Blatt 9

49 Rechnen Sie folgende Eigenschaften des Wärmeleitungskerns $\Gamma(x,t) = \frac{\exp(-\|x\|^2/(4t))}{(4\pi t)^{n/2}}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ nach: (a) $\partial_t \Gamma - \Delta\Gamma = 0$ und
(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t)\, dx = 1$, d.h. $x \mapsto \Gamma(x,t)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^n$.

50 Verwenden Sie die Lösungsformel mittels Wärmeleitungskern für das eindimensionale homogene Anfangswertproblem $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$), $u(x,0) = u_0(x)$ und zeigen Sie: Für die Anfangsdaten $u_0(x) = e^{-x}$ können wir die Lösung sogar explizit berechnen. (Dies ist eher ein sehr untypischer Glücksfall; meist sind wir auf qualitative Analyse angewiesen).

Für die folgenden beiden Aufgaben bezeichne Γ weiterhin den Wärmeleitungskern und $u_t(x) := \Gamma(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

51 Aus der VO können wir $\widehat{u_t}$ explizit angeben und leicht sehen, dass $\lim_{t\to 0+} \widehat{u_t}(y) = (2\pi)^{-n/2}$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Begründen Sie nun zusätzlich, dass $\lim_{t\to 0+} \widehat{u_t} = (2\pi)^{-n/2}$ im Sinne der (temperierten) Distributionen gilt, d.h. $\lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u_t}(y)\psi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\psi(y)\, dy$ für jede (rasch fallende) Testfunktion ψ auf $\mathbb{R}^n$. Indem wir jetzt noch eine passende Stetigkeit der inversen Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ annehmen (was gerechtfertigt ist!), folgern Sie daraus $u_t \to \delta_0$ $(t \to 0+)$.

52 Begründen Sie $\lim_{t\to 0+} u_t = \delta_0$ nun auch durch direkte Rechnung, d.h. indem Sie (nach geeigneter Substitution) $\lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$ nachweisen für jede Testfunktion φ.

53 Wir nehmen an, dass h auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert $\lambda > 0$ mit Randwert 0 ist. Rechnen Sie nach:
(a) Die Funktion $u(x,t) := e^{-\lambda t}h(x)$ löst das Anfangsrandwertproblem für $\partial_t u - \Delta u = 0$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,\infty[$ und $u(x,0) = h(x)$ $(x \in \Omega)$.
(b) Für beliebiges $f \in C([0,\infty[)$ löst $v(x,t) := (\int_0^t f(s)e^{-\lambda(t-s)}\, ds)h(x)$ das Anfangsrandwertproblem für $\partial_t v(x,t) - \Delta v(x,t) = h(x)f(t)$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,\infty[$ und $v(x,0) = 0$.
(Zum Kontext: In der VO wird allgemeiner die Lösung des Anfangsrandwertproblems durch einen Reihenansatz mit Eigenfunktionen für $-\Delta$ diskutiert.)

54 Bestimmen Sie die Lösung u von

$$(*) \qquad \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2\times]0,\infty[, \quad u(x,y,0) = xy^2,$$

indem Sie zunächst die Funktionen $v := \partial_x\partial_y^2 u$ und $w := \partial_x^2 u$ betrachten: Welche verwandten Probleme werden von v und w gelöst? Warum folgt daraus, dass v konstant gleich 2 und $w = 0$ sein muss? Wie können Sie mit diesem Wissen dann mittels $(*)$ die Funktion u komplett bestimmen?