Übungen zu „Lineare Algebra und Geometrie 1“
Lösungen zum 1. Test, 1. Ersatztermin vom 29.4.2011

Beispiel 1

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [T]_{\mathscr{B} \hookleftarrow \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Beispiel 2

Basis der Ebene: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Orthogonalisieren:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrix der Projektion:

$P = \frac{1}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 v_1' + \frac{1}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 v_2' = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

Lineare Abbildung:

$Px = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{6}x_3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Beispiel 3

Sowohl die Spalten als auch die Zeilen einer orthogonalen Matrix bilden Orthonormalsysteme, und man sucht sich die Bedingungen heraus, wo man am schnellsten etwas herausbekommt (d.h. man fängt am besten mit Bedingungen an, die nur eine Variable enthalten).

1. Spalte normiert: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c^2 = 1 \Rightarrow c = 0$

1. und 2. Spalte orthogonal: $\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}}b = 0 \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

1. und 3. Spalte orthogonal: $\frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{12}} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{6}}$

1. und 3. Zeile orthogonal: $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}d = 0 \Rightarrow d = -\frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow$ Die Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$