PS Analysis 3 SS 2024

Blatt 7

$\boxed{\textbf{37}}$ Weisen Sie direkt mittels Definition 2.1 aus der VO nach, dass das kartesische Produkt $M \times N$ von C^r-Teilmannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimensionen k und l eine C^r-Teilmannigfaltigkeit der Dimension $k+l$ von $\mathbb{R}^{m+n}$ ist. Zeigen Sie weiters, dass in diesem Fall $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$ für beliebige $x \in M$ und $y \in N$ gilt.

$\boxed{\textbf{38}}$ Wir haben in der VO bereits überlegt, warum für $x \in S^{n-1}$ stets $T_xS^{n-1} \subseteq \{x\}^\perp$ gelten muss. Vervollständigen nun die Argumentation für die Behauptung $T_xS^{n-1} = \{x\}^\perp$.

$\boxed{\textbf{39}}$ Weisen Sie direkt mittels Definition 2.1 aus der VO nach, dass der Zylinder $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$ eine 2-dimensionale C^∞-Teilmannigfaltigkeit ist. Benützen Sie dazu die offene Überdeckung $M \subseteq U_- \cup U_+$ mit $U_\pm := E_\pm \times \mathbb{R}$, $E_\pm := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid \pm x \leq 0\}$, und die Abbildungen $\Phi_\pm \colon U_\pm \to V_\pm$, $(x,y,z) \mapsto (\arg_\pm(x,y), z, 1-x^2-y^2)$ mit geeigneten offenen Mengen $V_\pm \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $\arg_\pm$ die Winkelkomponente einer lokalen Inversen der Polarkoordinatenabbildung auf $E_\pm$ bezeichnet.

$\boxed{\textbf{40}}$ Wir verwenden wieder die Bezeichnungen aus der vorigen Aufgabe und studieren die Abbildungen $F_\pm \colon U_\pm \to U_\pm$, $F_\pm(\xi) = f_\pm(\xi) \cdot \xi$ mit $f_\pm \colon U_\pm \to]0,\infty[$ gegeben durch $f_\pm(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}/\sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Interpretieren Sie den skalaren Faktor $f_\pm(x,y,z)$ in Kugelkoordinaten und zeigen Sie, dass $G_\pm \colon U_\pm \to U_\pm$ mit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{u^2+v^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\arg_\pm(u,v) \cdot \cos\theta(u,v,w) \\ \sin\arg_\pm(u,v) \cdot \cos\theta(u,v,w) \\ \sin\theta(u,v,w) \end{pmatrix}, \theta(u,v,w) := \arctan\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

die Umkehrabbildung von $F_\pm$ ist, somit F_- und F_+ also C^∞-Diffeomorphismen sind.

(b) Es sei S die Menge S^2 ohne Nord- und Südpol, was als (relativ) offene Teilmenge von S^2 gemäß VO selbst eine Teilmannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, dass $F_\pm(S \cap U_\pm) = M \cap U_\pm$ gilt, wobei M der Zylinder aus der vorigen Aufgabe ist.

$\boxed{\textbf{41}}$ Wir verwenden weiterhin die Bezeichnungen der beiden vorangegangenen Aufgaben. Argumentieren Sie mit Hilfe der obigen Resultate, warum die Abbildung $F \colon S \to M$, $F(x,y,z) := 1/\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x,y,z)$ nun gemäß VO als bijektive C^∞-Abbildung der Teilmannigfaltigkeit S auf den Zylinder M erkannt ist. Bemerkung: Dies erzeugt übrigens eine winkeltreue Weltkarte nach Gerhard Mercator 1569. Die entsprechende Inverse $F^{-1} \colon M \to S$ ist ebenfalls C^∞ in diesem Sinne und lässt sich lokal recht praktikabel in zylindrischen Koordinaten (φ, h) für $(\cos\varphi, \sin\varphi, h) \in M$ auch so beschreiben: $(\varphi, h) \mapsto 1/\cosh h \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, \sinh h)$.

$\boxed{\textbf{42}}$ Wieder in den Bezeichnungen der vorigen Aufgabe(n): Berechnen Sie für einen beliebigen Punkt $(x,y,z) \in S$ die Tangentialabbildung $T_{(x,y,z)}F \colon T_{(x,y,z)}S \to T_{F(x,y,z)}M$ mit Hilfe von Satz 2.2(2). Ist $T_{(x,y,z)}F$ ein Isomorphismus von Vektorräumen?