$\boxed{55}$ (a) Überlegen Sie zunächst: Für den d'Alembert-Operator auf $\mathbb{R}^2$ gilt die Faktorisierung $\Box = \partial_t^2 - c^2\partial_x^2 = (\partial_t + c\,\partial_x)(\partial_t - c\,\partial_x) = (\partial_t - c\,\partial_x)(\partial_t + c\,\partial_x)$ auch bei der Anwendung auf Distributionen $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(b) Für gegebene $F, G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ setzen wir $v(x,t) := F(x+ct)$ und $w(x,t) := G(x-ct)$ und erhalten Funktionen $v, w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, die wir als Distributionen auf $\mathbb{R}^2$ auffassen können. Rechnen Sie nach, dass in diesem Sinne $\partial_t v - c\,\partial_x v = 0$ und $\partial_t w + c\,\partial_x w = 0$ gilt.

(c) Folgern Sie, dass $u := v+w$ eine distributionelle Lösung der homogenen Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ ist. (Bemerkung: Als lokalintegrable Funktion ist $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$. Mit ein wenig mehr Distributionentheorie kann dies sogar auf den Fall $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ausgedehnt werden.)

$\boxed{56}$ *Einflussbereich* bei der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ auf $\mathbb{R}\times]0,\infty[$: Angenommen u ist eine klassische Lösung mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$, $\partial_t u(x,0) = u_1(x)$ und u_0, u_1 verschwinden außerhalb des Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$. In welchem Bereich $B \subseteq \mathbb{R} \times [0,\infty[$ kann dann u überhaupt Werte ungleich 0 haben? Was ergibt sich formal als Bereich für den Grenzfall $b \to a+$? Skizzieren Sie die Bereiche auch.

$\boxed{57}$ *Einflussbereich* bei der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^3\times]0,\infty[$: Ähnlich wie oben betrachten wir eine klassische Lösung u mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$, $\partial_t u(x,0) = u_1(x)$. In welchem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3 \times [0,\infty[$ kann dann u überhaupt Werte ungleich 0 haben, falls u_0, u_1 außerhalb der Kugel $\overline{K_R(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ verschwinden? Was ergibt sich formal als Bereich für den Grenzfall $R \to 0+$?

$\boxed{58}$ Wenden Sie Aufgabe $\boxed{55}$ auf den Fall $F = G = \theta/2$ an (θ die Heaviside-Funktion) und berechnen Sie die resultierende Lösung u der Wellengleichung für Zeiten $t \geq 0$ explizit (mit geeigneten Fallunterscheidungen für Teilbereiche in $\mathbb{R} \times [0,\infty[$). Wo ist u stetig bzw. unstetig? Begründen Sie außerdem, dass zumindest formal die Anfangsbedingungen $u(x,0) = \theta(x)$ und $\partial_t u(x,0) = 0$ erfüllt sind.

$\boxed{59}$ Wir betrachten die homogene Wellengleichung $(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0$ auf $\mathbb{R}^3\times]0,\infty[$ mit radialsymmetrischen Anfangsdaten $u(x,0) = 0$ und $\partial_t u(x,0) = U_1(\|x\|)$, wobei wir U_1 als gerade Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ annehmen dürfen. Rechnen Sie nach, dass wir in diesem Fall folgende Darstellung für die Lösung erhalten: $u(0,t) = t\,U_1(ct)$ und für $\|x\| = r > 0$ ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2cr}\int\limits_{r-ct}^{r+ct} s\,U_1(s)\,ds.$$

Sie dürfen hier zur Vereinfachung annehmen, dass auch $x \mapsto u(x,t)$ radialsymmetrisch ist (Invarianz von $\Box$ unter räumlichen Drehungen), und somit im Fall $r > 0$ z.B. $x = re_3$ ansetzen.

$\boxed{60}$ Rechnen Sie nach, dass $u(x,t) := \theta(t-1)\theta(c(t-1) - |x|)/(2c)$ eine distributionelle Lösung von $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = \delta_{(0,1)}$ auf $\mathbb{R}^2$ ist.