PUE Analysis für Physiker∗innen III WS 24/25

Blatt 5

25 Berechnen Sie direkt gemäß Definition die Fouriertransformierte von $u(x) = e^{-a|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$, $a > 0$). Inwiefern passt das mit dem Ergebnis eines Beispiels zu den Anwendungen des Residuensatzes aus dem VO-Teil über Komplexe Analysis zusammen?

26 (a) Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, A eine invertierbare reelle $(n \times n)$-Matrix und $v(x) := u(Ax)$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ folgende Relation gilt:

$$\widehat{v}(y) = \frac{1}{|\det A|}\,\widehat{u}\big((A^{-1})^T y\big).$$

(b) Schließen Sie mit Hilfe von (a), dass die Fouriertransformierte einer radialsymmetrischen[1] Funktion ebenfalls diese Eigenschaft hat.

27 Hier bezeichne q ein Polynom.

(a) Begründen Sie, warum $u(x) := q(x)e^{-x^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) eine rasch fallende Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert, also ein Element von $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Ist $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, dann können wir den gewöhnlichen linearen Differentialoperator $q\big(i\frac{d}{dy}\big)f := a_0 f + a_1 i f' + \ldots a_m i^m f^{(m)}$ betrachten. Zeigen Sie, dass dann für die Funktion u aus (a) die Relation $\widehat{u}(y) = q\big(i\frac{d}{dy}\big)e^{-y^2/2}$ gilt.

28 Für $\omega > 0$ betrachten wir die Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch $u(t) = 0$ für $t < 0$ und $u(t) = e^{-t}e^{i\omega t}$ für $t \geq 0$. Wir können u (bzw. jeweils den Real- und Imaginärteil davon) als zeitlich verlaufendes Signal auffassen, das bei $t = 0$ einsetzt und dann einer gedämpften Schwingung mit Frequenz ω entspricht. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{u}$ und verifzieren Sie, dass diese beschränkt und stetig ist, im Unendlichen gegen 0 geht und $\tau \mapsto |\widehat{u}(\tau)|$ sein Maximum bei $\tau = \omega$ annimmt.

29 Berechnen und skizzieren Sie die Funktion $v := u * u$, wobei $u \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben ist durch $u(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und $u(x) = 0$ für $|x| > 1/2$. Berechnen Sie auch $\widehat{v}$.

30 Schließen/wiederholen Sie zunächst aus einem Beispiel in der VO: Die Funktion $v = \operatorname{sinc}$, also $v(y) = \frac{\sin y}{y}$, ist gerade die Fouriertransformierte von $u \in L^1(\mathbb{R})$ mit $u(x) = \sqrt{\pi/2}$ für $|x| \leq 1$, $u(x) = 0$ für $|x| > 1$. Die Funktion v ist zwar nicht (absolut) integrierbar über $\mathbb{R}$, gehört aber zu $L^2(\mathbb{R})$. Begründen Sie Letzteres und bestimmen Sie $\|v\|_2$ mit Hilfe geeigneter Eigenschaften der Fouriertransformation. Leiten Sie daraus auch einen konkreten Wert für das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2}\,dy$ ab.

Bemerkung: Wegen $\mathcal{F}u = v$ ist nach dem Satz von Plancherel im L^2-Sinne auch $u = \mathcal{F}^{-1}v$, aber wegen $v \notin L^1$ wäre diese zweite Relation nicht elementar durch die übliche direkte Integralformel berechenbar, sondern z.B. als Grenzwert von Fourierintegralen über approximierende Funktionen aus $\mathscr{S}$ wie im Beweis des Satzes von Plancherel.

[1] D.h. ursprünglich, dass die Funktionswerte nur vom Radius abhängen; äquivalent dazu ist die Invarianz unter orthogonalen Transformationen der Koordinaten.