Überprüfen Sie in diesen zwei Aufgaben, ob es sich um stetige lineare Operatoren handelt:

$\boxed{\textbf{73}}$ $B\colon l^2 \to l^2$ mit $B(x_1, x_2, \dots) = (x_1 - x_2, x_2 + x_1, \dots, x_{2k+1} - x_{2k+2}, x_{2k+2} + x_{2k+1}, \dots)$.

$\boxed{\textbf{74}}$ $T\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ mit $(Tf)(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy$, wobei $G \in C([0,1]^2)$ ist.

$\boxed{\textbf{75}}$ Überprüfen Sie in beiden Punkten, dass es sich jeweils um *unitäre* Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ handelt, d.h. S ist bijektiv und $\langle Sf, Sg\rangle = \langle f, g\rangle$ für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

(a) Der Paritätsoperator (Raumspiegelung) $(Sf)(x) := f(-x)$.

(b) Translation mit festem Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, d.h. $(Sf)(x) := f(x - a)$.

Insbesondere gilt also jeweils $\|Sf\| = \|f\|$, daher ist S stetig mit Operatornorm $\|S\| = 1$.

$\boxed{\textbf{76}}$ (a) Zeigen Sie, dass für einen unitären Operator S stets $S^{-1} = S^*$ gilt.

(b) Der Rechtsshift R auf l^2 erfüllt zwar $\langle Rx, Ry\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in l^2$, aber R ist nicht bijektiv und daher nicht unitär.

$\boxed{\textbf{77}}$ Den beschränkten Operator A auf l^2 aus Beispiel 2) in Punkt 10.1 der VO können wir als direkte Verallgemeinerung einer Diagonalmatrix auffassen, insbesondere lassen sich Potenzen A^m für $m \in \mathbb{N}$ recht mühelos berechnen. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass alle a_j reell sind, sodass $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$ gilt. (Bemerkung: Es ist $\|A\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.)

(a) Wie sieht die Folge $p(A)x \in l^2$ für ein beliebiges Polynom p auf $\mathbb{R}$ und $x \in l^2$ aus?

(b) Welchen Ausdruck erraten/erwarten Sie demnach für $f(A)x$, wenn f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[-\|A\|, \|A\|]$ ist? Wenden Sie dies an, um speziell e^{itA} zu beschreiben.

$\boxed{\textbf{78}}$ Begründen Sie, warum $Wx := (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \dots) = (2^{-j} x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ einen Dichteoperator (oder allgemeinen Zustand) auf l^2 definiert. Was ist der Erwartungswert der Observablen A aus der vorigen Aufgabe in diesem Zustand?