Übungen zu „Lineare Algebra und Geometrie 1“
Lösungen zum 1. Test, 2. Ersatztermin vom 11.5.2011

Beispiel 1

$T(1,0)=(1,0)$, $T(t,0)=(2t+1,0)=(1,0)+2(t,0)$, $T(0,1)=(0,0)$, $T(0,t)=(0,1)$

$\Rightarrow [T]_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Die Abbildung ist nicht invertierbar, weil die Matrix eine Nullspalte/Nullzeile enthält und daher nicht invertierbar ist.

Anderer Lösungsweg:

$a(1,0)+b(t,0)+c(0,1)+d(0,t)=(a+bt,c+dt)$ ... entspricht dem Koordinatenvektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B}$

$T(a+bt,c+dt)=(a+b(2t+1),d)=(a+b+2bt,d)=(a+b)(1,0)+2b(t,0)+d(0,1)$ ...

entspricht dem Koordinatenvektor $\begin{pmatrix}a+b\\2b\\d\\0\end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B}$

Die Matrix, die aus dem ersten 4-Vektor den zweiten macht, ist wieder die obige Matrix.

Beispiel 2

Basis der Ebene: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$: ist bereits orthogonal

Matrix der Projektion:

$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$

Beispiel 3

Sowohl die Spalten als auch die Zeilen einer orthogonalen Matrix bilden Orthonormalsysteme, und man sucht sich die Bedingungen heraus, wo man am schnellsten etwas herausbekommt (d.h. man fängt am besten mit Bedingungen an, die nur eine Variable enthalten).

1. Spalte normiert: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+c^2=1\Rightarrow c=0$

1. und 2. Spalte orthogonal: $\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}b=0\Rightarrow b=\frac{2}{3}$

1. und 3. Spalte orthogonal: $\frac{1}{\sqrt{2}}a-\frac{1}{6}=0\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{1}{3\sqrt{2}}$

1. und 3. Zeile orthogonal: $\frac{2}{9}+\frac{1}{3\sqrt{2}}d=0\Rightarrow d=-\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{4}{3\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Die Matrix lautet

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$