Blatt 12

$\boxed{\textbf{67}}$ Die k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei gegeben als Graph der stetig differenzierbaren Abbildung $f: U \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf der offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Begründen Sie, warum M orientierbar ist. Wie erhalten wir im Fall $k = n-1$ sehr einfach ein stetiges Einheitsnormalenfeld?

$\boxed{\textbf{68}}$ Gegeben sei die Teilmannigfaltigkeit $M = g^{-1}(\{0\})$, wobei $g: V \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist und $Dg(x) \neq 0$ für jedes $x \in M$ ist. Begründen Sie, warum M orientierbar ist.

$\boxed{\textbf{69}}$ Nun sei $M = g^{-1}(\{0\})$, wobei $g = (g_1, \dots, g_{n-k}): V \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf der offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist und $Dg(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv ist für jedes $x \in M$. Zeigen Sie, dass durch

$$\alpha(y, v_1, \dots, v_k) := \det(\nabla g_1(y), \dots, \nabla g_{n-k}(y), v_1, \dots, v_k) \qquad (y \in V, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n)$$

ein Element $\alpha \in \Omega^k(V)$ definiert wird mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x \in M$ gibt es $v_1, \dots, v_k \in T_xM$ mit $\alpha(x, v_1, \dots, v_k) \neq 0$, d.h. $\alpha(x) \neq 0$ in $\Lambda^k(T_xM)^*$ für alle $x \in M$.
Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass Letzteres äquivalent zur Orientierbarkeit von M ist. Somit erhalten wir hier, dass $M = g^{-1}(\{0\}$ auch für $k \neq n-1$ orientierbar ist.

$\boxed{\textbf{70}}$ Zeigen Sie, dass durch $g(t) := \exp(-1/(1-t^2))$ für $|t| < 1$ und $g(t) := 0$ für $|t| \geq 1$ eine C^∞-Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wird mit $0 \leq g \leq 1/e$ und $\operatorname{supp}(g) = [-1, 1]$. Sie dürfen hier ein Resultat aus Analysis 1 verwenden, nämlich dass durch $h(x) := \exp(-1/x)$ für $x > 0$ und $h(x) := 0$ für $x \leq 0$ eine C^∞-Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist. (Für Letzteres siehe etwa Beispiel IV.1.17 in Analysis I, 3. Auflage 2006, von Amann und Escher.)

$\boxed{\textbf{71}}$ Zeigen Sie, dass mit der in Beispiel 3.3 der VO angegebenen Orientierung von $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die dort erwähnte Kugelkoordinaten-Parametrisierung $v: V \to \mathbb{R}^3$ positiv orientiert ist.

$\boxed{\textbf{72}}$ Zeigen Sie: Zu linear unabhängigen Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, mit den beiden Eigenschaften (i) $\langle w, v_j \rangle = 0$ ($j = 1, \dots, n-1$) und (ii) $\|w\|^2 = \det(w, v_1, \dots, v_{n-1})$. Wir nennen w das *Vektorprodukt* von $v_1, \dots, v_{n-1}$ mit der Bezeichung $w = v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$. Im Falle linear abhängiger Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ setzen wir $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} := 0$. Zeigen Sie weiters, dass

$$\forall v \in \mathbb{R}^n: \quad \langle v_1 \times \cdots \times v_{n-1}, v \rangle = \det(v, v_1, \dots, v_{n-1})$$

gilt. Insbesondere folgt daraus für $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} =: w = (w_1, \dots, w_n)$ sofort die komponentenweise Formel

$$w_i = \langle w, e_i \rangle = \det(e_i, v_1, \dots, v_{n-1}).$$