Übungen zu „Lineare Algebra und Geometrie 1“
Lösungen zum 1. Test vom 8.4.2011

Beispiel 1

Wir bezeichnen die gegebenen Vektoren mit v_1, v_2, v_3, das mit dem Gram-Schmidt-Verfahren erzeugte ONS mit w_1, w_2, w_3.

$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow w_2 = \frac{1}{\|\tilde{w}_2\|} \tilde{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow w_3 = \frac{1}{\|\tilde{w}_3\|} \tilde{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Beispiel 2

Ebene $x_1 - x_3 = 0$: enthält alle Vektoren mit $x_1 = x_3$, x_2 beliebig, d.h. die Vektoren von der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, x_1, x_2 beliebig. Man kann also leicht eine ONB finden: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix zur gesuchten orthogonalen Projektion ist dann

$A = v_1 v_1' + v_2 v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 0\ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Die gesuchte Projektion ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gegeben durch $Px = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ x_2 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \end{pmatrix}$. Diese Abbildung lässt sich auch berechnen als $Px = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2$.

Beispiel 3

Es wird dieselbe Ebene wie in Bsp. 2 betrachtet. Ihr Normalvektor ist $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, zwei Richtungsvektoren der Ebene sind $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (hier brauchen die Vektoren ja nicht normiert zu sein).

Die Matrix, die eine Drehung um 30^o um die x_3-Achse beschreibt, ist

$$D = \begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o & 0 \\ \sin 30^o & \cos 30^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$Dn = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Gleichung der gedrehten Ebene lautet daher: $\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0$ (1)

$Dw_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$Dw_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Daraus erhält man die Parameterdarstellung $\lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (2)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu zeigen, dass die Gleichung (1) und die Parameterdarstellung (2) dieselbe Ebene beschreiben. Man kann leicht nachrechnen, dass Dw_1 und Dw_2 die Ebenengleichung (1) erfüllen. Weil Dw_1 und Dw_2 l.u. sind, (2) also eine Ebene beschreibt, beschreiben (2) und (1) dieselbe Ebene. Andere Möglichkeit: Man berechnet das Kreuzprodukt $Dw_1 \times Dw_2$ und erhält gerade Dn, also ist (1) die zur Parameterdarstellung (2) gehörende Ebenengleichung.