Blatt 10

$\boxed{\mathbf{55}}$ Wir schreiben hier die Koordinaten-1-Formen auf $\mathbb{R}^3$ als dx, dy und dz an. Bezüglich welcher Koordinaten-2-Formen lassen sich dann die Elemente aus $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ durch eindeutige Koeffizientenfunktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beschreiben? Wie lautet die Volumsform $\mathrm{vol} \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ aus Beispiel 2.9. der VO und wie die 2-Form $\widetilde{Z} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, die wie ebendort aus einem Vektorfeld Z auf $\mathbb{R}^3$ konstruiert wird?

$\boxed{\mathbf{56}}$ Berechnen Sie die Differentialformen $f\alpha+\beta$, $\alpha\wedge\gamma$ und $(f\beta)\wedge\gamma$ für die Elemente $\alpha, \beta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ und $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ wie im Folgenden angegeben: $\alpha = e^z\, dx\wedge dy + x\, dy\wedge dz$, $\beta = \cos(xy) dx \wedge dz + z\, dy \wedge dz$, $\gamma = \sin(xz)\, dy + e^{x+y}\, dz$ und $f(x, y, z) = ye^{-z}$.

$\boxed{\mathbf{57}}$ Verifizieren Sie die Gleichung $d(f\gamma) = df \wedge \gamma + fd\gamma$ für die obigen Differentialformen.

$\boxed{\mathbf{58}}$ Berechnen Sie die Pullbacks von dx, dy, dz, $dx\wedge dy$ und $dx\wedge dy\wedge dz$ unter der glatten Abbildung $F\colon]0,\infty[\, \times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$.

Wir bezeichnen in den folgenden beiden Aufgaben die Koordinaten in $\mathbb{R}^4$ mit (t, x, y, z) und es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ offen.

$\boxed{\mathbf{59}}$ Begründen Sie: Zu jeder stetigen 2-Form $\varphi \in \Omega^2(U)$ gibt es eindeutige Abbildungen $E, B \in C(U, \mathbb{R}^3)$ mit Komponentenfunktionen E_1, E_2, E_3 bzw. B_1, B_2, B_3, sodass

$$\varphi = dt \wedge (E_1\, dx + E_2\, dy + E_3\, dz) - B_1\, dy \wedge dz + B_2\, dx \wedge dz - B_3\, dx \wedge dy$$

gilt. Umgekehrt definiert obige Gleichung natürlich für gegebene Abbildungen $E, B \in C(U, \mathbb{R}^3)$ immer eine stetige 2-Form $\varphi \in \Omega^2(U)$.

$\boxed{\mathbf{60}}$ Seien nun φ bzw. E und B wie in der vorigen Aufgabe und zusätzlich stetig differenzierbar. Für $U =]t_0, t_1[\, \times G$ mit $t_0 < t_1$ und $G \subseteq \mathbb{R}^3$ können wir E und B als zeitabhängige Vektorfelder auf G interpretieren. Was bedeutet die Gleichung $d\varphi = 0$ dann für diese zeitabhängigen Vektorfelder E und B?