Blatt 8

In den folgenden beiden Aufgaben skizzieren wir ein Argument dafür, dass das Newton-Potential $\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}$ tatsächlich eine Fundamentallösung für $-\Delta$ in drei Dimensionen ergibt, d.h. $-\Delta\Gamma = \delta_0$ auf $\mathbb{R}^3$ im distributionellen Sinne gilt.

$\boxed{\mathbf{43}}$ Für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $\tilde{f}\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ der *sphärischen Mittel* durch

$$\tilde{f}(r) := \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} f(r\omega)do(\omega) \left[= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f\left(r\begin{pmatrix}\cos\alpha\sin\theta\\ \sin\alpha\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right)\sin\theta\, d\theta d\alpha\right].$$

Begründen Sie:

(a) Es gilt $\tilde{f}(0) = f(0)$ und die Relation $\Delta\Big(\tilde{f}(\|x\|)\Big) = \tilde{f}''(r) + \frac{2}{r}\tilde{f}'(r)$ für $r = \|x\|$.

(b) $\langle\Gamma,\psi\rangle = \int_0^\infty r\,\tilde{\psi}(r)\,dr$ für jede Testfunktion ψ auf $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{44}}$ Zeigen Sie mit der vorigen Aufgabe: $-\langle\Delta\Gamma,\psi\rangle = \psi(0)$ für jede Testfunktion ψ.
(Ein bisschen müssen und dürfen Sie aber bei der Berechnung „schummeln", indem Sie nach Umwandlung in ein Integral über die radiale Variable dann $\widetilde{\Delta\psi}$ durch $\Delta\tilde{\psi}$ ersetzen, um nämlich die Relation aus (a) in obiger Aufgabe anwenden zu können. Das hat schon seine Richtigkeit, wäre aber nicht so leicht „auf elementare Art" zu beweisen; siehe z.B. Proposition 9.2, Chapter I in F. Treves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press 1975.)

$\boxed{\mathbf{45}}$ Begründen Sie: Betrachten wir das Newton-Potential $\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}$ auf der offenen Einheitskugel $\Omega := K_1(0)$ im $\mathbb{R}^3$, so gilt $\Gamma \in L^2(\Omega)$ und $\partial_j\Gamma \in L^1(\Omega)\setminus L^2(\Omega)$ für $1 \le j \le 3$.
(Hier dürfen Sie abkürzend $\partial_j\Gamma$ direkt mittels klassicher Ableitung für $x \neq 0$ berechnen; man kann zeigen, dass dies in diesem Fall auch die richtige distributionelle Ableitung ergibt. Im Allgemeinen ist das falsch, wie schon auf $\mathbb{R}$ das Beispiel der Heaviside-Funktion mit Ableitung Delta lehrt!)

$\boxed{\mathbf{46}}$ Wir betrachten das sehr elementare eindimensionale Dirichlet-Problem $-u'' = \theta$ in $\Omega :=]-1,1[$ und $u(-1) = u(1) = 0$, wobei θ die Heaviside-Funktion bezeichne, also $\theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\theta(x) = 1$ für $x > 0$. Erraten Sie für diesen Fall eine schwache Lösung einfach durch zweifaches Integrieren und skizzieren Sie die so erhaltene Funktion u sowie ihre Ableitung. Verifizieren Sie schließlich, dass u eine schwache Lösung ist, d.h.

$$\int\limits_{-1}^{1} u'(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1}\theta(x)\,\varphi(x)\,dx$$

erfüllt für jedes $\varphi \in C_0^1([-1,1]) = \{\psi \in C^1([-1,1]) \mid \psi(-1) = \psi(1) = 0\}$.
(Bemerkung: u ist auch eine *distributionelle Lösung* der Differentialgleichung $-u'' = \theta$.)

In den diesen Aufgaben betrachten wir den Halbraum $\Omega = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ mit Rand $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ und dem Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}(y) = (0,\ldots,0,-1)$ für $y \in \partial\Omega$:

$\boxed{\mathbf{47}}$ Konstruieren Sie eine Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem in Ω, indem Sie G_x für $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$ sozusagen geeignet aus einer Punktquelle bei x und einer Punktquelle am Spiegelpunkt $\tilde{x} := (x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)$ zusammensetzen.

$\boxed{\mathbf{48}}$ Berechnen Sie $\partial_{\mathfrak{n}}G_x$ und geben Sie eine Integraldarstellung für die Lösung des Dirichlet-Problems $-\Delta u = 0$ in Ω und $u = g$ in $\partial\Omega$ an, wobei g stetig und beschränkt ist.