Übung: Schulmathematik 3 (Angewandte Mathematik)

Stefan Götz, Waltraud Huyer und Andreas Ulovec

SS 2015

Blatt 3

18. *Differenzengleichung 1.* Jemand nimmt täglich ein bestimmtes Medikament ein. Dabei werden seinem Körper jeweils $4\,mg$ einer bestimmten chemischen Substanz zugeführt. Während 24 Stunden werden aber 40% dieser Substanz ausgeschieden. Zu Beginn der Medikamentenkur hat der Patient $0\,mg$ dieser Substanz im Blut.

    (a) Zeigen Sie, dass der Gehalt dieser Substanz im Blut während der Kur schrittweise steigt!

    (b) Wird der Patient (unter den genannten Bedingungen) jemals $9\,mg$ oder mehr dieses Stoffes im Blut haben? Wenn ja, wann?

    (c) Gibt es einen Grenzwert, der — wenn der Patient das Medikament in dieser Form laufend einnimmt — stabil bleibt?

    (d) Stellen Sie den Verlauf des Prozesses graphisch in einem

    i. (n, x_n)-Koordinatensystem

    ii. (x_n, x_{n+1})-Koordinatensystem

    dar!

19. *Differenzengleichung 2.*

    (a) Gegeben sei die Differenzengleichung $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ mit $a \geq 0$. Zeigen Sie, dass für $a \neq 1$ die Lösung $\langle x_n \rangle$ wie folgt berechnet werden kann:

    $$x_n = a^n \cdot \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

    (b) Wie sieht das Langzeitverhalten in Abhängigkeit von x_0, a und b jeweils aus? Skizzen!

    (c) Wie sieht der Verlauf der Lösung $\langle x_n \rangle$ aus, wenn $a = 1$ ist?

20. *Chaotisches Verhalten.* Berechnen Sie für die Rekursion $x_{n+1} = \ln |x_n|$ und die Anfangswerte $x_0 = 1,5$ bzw. $x_0 = 1,6$ die Folgewerte $x_1, x_2, \dots, x_{23}$ und vergleichen Sie diese für die verschiedenen Startwerte! Bilden Sie dazu die Differenzen $x_{i;1,5} - x_{i;1,6}$ $(i = 1, \dots, 23)$ und suchen Sie das Maximum! Vergleichen Sie dieses mit der Differenz der Anfangswerte! Welche der beiden „Bahnen“ (i. e. die Folge $\langle x_n \rangle$) zeigt leicht chaotisches Verhalten?

21. *Lineares Wachstum.* Das Wachstum einer Sonnenblume verläuft in den ersten 50 Tagen linear:

Zeit (in Tagen)	Höhe (in cm)
14	36
21	68
28	98
35	131
42	170
49	206

Zeichnen Sie die Werte in ein geeignetes Koordiantensystem! Nähern Sie die Werte durch ein passendes lineares Wachstumsmodell an! Stellen Sie dazu eine Differenzengleichung auf und lösen Sie sie! Wie groß ist der durchschnittliche tägliche Zuwachs?

22. *Exponentielles Wachstum.* Die Bevölkerung der USA (Abbildung 8) ist in den Jahren von 1790 bis 1890 annähernd exponentiell angewachsen[4]:

Abbildung 8: Die USA

Jahr	Bevölkerungsgröße (in Millionen)	Jahr	Bevölkerungsgröße (in Millionen)
1790	3,9	1850	23,2
1800	5,3	1860	31,4
1810	7,2	1870	38,6
1820	9,6	1880	50,2
1830	12,9	1890	62,9
1840	17,1		

[4] Ableitinger, Ch.: Biomathematische Modelle im Unterricht. Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2010, S. 36.

Wie müssen die Parameter im Modell des exponentiellen Wachstums gewählt werden, um die gegebenen Daten gut anzunähern? Verwenden Sie für die Suche ein Tabellenkalkulationsprogramm! Erlaubt dieses Modell Prognosen über das Jahr 1890 hinaus? Wie groß wäre die Bevölkerung der USA heute, wenn das Wachstum weiterhin so rasch verlaufen wäre? In welchem Jahr hat sich die Bevölkerung der USA ausgehend von 1790 verdoppelt? Was fällt dabei auf?

23. *Miniprojekt: Steuersatz abhängig vom Einkommen.* Modellieren Sie eine funktionale Beziehung zwischen zu versteuerendem jährlichen Einkommen und Steuersatz mit Hilfe einer

    (a) Winkelfunktion

    (b) Logarithmusfunktion (der Steuersatz soll sich der 50%-Grenze „langsam" und degressiv nähern)

    unter Beachtung der Bedingungen aus der Vorlesung!

24. *Begrenztes Wachstum.*

    (a) Stellen Sie den Verlauf des begrenzten Wachstums für $N_0 = 20$, $r = 0,2$ und $K = 100$ graphisch dar! Wann werden 80% der Kapazitätsgrenze erreicht? Wie sieht der Verlauf aus, wenn $N_0 = 120$ ist?

    (b) Die Rekursion $N_{t+1} = 0,9 \cdot N_t + 0,3$ stellt ein begrenztes Wachstum dar. Spezifizieren Sie die charakteristischen Parameter! Gibt es einen Fixpunkt?

    (c) Die Säuglingssterblichkeit ist in Österreich aufgrund des medizinischen Fortschrittes seit 1970 stark zurückgegangen[5]:

Jahr	Verstorbene im 1. Lebensjahr (auf 1000 Lebendgeborene)
1970	25,9
1975	20,5
1980	14,3
1985	11,2
1990	7,8
1995	5,4
2000	4,8
2005	4,2
2010	3,9
2013	3,1

[5] `www.statistik.at`, 14.4.2015

Stellen Sie die Daten graphisch dar! Finden Sie auf experimentellem Weg geeignete Parameter, um diesen Prozess durch ein begrenztes Wachstum darzustellen!

25. *Logistisches Wachstum.* Beschreiben Sie das Wachstum der österreichischen Bevölkerung im Zeitraum von 1600 (Abbildung 9) bis 2013 durch ein diskretes logistisches Modell mit $N_0 = 1,8$ (Millionen) und $r = 0,035$! Welcher Wert für K erscheint Ihnen sinnvoll? Vergleichen Sie die so gewonnenen Werte mit den realen Daten aus der nachfolgenden Tabelle[6]!

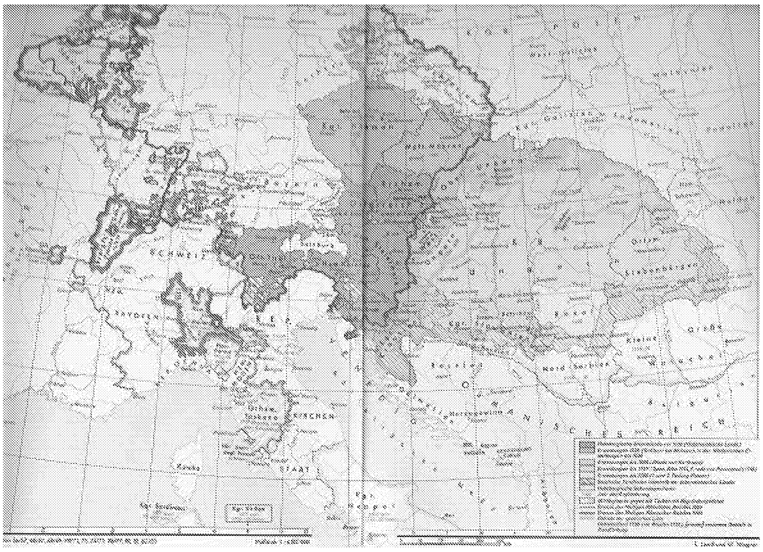

Abbildung 9: Das HABSBURGische Reich um 1600

Jahr	Bevölkerungsgröße (in Millionen)	Jahr	Bevölkerungsgröße (in Millionen)
1600	1,80	1857	4,08
1700	2,10	1880	4,94
1754	2,73	1910	6,61
1780	2,97	1939	6,65
1790	3,05	1971	7,50
1800	3,06	1991	7,75
1830	3,48	2001	8,04
1840	3,65	2013	8,48

In welchen Bereichen passt das Modell gut/schlecht zu den realen Daten?

Entwickeln Sie weiters unter Beachtung der Erkenntnisse aus dem diskreten Modell ein kontinuierliches!

[6] `www.statistik.at` und `http://de.wikipedia.org/wiki/Demografie_%C3%96sterreichs`, 14.4.2015