Blatt 7

Geben Sie in allen Aufgaben dieses Blattes jeweils die in der VO aus Separationsansätzen gewonnenen Fourierdarstellungen für die Lösung u an.

37 Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ ($0 < x < 1$, $t \in \mathbb{R}$) mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = -x(x-1)$, $\partial_t u(x,0) = 0$.

38 Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$ ($0 < x < 2$, $t \in \mathbb{R}$) mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(2,t) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$, wobei $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq 1$ bzw. $f(x) = 2 - x$ für $1 < x \leq 2$ gilt.

39 Stationäres Wärmeleitungsproblem, d.h. $\Delta u = 0$ auf der Kreisscheibe $K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Randbedingung $u = f$ auf $S^1 = \partial K_1(0)$ für zwei konkrete Beispiele von f:
(a) $f = 1$ (konstant) und (b) $f(x,y) = x^2$ für $x^2 + y^2 = 1$ (d.h. $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi$).
(Hinweis: In beiden Fällen ergibt sich eine recht einfache endliche Summe mittels komplexer Fourierreihe, die sich schließlich als Polynom in den Variablen x und y ausdrücken lässt.)

40 $\partial_t^2 u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$ im Bereich $0 < x < \pi$, $t \in \mathbb{R}$ unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad (t > 0),\\ &u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = (\pi - 2x)/4 \quad (0 < x < \pi). \end{aligned}$$

41 $\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$ im Bereich $0 < x < \pi$, $t > 0$ unter den Bedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad (t > 0), \quad u(x,0) = x(\pi - x) \quad (0 < x < \pi).$$

42 $\Delta u = 0$ auf der offenen Einheitskreisscheibe um 0 in $\mathbb{R}^2$ und $u = f$ auf dem Rand S^1, wobei $f(x,y) = x + y^2$ für $x^2 + y^2 = 1$ ist (d.h. $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi + \sin^2\varphi$).