PUE Analysis für Physiker∗innen III — WS 24/25

Blatt 4

19 Geben Sie die Laurent-Entwicklung von $f(z) = z^2 \exp(-1/z)$ um $z_0 = 0$ an. Welchen Wert lesen wir daraus für das Residuum von f an der Stelle 0 ab?

20 (a) Begründen Sie, warum $1/\sin(\pi z)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist abgesehen von einfachen Polen der Ordnung 1 in den Punkten $n \in \mathbb{Z}$.
(b) Bestimmen Sie die Residuen von $f(z) := \pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ an den Stellen $n \in \mathbb{Z}$.

21 Bestimmen Sie die Stellen und Ordnungen der Pole von $f(z) = \dfrac{z^3+1}{(z^2-1)^3(z^2+1)^2}$.
Welche Residuen wären gemäß Residuensatz bei der Berechnung des komplexen Kurvenintegrals von f entlang des Kreises $C_{\sqrt{3}}(1)$ vom Radius $\sqrt{3}$ um den Punkt 1 auszuwerten? Die tatsächliche Berechnung der Residuen ist in dieser Aufgabe nicht verlangt und ein bisschen aufwändig, wobei die Formel $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big((z - z_0)^m f(z) \Big) \right)$ zum Ziel führt. (Details zum Wert des obigen Integrals finden sich in den Lösungsnotizen.)

22 Berechen Sie $\displaystyle\int_{C_{\sqrt{2}}(1+i)} \frac{e^{-\pi z}\, dz}{(z^2+1)(4z^2-1)}$, wobei $C_{\sqrt{2}}(1+i)$ wie üblich den Kreis um $1+i$ mit Radius $\sqrt{2}$ in Standardparametrisierung bezeichnet.

Wenden Sie in den folgenden beiden Aufgaben jeweils den Residuensatz an, um die angegebenen Integrale zu berechnen:

23 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

24 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)\sin(2x)}{x^2+2x+2}\, dx$ (Hinweis: $\sin(2x) = \operatorname{Im} e^{2ix}$.)