PUE Analysis für Physiker∗innen III WS 24/25

Blatt 2

7 Bestimmen Sie die Konvergenzradien für folgende Potenzreihen (mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$):
(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ und (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.
Welche reellen Funktionen werden dadurch auf welche komplexen Gebiete fortgesetzt?

8 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$ mit einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wie sieht es mit Konvergenz in den Randpunkten der entsprechenden Kreisscheibe aus? Können Sie die Summenfunktion bestimmen?

9 (a) Welche der folgenden Ausdrücke ergeben eine holomorphe Funktion? Wie lauten diese direkt als Funktionen von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ausgedrückt?
(i) $x - iy$, (ii) $(x^2 - y^2 + x) + i(y + 2xy)$, (iii) $(x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y)$.

(b) Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$ sowie $v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$ seien C^2-Funktionen[1]. Zeigen Sie, dass sowohl u als auch v *harmonische Funktionen* sind, d.h. es gilt $\Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$. (Erinnere: $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.)

10 Ein ebenes stationäres Strömungsfeld W sei von der Form $(u(x, y), -v(x, y), 0)$, wobei u und v reelle C^1-Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sind. Wir betrachten die zugeordnete komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$. Zeigen Sie, dass W genau dann *wirbelfrei* ($\operatorname{rot} W = 0$) und *quellenfrei* ($\operatorname{div} W = 0$) ist, wenn f holomorph ist.

11 Berechnen Sie $\displaystyle\int_{C_1(0)} z\,dz$ und $\displaystyle\int_{C_1(0)} \overline{z}\,dz$, wobei $C_1(0)$ den Kreis mit Radius 1 um 0 in der Standardparametrisierung bezeichnet.

12 Es sei $z = re^{i\varphi}$ ein Punkt der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^-$, d.h. $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dw}{w}$ für eine Kurve γ von 1 nach z wie folgt: Zunächst entlang der reellen Achse als Strecke von 1 nach r; anschließend entlang eines geeigneten Kreisbogenstückes von r nach $z = re^{i\varphi}$.

[1] Wir werden in der VO bald sehen, dass die C^2-Eigenschaft automatisch aus der Holomorphie folgt.