PS Analysis 3 SS 2024

Blatt 9

$\boxed{49}$ Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n und $V^* = L(V, \mathbb{R})$ der Dualraum. Wir wiederholen hier einige Argumentationen aus der Linearen Algebra:

(a) V^* ist ebenfalls endlichdimensional und von gleicher Dimension wie V. Zu einer gegebenen Basis $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ für V gibt es die zu $\mathcal{B}$ duale Basis $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$, welche durch die Eigenschaften $\nu_i(b_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ charakterisiert ist.

(b) Sei nun $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ eine beliebig gegebene Basis für den Dualraum V^*. Warum gibt es dann eine Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ für V mit der Eigenschaft $\mu_i(a_j) = \delta_{ij}$?

$\boxed{50}$ (a) In den Bezeichnungen von Beispiel 2.6 der VO zeigen Sie, dass für $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ der eindeutige Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $\lambda_{w_1} \wedge \lambda_{w_2} = \alpha_w$ in $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ gerade durch das Kreuzprodukt $w_1 \times w_2$ gegeben ist.

(b) Betrachten Sie das sogenannte Spatprodukt $S\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $S(u, v, w) := \langle u \times v, w \rangle$. Ist $S \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$? Geben Sie eine Basis von $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$ an.

$\boxed{51}$ Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\lambda, \mu \in V^*$. Verifizieren Sie die Eigenschaft $\mu \wedge \lambda = -\lambda \wedge \mu$ durch direkte Rechnung aus der Definition 2.7 der VO und leiten daraus direkt $\lambda \wedge \lambda = 0$ ab. Schließen Sie weiters mittels Assoziativität des Hackproduktes, dass $\alpha \wedge \alpha = 0$ im Falle $\alpha = \lambda \wedge \mu \in \Lambda^2 V^*$ gilt.

$\boxed{52}$ Sei V ein (endlichdimensionaler) Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in V^*$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \neq 0$ in $\Lambda^2 V^*$ ist. Weiters seien $\mu_1, \mu_2 \in V^*$ linear abhängig. Zeigen Sie, dass dann $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$ in $\Lambda^2 V^*$ ist.

In den folgenden beiden Aufgaben sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\alpha \in \Lambda^2 V^*$. Für $w \in V$ definieren wir $\mu_w \in V^*$ durch $\mu_w(u) := \alpha(u, w)$ für alle $u \in V$.

$\boxed{53}$ Zeigen Sie: Wenn α nichtausgeartet ist, d. h. zu jedem $u \in V$, $u \neq 0$, gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $\alpha(u, v) \neq 0$, dann erhalten wir durch die Zuordnung $w \mapsto \mu_w$ einen Isomorphismus $V \to V^*$. (Bemerkung: In dieser Situation definiert α eine nichtausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$ und wird *symplektische Form* genannt.)

$\boxed{54}$ Wir nehmen an, dass $\alpha \neq 0$ ist, dann gibt es also Vektoren $w, z \in V$ mit $\alpha(w, z) \neq 0$.

(a) Berechnen Sie die Werte $\beta(u, v)$ $(u, v \in V)$ für $\beta := \frac{1}{\alpha(w,z)} \mu_w \wedge \mu_z \in \Lambda^2 V^*$.

(b) Finden Sie eine Bedingung an die Werte von α, die äquivalent zu $\beta = \alpha$ ist. In diesem Fall lässt sich also $\alpha \in \Lambda^2 V^*$ in der Form $\alpha = \lambda \wedge \nu$ mit geeigneten $\lambda, \nu \in V^*$ schreiben und α heißt *zerfallend* oder *zerlegbar*.

(Bemerkung: Allgemein gilt, dass für alternierende 2-Formen die Bedingung $\alpha \wedge \alpha = 0$ äquivalent zur Zerlegbarkeit ist.)