Blatt 13

$\boxed{\mathbf{73}}$ Gegeben sei eine eindimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, die auch als Bild $M = c(I)$ unter einer regulär parametrisierten $C^1$-Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ auftritt. Begründen Sie mit Hilfe von Abschnitt 1.5 der VO, warum $M$ orientierbar ist und eine Orientierung von $M$ gerade der Wahl eines Durchlaufsinns der Kurve entspricht. (Zusammen mit einem Resultat, dass eindimensionale zusammenhängende Teilmannigfaltigkeiten [ohne Rand] diffeomorph zu $]0,1[$ oder $S^1$ sind, können wir mit Satz 3.6 der VO schließen, dass jede solche auch orientierbar ist.)

$\boxed{\mathbf{74}}$ Begründen Sie kurz, warum $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie dann in einer geeigneten Parametrisierung $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wie in 3.7 der VO beschrieben ein glatte Abbildung $\nu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\nu(x,y) \perp T_{u(x,y)}M$ an, aus der Sie durch Normierung ein Einheitsnormalenfeld $\vec{n}$ auf $M$ gewinnen. Wählen Sie die Orientierung auf $M$ so, dass die Flächennormale $\vec{n}(0)$ im Punkt $0 \in M$ gerade $e_3$ ergibt.

In den folgenden beiden Aufgaben verwenden wir weiterhin $M$ aus der vorigen Aufgabe und versehen die Fläche auch mit der dort angegebenen Orientierung. Wir berechnen nun auf zwei Arten das Integral $\int_K \omega$ über das Kompaktum $K := \{(x,y,z) \in M \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ für die 2-Form $\omega = xz\,dx \wedge dy + (x^2+y^2)\,dx \wedge dz + 3z\,dy \wedge dz$:

$\boxed{\mathbf{75}}$ Variante 1: Finden Sie eine geeignete Parametrisierung $u\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit $K \subseteq u(U)$ und gehen Sie direkt nach Definition vor, indem Sie also $\int_{u^{-1}(K)} u^*\omega$ berechnen.

$\boxed{\mathbf{76}}$ Variante 2: Finden Sie das Vektorfeld $Z\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $\omega = \widetilde{Z}$ und verwenden Sie die Methode aus 3.7 der VO, d.h. $\int_K \omega = \int_K \langle Z, \vec{n}\rangle \mathrm{vol}$.

Die beiden folgenden Aufgaben sind selbstverständlich streng genommen „jeweils zur Hälfte unnötige Verifikationen“, sobald der allgemeinere Satz von Stokes für Teilmannigfaltigkeiten mit Rand oder die klassischen Integralsätze zur Verfügung stehen. In der VO kommt dies aber erst so spät dran, dass es sich für die PS-Aufgaben nicht mehr gut ausginge, und wir wollen ja formal gar nicht davon ausgehen, dass Sie diese Sätze schon aus anderen Zusammenhängen kennen. Außerdem ist der Übungseffekt durch Berechnungen auf verschiedene Arten wünschenswert.

$\boxed{\mathbf{77}}$ Wir betrachten $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Orientierung gemäß äußerem Einheitsnormalenfeld, das Kompaktum $K := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \ge 1/\sqrt{2}\}$ und die 1-Form $\alpha = -y\,dx + x\,dy$.

(a) Berechnen Sie $\int_K d\alpha$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c \alpha$ für $c(t) = (\cos t, \sin t, 1)/\sqrt{2}$ ($t \in [0, 2\pi]$).

$\boxed{\mathbf{78}}$ Wir betrachten die 2-Form $\omega = z\,dx \wedge dy - y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz$ auf $\mathbb{R}^3$ und die Menge $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ als Kompaktum in der Teilmannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}^3$ mit Standardorientierung.

(a) Berechnen Sie $\int_K d\omega$.

(b) Berechnen Sie $\int_{S^2} \omega$, wobei $S^2$ mittels äußerem Einheitsnormalenfeld orientiert sei. Hier können Sie ruhig z.B. „in einem Gang“ über sphärische Koordinaten integrieren, weil wir wegen Beschränktheit aller auftretenden Komponentenfunktionen und Pullbacks jedenfalls Lebesgue-Nullmengen ignorieren dürfen.