Blatt 8

43 Es sei $r\colon I \to]0,\infty[$ eine C^1-Funktion auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und

$$M := \{(r(t)\cos(s), r(t)\sin(s), t) \mid t \in I, 0 \le s \le 2\pi\}$$

die vom entsprechenden Kurvenbild $C := \{(r(t),t) \mid t \in I\}$ in der (x,z)-Ebene erzeugte Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie eine Basis der Tangentialebene T_aM für $a = (r(t)\cos(s), r(t)\sin(s), t) \in M$ an.

44 Beschreiben Sie den Zylinder aus Aufgabe $\boxed{39}$ nun als reguläre C^∞- Nullstellenmenge und daraus auch die Tangentialebene an einem beliebigen Punkt mit einer Basis dafür.

45 Weisen Sie nach, dass $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ als reguläre Nullstellenmenge eine zweidimensionale C^∞-Teilmannigfaltigkeit ist und beschreiben Sie dieses einschalige Hyperboloid H auch als Rotationsfläche wie in $\boxed{43}$. Zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von H zwei Geraden verlaufen, die in H enthalten sind.

46 Beschreiben Sie die Gruppe der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen $O(n)$ als reguläre C^∞- Nullstellenmenge einer geeigneten Abbildung $F\colon M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$, wobei $S_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ den Vektorraum der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen bezeichnet. Welche Dimension hat also $O(n)$? Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_IO(n)$ an der Identität $I \in O(n)$.

47 Beschreiben Sie den Torus aus 2.4(6) der VO als reguläre C^∞-Nullstellenmenge in einer geeigneten offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

48 Eine geometrische Argumentation für die Existenz von Lagrange-Multiplikatoren: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U,\mathbb{R})$. Weiters sei die $(n-r)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M = \{x \in U \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_r(x) = 0\}$ als reguläre Nullstellenmenge gegeben — M modelliert hier die Nebenbedingungen. Zeigen Sie: Besitzt $f|_M$ ein lokales Extremum in $a \in M$, so ist $Df(a) \in \operatorname{span}\{Dg_1(a), \ldots, Dg_r(a)\}$; d.h. also es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, eben die Lagrange-Multiplikatoren, sodass

$$Df(a) = \lambda_1 \cdot Dg_1(a) + \cdots + \lambda_r \cdot Dg_r(a).$$

Gehen Sie so vor, dass Sie zunächst $T_aM \subseteq \ker Df(a)$ zeigen. Für den Beweisabschluss dürfen Sie folgendes Lemma[1] aus der Linearen Algebra verwenden: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $l, l_1, \ldots, l_r \in L(V,\mathbb{R}) = V^*$, dann gilt: $\;l \in \operatorname{span}\{l_1, \ldots, l_r\} \iff \bigcap_{j=1}^r \ker l_j \subseteq \ker l$.

Bemerkung: Mit nur ein bisschen mehr Arbeit können auch die bekannten hinreichenden Kriterien mit Hilfe einer geeignet zu definierenden Hesse-Matrix von f — eigentlich eine quadratische Form — auf dem Tangentialraum T_aM formuliert werden (siehe z.B. Abschnitt 3.3. im Buch *Einführung in die Analysis 3* von Rolf Walter).

[1] Die Richtung $\Rightarrow$ ist offensichtlich und für die Rückrichtung kann ein Beweis so laufen: Wir definieren auf dem Teilraum $W := \{(l_1(v), \ldots, l_r(v)) \mid v \in V\} \subseteq \mathbb{R}^r$ ein lineares Funktional durch $\mu_0(l_1(v), \ldots, l_r(v)) := l(v)$ (gerade wegen der angenommenen Eigenschaft der Kerne ist diese Definition möglich) und dehnen μ_0 dann zu einem linearen Funktional $\mu \in L(\mathbb{R}^r,\mathbb{R})$ aus; für Letzteres gibt es $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, sodass $\mu(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{j=1}^r \lambda_j z_j$ für alle $(z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{R}^r$; speziell also für jedes $v \in V$ somit $l(v) = \mu_0(l_1(v), \ldots, l_r(v)) = \mu(l_1(v), \ldots, l_r(v)) = \sum_{j=1}^r \lambda_j l_j(v)$.