$\boxed{\textbf{67}}$ (a) Zeigen Sie: Für Vektoren u und v in einem Hilbertraum$\mathcal{H}$ gilt stets die sogenannte Parallelogrammregel $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

(b) Beschreiben Sie das orthogonale Komplement des (abgeschlossenen) Teilraumes M aller Folgen $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2$ mit der Eigenschaft $x_{2l} = 0$ ($l \in \mathbb{N}$). Geben Sie die Zerlegung $z = x + y$ gemäß $l^2 = M \oplus M^\perp$ für jedes $z \in l^2$ konkret an.

$\boxed{\textbf{68}}$ Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $u \in \mathcal{H}$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$. Begründen Sie:

(a) aus $u_n \to u$ in $\mathcal{H}$ folgt $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ $(n \to \infty)$ für jedes $v \in \mathcal{H}$,

(b) in l^2 gibt es Beispiele dafür, dass die Umkehrung in (a) im Allgemeinen nicht stimmt.

$\boxed{\textbf{69}}$ Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $u, v \in \mathcal{H}$. Begründen Sie:

$u \perp v \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\| \leq \|u - \lambda v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\textbf{70}}$ Im Hilbertraum $L^2([-1,1])$ betrachten wir die Funktionen f und g mit $f(x) := x$ und $g(x) := x^2$ sowie den davon aufgespannten 2-dimensionalen Teilraum $V = \operatorname{span}\{f, g\}$. Geben Sie eine Formel für die Orthogonalprojektion P von $L^2([-1,1])$ auf V an.

$\boxed{\textbf{71}}$ (a) Geben Sie im Folgenraum l^2 für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion P_n auf $V_n := \operatorname{span}\{e_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ an. Begründen Sie, warum $P_n x \to x$ in l^2 für $n \to \infty$ gilt.

(b) Für den Linksshift L und den Rechtsshift R auf l^2 zeigen Sie: $R^* = L$, $L^* = R$ und $LR = I$, aber $RL \neq I$.

$\boxed{\textbf{72}}$ Bezeichne $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R})$, Q den Ortsoperator und P den Impulsoperator (beide definiert zumindest auf dem dichten Teilraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$). Durch welche Relationen sind diese drei Operatoren verbunden? In welcher Relation stehen die Erwartungswerte von Q bzw. P in den Zuständen φ und $\widehat{\varphi}$ für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ mit $\|\varphi\| = 1$?