Blatt 14

$\boxed{\mathbf{79}}$ Prüfen Sie nach, dass durch $A(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{x_k}{k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$ ein symmetrischer Operator $A \in \mathcal{L}(l^2)$ definiert wird. Bestimmen Sie das Punktspektrum $\sigma_p(A)$ sowie das Spektrum $\sigma(A)$. (Hinweis: Es ergibt sich $\sigma_p(A) = \{\frac{1}{j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ und $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.)

$\boxed{\mathbf{80}}$ Wir betrachten hier sowohl den Ortsoperator $(Qu)(x) = x\,u(x)$ als auch den Impulsoperator $(Pu)(x) = -i\hbar\,u'(x)$ auf dem Definitionsbereich $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$, auf welchem auch der Kommutator $[Q, P] := QP - PQ$ sinnvoll definiert ist. Warum?

Verifizieren Sie nun die berühmte Relation $[Q, P] = i\hbar I$.

Überlegen Sie, warum Q nicht als beschränkter Operator $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ wirken kann. Folgern Sie daraus mittels Fouriertansformation dasselbe für P.

(Bemerkung: Wie z.B. in Fischer-Kaul, Band 2, §23:1.2 [Satz von Wintner] ausgeführt, kann obige Kommutatorrelation prinzipiell gar nicht mit beschränkten Operatoren bestehen.)

$\boxed{\mathbf{81}}$ Welche der folgenden linearen Operatoren sind symmetrisch im Hilbertraum $L^2([0, 1])$?

(a) $D(A) = C_0^2([0, 1]) := \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$ und $Au = -u''$.

(b) $D(B) = C^2([0, 1])$ und $Bu = -u''$.

$\boxed{\mathbf{82}}$ Wir betrachten im $L^2([0, 1])$ den Operator $(Au)(x) := \dfrac{1}{x}\,u(x)$ mit Definitionsbereich

$$D(A) := \{u \in L^2([0, 1]) \mid \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2}\,dx < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist. (Bemerkung: A ist sogar selbstadjungiert.)

Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(A)$. Besitzt A Eigenwerte?

$\boxed{\mathbf{83}}$ Bestimmen Sie jeweils das Spektrum und das Punktspektrum der folgenden linearen Operatoren im Hilbertraum $L^2([0, 1])$:

(a) $D(A) = C^1([0, 1])$ und $Au = u'$.

(b) $D(B) = \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(0) = 0\}$ und $Bu = u'$.

$\boxed{\mathbf{84}}$ Wir betrachten den linearen Operator

$$Au = -iu' + \pi u$$

für $u \in D(A) := \{w \in C^1([0, 1]) \mid w(0) = w(1)\}$ im Hilbertraum $L^2([0, 1])$.
Ist A symmetrisch? Bestimmen Sie das Punktspektrum von A.