PUE Analysis für Physiker∗innen III **WS 24/25**

Blatt 1

Dieses Aufgabenblatt dient als Vorbereitung auf den ersten Vorlesungsteil über Komplexe Analysis. Wir wiederholen hier einige Konzepte und Resultate aus dem ersten und zweiten Semester.

1 Beschreiben Sie die Definition und einige Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion (z.B. die Funktionalgleichung, Euler-Formel) sowie die Polardarstellung komplexer Zahlen und deren Bedeutung für die Multiplikation komplexer Zahlen. Wie lauten für beliebiges $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die n verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^n = w$ bei gegebenem $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$?

2 (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ mittels $|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}$ zu einem (reellen) normierten Raum wird. Darüberhinaus gilt $|z| \geq |\operatorname{Re} z|$, $|z| \geq |\operatorname{Im} z|$ und $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) Wiederholen Sie die Definition der Konvergenz einer komplexen Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Dies ist äquivalent ist zu der Eigenschaft, dass $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$ für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$ gilt.

3 Begründen Sie: Aus $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \lim_{n\to\infty} w_n = w_0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha z_0 + \beta w_0, \lim_{n\to\infty} z_n w_n = z_0 w_0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}, \text{ falls } w_0 \neq 0, w_n \neq 0.$$

4 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(a) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $A_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$,

(b) $B := \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{3}\}$,

(c) $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z > 0\}$, $C := \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$,

(d) $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < \operatorname{Im} z < 1\}$, $D_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1 - i| < 2\}$.

5 Für $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ betrachten wir die Abbildung $f\colon H \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$f(z) := \frac{z - i}{z + i}.$$

Zeigen Sie, dass f folgende Teilmengen jeweils bijektiv aufeinander abbildet:

(a) Die reelle Achse $T := \{z \in H \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ auf $S^1 \setminus \{1\}$, wobei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$,

(b) die obere Halbebene $\Omega := \{z \in H \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ auf die offene Einheitskreisscheibe $K_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

6 Wiederholen und beschreiben Sie den Begriff der Kurvenintegrale über Vektorfelder in der Ebene. Wie hängt das mit den Begriffen der Potential- oder Stammfunktionen zusammen?