung $\leq$. Geben Sie für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ obere und untere Schranken an, falls diese existieren. Handelt es sich dabei um Maxima resp. Minima? Sind die entsprechenden Mengen beschränkt?

   (a) $]-1,3]$

   (b) $[a,\infty)$

   (c) $\mathbb{P}$, die Primzahlen

   (d) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} [-n,n]$

   (e) $]-3,2[\cup[4,5[$

   (f) $\emptyset$

   (g) $\mathbb{R}^-$, die Menge der negativen reellen Zahlen.

   (h) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{\frac{1}{n}\right\}$

12. Sei $(K,+,\cdot,\leq)$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie folgende Aussagen für a, b, c, $d \in K$, ausschließlich unter Verwendung der Definition einer Ordnung, der Ordnungs- und Körperaxiome und der Rechenregeln aus der Vorlesung. Begründen Sie jeden ihrer Schritte!

   (a) Gleichsinnige Ungleichungen „dürfen“ addiert werden, genauer: aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$, oder in leicht verständlicher Symbolik

$$\begin{array}{c} a < b \\ c < d \\ \hline a + c < b + d. \end{array}$$

(b) Gleichsinnige Ungleichungen „dürfen“ immer dann miteinander multipliziert werden, wenn alle Glieder positiv sind, genauer: aus $0 < a < b$ und $0 < c < d$ folgt $ac < bd$, oder in leicht verständlicher Symbolik

$$\begin{array}{c} 0 < a < b \\ 0 < c < d \\ \hline ac < bd. \end{array}$$

Bemerkung: Aus (a) folgt (setze $c = 0$), dass eine Kleinerbeziehung wahr bleibt, falls auf der rechten Seite eine positive Zahl addiert wird; man sagt: die Abschätzung $a < b$ wird vergröbert, wenn eine positive Zahl zu b addiert wird.

13. In einem geordneten Körper folgt aus $b, d > 0$, dass
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc.$$

14. Ist $0 \leq a \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so ist $a = 0$.

15. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:
    (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$,
    (b) $|a - b| \leq |a| + |b|$,
    (c) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

16. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:
    (a) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$,
    (b) $a^2 = \left|a^2\right| = |a|^2$,
    (c) $|a - b| < r \iff a - r < b < a + r$ für $r > 0$.

17. *Cauchyungleichung.* Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung
$$|ab| \leq \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2).$$
Hinweis: Verwenden Sie die bekannten Formeln für $(a \pm b)^2$ und die Tatsache, dass Quadrate nichtnegativ sind.

18. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
$$|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$$

19. *Minimum, Maximum und Betrag.* Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
    (a) $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$,
    (b) $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$,
    (c) $\max(a, b) - \min(a, b) = |a - b|$.

Mengen, Relationen

20. *Mengenoperationen 1.* Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, f, h\}$, $C = \{a, c, e, g\}$ und $D = \{a, b, g, h\}$. Berechnen Sie

    (a) $(A \setminus B) \cup C$

    (b) $(A \cap B) \setminus (A \cap D)$

    (c) $(A \cup C) \setminus B$

    (d) $A \cup (B \setminus C)$

    (e) $(A \times B) \setminus (B \times D)$

    (f) $(A \times C) \cup (B \cap D)$

21. *Mengenoperationen 2.* Beweisen Sie

    (a) die Verschmelzungsgesetze und

    (b) die De Morgan-Gesetze.

    Verwenden Sie für jeweils eines der Gesetze die Mengentafel, für das andere die Definition der Mengenoperationen.

22. *Mengenoperationen 3.* Seien A und B Mengen. Zeigen Sie:

    (a) $B \subseteq A \;\Rightarrow A \cup B = A$ und $A \cap B = B$

    (b) $B \cup A = A \Leftrightarrow B \subset A$

    (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

23. *Äquivalenzrelationen 1.* Welche der folgenden Relationen ist eine Äquivalenzrelation?

    (a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen betrachten wir die Relation

    $$x \equiv y \;:\Leftrightarrow x - y \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

    (b) Bei einem Skirennen betrachtet man 2 Laufzeiten als gleich, wenn sie sich abgerundet auf Hundertstelsekunden nicht unterscheiden.

    (c) Auf der Menge aller Menschen betrachten wir x und y als in Relation stehend, wenn x und y einander kennen.

    (d) Auf der Menge aller Studenten betrachten wir x und y als in Relation stehend, wenn x eine höhere Matrikelnummer als y hat.

    (e) Bei einer Versuchsreihe werden zwei Messergebnisse als gleich betrachtet, wenn sie sich um weniger als $10^{-22}m$ unterscheiden. Definiert dieser Gleichheitsbegriff eine Äquivalenzrelation?

24. *Ordnungsrelationen.*

    (a) Welche der Relationen aus Beispiel 23 sind Ordnungsrelationen?

    (b) Gibt es Relationen auf Mengen, die sowohl Äquivalenz- als auch Ordnungsrelationen sind?

25. *Äquivalenzrelationen 2.* Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen betrachten wir die Relation
$$x \equiv y \ :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade.}$$

    (a) Beweisen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist.

    (b) Ist dies auch noch der Fall, wenn man in der Definition *gerade* durch *ungerade* ersetzt?

    (c) Finden Sie andere Beispiele für Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$.

26. *Rechnen mit Restklassen*

    (a) Stellen Sie fest, ob die angegebenen Zahlen in derselben Restklasse modulo m liegen:

(i)	$4, 16$	mod 2	(iv)	$-4, 19$	mod 15
(ii)	$8, 7885$	mod 6	(v)	$-7, -13$	mod 3
(iii)	$3, 15$	mod 3	(vi)	$-1, 1$	mod 3

    (b) Berechnen Sie jeweils (b1) die kleinste natürliche und (b2) die größte negative ganze Zahl x, für die gilt:

(i)	$x = 244 \mod 2$	(iv)	$x = -(25 \cdot 42) \mod 13$
(ii)	$x = 3 + 19 \mod 6$	(v)	$x = (12^{324}) \mod 5$
(iii)	$x = 3^2 \mod 4$	(vi)	$x = (-1)^{11233^{33448}} \mod 89$

Logik

27. *Verneinung.* Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen. Üben Sie dabei besonders die Umformulierung von $\forall$- und $\exists$-Aussagen. Legen Sie Wert darauf, dass das „nicht“ im verneinten Satz möglichst die „innerste“ Aussage verneint, d.h. dass es möglichst weit hinten auftaucht.

    (a) Alle Schwammerl sind giftig oder schwer zu finden.

    (b) Alle Schwammerl sind entweder giftig oder schwer zu finden.

(c) Alle giftigen Schwammerl sind leicht zu finden.
(d) Alle Schwammerl sind giftig, daher sind sie leicht zu finden.
(e) Wenn zwei Geraden keinen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie parallel.
(f) Es gibt ein Dreieck, das zwei rechte Winkel haben.
(g) Es gibt ein Dreieck, das zwei stumpfe Winkel hat.
(h) In allen Körben von Schwammerlsuchern gibt es einen giftigen Pilz.
(i) Es gibt ein Haus in Wien, in dem alle Fenster mit Alarmanlagen gesichert sind.
(j) Es gibt ein Haus in Budapest, in dem ein Fenster eine zerbrochene Fensterscheibe besitzt.

28. *Quantoren.* Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

(a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y$
(b) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y$
(c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$
(d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$
(e) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$
(f) $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$

29. *Indirekter Beweis 1.* Beweisen Sie: n^2 ungerade $\Rightarrow$ n ungerade.

30. *Indirekter Beweis 2.* Es gibt keine ganzen Zahlen n, m mit $28m + 42n = 100$.

31. *Äquivalente Aussagen.* Formulieren Sie gemäß der Regel

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

äquivalente Aussagen zu:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$: n^4 ungerade $\Rightarrow$ n ungerade
(b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n$
(c) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2 > n \Rightarrow n > 1$

Hinweis: Das Zeichen „|“ bedeutet „teilt“.