# Blatt 6

**31** Bei den Separationsansätzen für klassische partielle Differentialgleichungen werden wir mehrfach auf Fourierreihenentwicklungen aus dem Stoff der Analysis I zurückgreifen. Wiederholen Sie die Grundbegriffe in reeller sowie komplexer Fassung, aber angepasst an Funktionen *mit beliebiger Periode* $2L$ ($L > 0$), die wir z.B. auf dem Intervall $[-L, L]$ betrachten; geben Sie die entsprechend adaptierten Formeln für die Reihenentwicklung sowie für die Koeffizienten an. Was erhalten wir in der reellen Version speziell für die Fourierentwicklung der *ungeraden* Fortsetzung einer zunächst auf $[0, L]$ gegebenen integrierbaren reellen Funktion $f$ mit $f(0) = f(L) = 0$?

**32** Bestimmen Sie für $u(x) = |x|/2$ die distributionellen Ableitungen $u'$ und $u''$.
[Die sogenannte Signum-Funktion ist $\operatorname{sgn}(x) := -1$ ($x < 0$), $\operatorname{sgn}(0) := 0$ und $\operatorname{sgn}(x) := 1$ ($x > 0$).]

**33** Berechnen Sie direkt mittels Definition der distributionellen Fouriertransformation:
(a) $\widehat{u_a}$ für $u_a(x) = e^{iax}/\sqrt{2\pi}$ ($a, x \in \mathbb{R}$),
(b) $\widehat{v}$ für $v(x) = x/\sqrt{2\pi}$ ($x \in \mathbb{R}$).

**34** Für $n \in \mathbb{N}$ defnieren wir die Funktion $u_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $u_n(x) := 1$ für $|x| \leq n$ und $u_n(x) := 0$ sonst. Berechnen Sie $u_n'$ sowie die distributionellen Limiten $\lim_{n\to\infty} u_n$ und $\lim_{n\to\infty} u_n'$. Könnten wir Letzteren auch berechnen, ohne $u_n'$ explizit zu kennen?

**35** (a) Ist die Folge $(n\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}$ konvergent?
Ist die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n(x) := e^{inx}$ konvergent in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$? Geben Sie zwei Begründungen:
(b) mittels der Folge der Fouriertranformierten $\widehat{u_n}$,
(c) direkt durch Betrachtung von $\langle u_n, \varphi\rangle$.

**36** (a) Was ergibt sich für die Distribution $-g \cdot \delta_0'$ auf $\mathbb{R}$ für $g(x) = x$?
(b) Für $\lambda > 0$ sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) := \lambda x$. Was ergibt $\delta_0 \circ F$?