Übungen zu „Lineare Algebra und Geometrie 1“
Lösungen zum 2. Test vom 10.6.2011

Beispiel 1

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -4 & -4\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & -1 & -\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(-\lambda)+2] = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix}0 & -4 & -4 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ Basis des Eigenraums zu $\lambda_1 = 1$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix}-1 & -4 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ Basis des Eigenraums zu $\lambda_2 = 2$

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar, $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Man kann noch die Probe $T^{-1}AT = D$ machen, aber das war nicht verlangt (würde nur zur Probe dienen, ob die Eigenwerte, Eigenvektoren und auch T^{-1} richtig ausgerechnet wurden).

Beispiel 2

Spiegelungsmatrix in Standardkoordinaten:

$$S = I - \frac{2}{n'n}nn' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1\ -1\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Jede Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ hat den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind die Vektoren der Ebene; z.B. bilden $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums. Die Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind die Normalvektoren der Ebene, d.h. die Vielfachen von $v_3 = n = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Das lässt sich natürlich auch durch Rechnung überprüfen, sofern man die Matrix richtig aufgestellt hat!