PS Analysis 3 SS 2024

Blatt 11

$\boxed{\textbf{61}}$ Wir verwenden die Notation aus Aufgabe $\boxed{55}$ und nehmen an, dass $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(a) Zeigen Sie $d\widetilde{Z} = (\operatorname{div} Z)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

(b) Betrachten wir speziell den Fall $Z = \operatorname{rot} F$ für ein C^2-Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3)$ auf $\mathbb{R}^3$. Wie hängt hier nun die 2-Form $\widetilde{Z} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ mit der 1-Form $\alpha_F := F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$ zusammen, die dem Vektorfeld F zugeordnet ist? Was bedeutet die Gleichung $d(d\alpha_F) = 0$?

(c) Nun sei $F = \operatorname{grad} f$ für eine C^2-Funktion f auf $\mathbb{R}^3$. Warum gilt dann $d\alpha_F = 0$ und was bedeutet dies für das Vektorfeld F?

Bemerkung: Im Kontext von (a) und (b) können wir die raum-zeitliche 2-Form φ aus Aufgaben $\boxed{59}$ und $\boxed{60}$ auch als $\varphi = dt \wedge \alpha_E - \widetilde{B}$ anschreiben, wobei sich die Notation $\widetilde{B}$ hier rein auf die räumlichen Koordinaten (x, y, z) beziehen soll. In diesem Sinne gilt $d\varphi = -(\operatorname{div} B)\, dx \wedge dy \wedge dz - dt \wedge (\widetilde{\partial_t B + \operatorname{rot} E})$, was uns zu den homogenen Maxwell-Gleichungen geführt hatte.

$\boxed{\textbf{62}}$ Es sei $\omega = -(z^2 + e^x)\, dx \wedge dy - dx \wedge dz + 2xz\, dy \wedge dz$ auf $\mathbb{R}^3$. Ist ω geschlossen? Ist ω auch exakt? Können Sie gegebenenfalls eine 1-Form η finden mit $d\eta = \omega$?

$\boxed{\textbf{63}}$ Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Jede stetig differenzierbare n-Form $\omega \in \Omega^n(U)$ ist eindeutig darstellbar als $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f \colon U \to \mathbb{R}$. Nun ist ω sicherlich geschlossen (warum?), also gibt es nach dem Lemma von Poincaré eine $(n-1)$-Form η mit $d\eta = \omega$. Was bedeutet die Bedingung $d\eta = \omega$ für die Komponentenfunktionen von η bzgl. der Koordinatenformdarstellung? Was bedeutet sie im Falle $\eta := \widetilde{Z}$ (vgl. Beispiel 2.9 der VO) mit einem Vektorfeld Z auf U.

$\boxed{\textbf{64}}$ Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^l(U)$. Zeigen Sie: Sind α und β geschlossen, dann auch $\alpha \wedge \beta$. Ist α geschlossen und β exakt, dann ist $\alpha \wedge \beta$ exakt. Geben Sie im zweiten Fall eine Stammform für $\alpha \wedge \beta$ mit Hilfe einer Stammform für β an.

$\boxed{\textbf{65}}$ Nun sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, Z ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U und $\psi := Z_1\, dx_1 + Z_2\, dx_2 + Z_3\, dx_3 \in \Omega^1(U)$. Begründen Sie, warum die Gleichung $df \wedge d\psi = d(-df \wedge \psi)$ gilt und zeigen Sie, dass daraus für die klassische Vektoranalysis die Relation $\operatorname{div}((\nabla f) \times Z) = -\langle \nabla f, \operatorname{rot} Z \rangle$ folgt.

Bemerkung: Dies folgt auch aus der klassischen Rechenregel $\operatorname{div}(a \times b) = \langle \operatorname{rot} a, b \rangle - \langle a, \operatorname{rot} b \rangle$ (siehe z.B. Satz 6.28 im Band Analysis III, 2. Auflage, von Amann und Escher) zusammen mit $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

$\boxed{\textbf{66}}$ Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definieren wir $Z^k(U) := \{\omega \in \Omega^k(U) \mid \omega \text{ ist } C^\infty \text{ und geschlossen}\}$ und $B^k(U) := \{\omega \in \Omega^k(U) \mid \omega \text{ ist } C^\infty \text{ und exakt}\}$, die beide Vektorteilräume der glatten k-Formen auf U sind. Begründen Sie:

(a) $B^k(U)$ ist ein Teilraum von $Z^k(U)$. Somit ist die *k-te de Rham-Kohomologie* als Quotientenvektorraum $H^k(U) := Z^k(U)/B^k(U)$ stets definiert.

(b) Wenn U sternförmig ist, dann folgt $\dim H^k(U) = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

(c) Für $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist $H^1(U) \neq \{0\}$. (Mit ein bisschen Aufwand lässt sich sogar auf elementare Art zeigen, dass in diesem Fall $\dim H^1(U) = 1$ gilt; siehe z.B. Abschnitt 2.2 und Aufgaben 13, 14 für Kapitel 2 im Buch Vektoranalysis, 2. Auflage, von Agricola und Friedrich.)