

VO-Skriptum

Analysis für Physiker*innen III

Günther Hörmann
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
guenther.hoermann@univie.ac.at

Wintersemester 2024/25
(Version vom 10. September 2024)

Vorwort

Diese Vorlesungsnotizen orientieren sich in ihrer Stoffauswahl möglichst getreu an den im Modul ANA III beschriebenen Inhalten aus dem Curriculum für das Bachelorstudium Physik (Version 2018). Aufbau und Stil wiederum sind bewusst sehr stark angelehnt an entsprechende Abschnitte in Kapitel VII aus [FK1] und in Kapiteln III-VI aus [FK2], weil ich diese Bücher sehr schätze und als „BackUp“ bzw. zur Vertiefung der Konzepte nur empfehlen kann.

Im Hinblick auf die Menge an vorgegebenen Begriffen, Methoden und Inhalten machen wir natürlich starke Kompromisse in Sachen Beweise oder Beweisskizzen, die übrigens mit Fortschreiten im Material zunehmend ausgedünnt sind und gegen Ende ganz verschwinden. Oft werden sogar Konzepte nur kursorisch als Grundlage für das operative Anwenden der Begriffe und der wesentlichen Methoden behandelt — in der Hoffnung, dass zumindest ein Grundverständnis auch etwas eigene Flexibilität in der späteren Anwendung (also nach diesem Semester) erlaubt. Wie wahrscheinlich meistens in theoretischen Vorlesungen empfunden, kommen vielleicht vielen Studierenden zu wenige im Detail ausgeführte Rechenbeispiele vor, weil eben die präzise Beschreibung der Konzepte allein schon viel Raum (und Zeit zur „Verdauung“) braucht. Ich darf daher noch stärker auf die von mir bewusst angelegte enge inhaltliche Kopplung mit den parallel angebotenen prüfungsvorbereitenden Übungen hinweisen.

Günther Hörmann

Inhaltsverzeichnis

A. Komplexe Analysis	1
1. Grundlagen der Komplexen Analysis	3
2. Singularitäten und Residuenkalkül	21
B. Fourier-Transformation und Distributionen	33
3. Fouriertransformation	37
4. Distributionen	47
C. Klassische partielle Differentialgleichungen	57
5. Separationsansätze	61
6. Randwertprobleme für den Laplace-Operator	73
7. Wärmeleitungsgleichung	83
8. Wellengleichung	93
D. Lineare Operatoren auf Hilberträumen	105
9. Hilberträume und einige Begriffe aus der Quantenmechanik	109
10. Spektrum und Diagonalisierung	117
11. Unbeschränkte Operatoren	127
Literatur	139
Index	141

Teil A

Komplexe Analysis

1. Grundlagen der Komplexen Analysis

1.1. Wiederholung — Betrag und Topologie der komplexen Zahlen: Wir erinnern daran, dass die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} durch den Betrag $|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}$ als normierter Vektorraum geometrisch genau wie \mathbb{R}^2 aufgefasst werden kann und somit dieselben topologischen Eigenschaften und Begriffe für Teilmengen erbt, z.B. offen, abgeschlossen, beschränkt, (weg)zusammenhängend oder kompakt zu sein, und Konvergenz einer Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen $z_n \in \mathbb{C}$ gegen $z_0 \in \mathbb{C}$ bedeutet gerade $|z_n - z_0| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Für die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln

$$|z| \geq |\operatorname{Re} z|, \quad |z| \geq |\operatorname{Im} z|, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad (z, w \in \mathbb{C}),$$

woraus sich auch bequem für komplexe Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ zeigen lässt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \text{ in } \mathbb{C} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z_0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Ebenso elementar ist der Nachweis dieser Aussage: Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgt stets

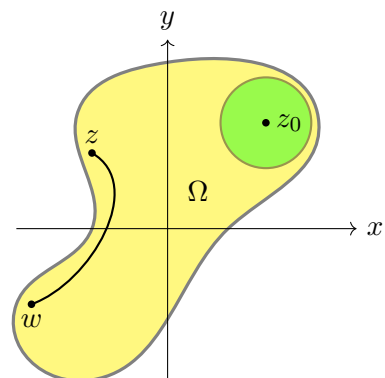
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha z_0 + \beta w_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = z_0 w_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}, \text{ falls } w_0 \neq 0, w_n \neq 0.$$

Unter einem *Gebiet* Ω in der komplexen Zahlenebene verstehen wir eine nichtleere offene wegzusammenhängende Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Im Detail heißt dies also: (a) $\Omega \neq \emptyset$, (b) für jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ gibt es einen Radius $r > 0$, sodass die offene Kreisscheibe

$$K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

zur Gänze in Ω enthalten ist, und (c) können je zwei beliebige Punkte $z, w \in \Omega$ durch einen stetigen Weg verbunden werden (d.h. es gibt ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$).



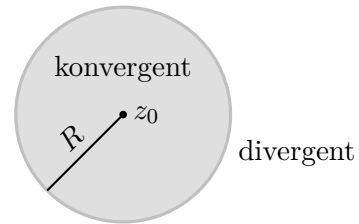
Insbesondere ist jede offene Kreisscheibe $K_r(z_0)$ selbst ein Gebiet. Gleichzeitig ist $K_r(z_0)$ eine Standardumgebung des Punktes z_0 , die oft auch mit $U_r(z_0)$ bezeichnet wird. Die Konvergenz einer Folge (z_n) gegen z_0 in \mathbb{C} bedeutet bekanntlich geometrisch ja gerade, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $z_n \in U_\varepsilon(z_0)$ für jedes $n \geq N$ gilt.

1.2. Wiederholung — Potenzreihen und Konvergenzradius im Komplexen: Für eine komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine *Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizientenfolge (a_n) . Zu jeder Potenzreihe gibt es den *Konvergenzradius* $0 \leq R \leq \infty$, wobei $R = 0$ bedeutet, dass die Potenzreihe für kein $z \neq z_0$ konvergiert, während $R = \infty$ bedeutet, dass die Potenzreihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, und für $0 < R < \infty$ gilt Folgendes:

Die Potenzreihe konvergiert für jedes $z \in K_R(z_0)$, d.h. $|z - z_0| < R$, und divergiert für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus K_R(z_0)$, d.h. $|z - z_0| > R$; für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$, also Randpunkte von $K_R(z_0)$, kann keine allgemeine Aussage getroffen werden (hier sind spezifische Untersuchungen in konkreten Fällen nötig).



Die Konvergenz der Potenzreihe ist *absolut* für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$ konvergiert in diesem Fall.

Für jedes $0 < r < R$ ist die Konvergenz der Potenzreihe *gleichmäßig* auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$, d.h. die Funktionenfolge $(s_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_m(z) := \sum_{n=0}^m a_n (z - z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig für $z \in \overline{K_r(z_0)}$.

Für die konkrete Berechnung des Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ helfen Vergleiche mit der reellen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ in Abhängigkeit von $r \geq 0$, weil R sich als Supremum über alle r ergibt, für die wir Konvergenz erhalten.

(i) Falls $a_n \neq 0$ für fast alle n gilt (also ab einem gewissen Index), können wir den Quotiententest anwenden. Für diesen untersuchen wir $|a_{n+1}| r^{n+1} / (|a_n| r^n) = r \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ und nehmen der Einfachheit halber an, dass $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert. Dann garantiert der Quotiententest Konvergenz, falls $r\alpha < 1$ gilt, und Divergenz im Falle $r\alpha > 1$. In Folge bekommen wir $R = 1/\alpha$, und zwar mit der Lesart $R = 0$ für $\alpha = \infty$ und $R = \infty$ für $\alpha = 0$. Etwas direkter ausgedrückt kommen wir mittels $1/\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ zur Formel

$$(1.1) \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

wobei wir $R = \infty$ setzen, falls die Folge auf der rechten Seite bestimmt divergent ist.

(ii) Um den Wurzeltest anzuwenden untersuchen wir $(|a_n| r^n)^{1/n} = r |a_n|^{1/n}$ und setzen nun $\alpha := \limsup |a_n|^{1/n}$. Wir erhalten wieder Konvergenz, falls $r\alpha < 1$ gilt, und Divergenz im Falle $r\alpha > 1$. Daraus folgern wir die Gültigkeit der sogenannten *Hadamard-Formel*

$$(1.2) \quad R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}},$$

wobei wir $R = \infty$ im Falle $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ setzen und $R = 0$, falls $\limsup |a_n|^{1/n} = \infty$.

(iii) Mittels der Formel in (ii) sehen wir: Falls $|b_n| = |a_n|$ für fast alle n gilt, dann hat die Potenzreihe mit Koeffizientenfolge (b_n) den gleichen Konvergenzradius R .

Beispiel: Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, also $z_0 = 0$, $a_0 = 0$ und $a_n = (-1)^{n-1}/n$ ($n \geq 1$). Beide Formeln für den Konvergenzradius sind hier sehr rasch anwendbar, weil $|a_n|/|a_{n+1}| = (n+1)/n \rightarrow 1$ bzw. $|a_n|^{1/n} = 1/n^{1/n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Also ist $R = 1$ und die Potenzreihe konvergiert auf der offenen Einheitskreisscheibe $K_1(0)$, während wir Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ garantieren können.

Was die Randpunkte von $K_1(0)$, also die Punkte auf dem Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, betrifft, ergibt sich ein gemischtes Bild: Für $z = 1$ erhalten wir mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ eine Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergent ist, während sich für $z = -1$ gerade $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$ aus der Divergenz der harmonischen Reihe ergibt. (Es lässt sich übrigens zeigen, dass diese Potenzreihe für keinen Randpunkt $z \neq 1$ konvergiert; vgl. etwa Aufgabe 2 in Abschnitt 4.2 von [RS1].)

Für reelles $x \in]-1, 1[$ ist Ihnen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ wohl schon als Taylorreihe der Funktion $f: x \mapsto \log(1+x)$ bekannt. Aus den später folgenden Resultaten über analytische Funktionen ergibt sich, dass durch die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ eine entsprechende Fortsetzung der Funktion f auf das komplexe Gebiet $K_1(0) \supseteq]-1, 1[$ gegeben ist.

1.3. Wiederholung — Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen im Komplexen:

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und eine Funktion $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, dann sagen wir, $f(z)$ habe für $z \rightarrow z_0$ den *Grenzwert* w , und schreiben

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w,$$

falls $f(z_n) \rightarrow w$ gilt für jede Folge (z_n) in $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$. Falls nun f auch in z_0 definiert ist, dann gewinnen wir daraus ein Kriterium für die *Stetigkeit* von f bei z_0 , nämlich durch die Bedingung

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Natürlich folgt im Falle $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$ auch speziell für Annäherungen $z_0 + h$ ($h \in \mathbb{R}$) parallel zur reellen Achse $\lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) = w$ bzw. für $z_0 + ih$ ($h \in \mathbb{R}$) parallel zur imaginären Achse $\lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + ih) = w$.

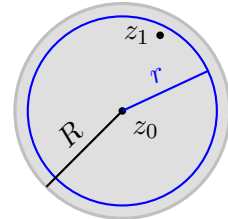
Beispiele: 1) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$, denn die bekannte Reihendarstellung $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ liefert sofort $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$ und somit für $|z| \leq 1/2$ (was für $z \rightarrow 0$ ohnehin eintritt)

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - 1 \right| = \left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - 1 \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} \\ &= |z| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^{n-2}}{n!} \leq |z| \sum_{n=2}^{\infty} |z|^{n-2} = |z| \cdot \frac{1}{1 - |z|} \leq |z| \cdot 2 \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0). \end{aligned}$$

2) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann können wir die Funktion $f: K_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

definieren. Wir erhalten also f als Limes (zunächst punktweise) der Partialsummenfolge $f_m(z) := \sum_{n=0}^m a_n(z - z_0)^n$ und wissen aus 1.2, dass f_m auf jeder kompakten Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq K_R(z_0)$ mit $0 < r < R$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Jedes f_m ist als Polynomfunktion stetig (auf ganz \mathbb{C}) und somit ist f als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen selbst stetig. Zunächst erhalten wir die Stetigkeit auf jedem $\overline{K_r(z_0)} \subseteq K_R(z_0)$ mit $0 < r < R$, aber jeder Punkt $z_1 \in K_R(z_0)$ ist in so einer abgeschlossenen Kreisscheibe enthalten (nämlich für $|z_1 - z_0| < r < R$) und daher folgt die Stetigkeit von f auf ganz $K_R(z_0)$.



Aus den Eigenschaften für konvergente komplexe Folgen ergeben sich analoge Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = u$ gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha w + \beta u, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = wu, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w|$$

sowie $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w}{u}$, falls $u \neq 0, g(z) \neq 0$.

1.4. Komplexe Differenzierbarkeit: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in \Omega$. Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* in a , falls

$$f'(a) := \frac{df}{dz}(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert. In diesem Fall heißt die Zahl $f'(a) \in \mathbb{C}$ die *Ableitung* von f bei a . Ist f in jedem Punkt $a \in \Omega$ komplex differenzierbar, so heißt f (*komplex*) *differenzierbar* und dann ist durch $a \mapsto f'(a)$ die Ableitungsfunktion $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

Die grundlegenden Eigenschaften der Ableitung folgen direkt aus jenen für Grenzwerte:

- (a) Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $a \in \Omega$, so ist f auch stetig in a .
- (b) Sind $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $a \in \Omega$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig, dann sind die Funktionen $\alpha f + \beta g$ und f/g differenzierbar in a , weiters auch f/g , falls $g(a) \neq 0$, und es gelten die üblichen Rechenregeln

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a), \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

und $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

- (c) Sind $\Omega_j \subseteq \mathbb{C}$ ($j = 1, 2$) Gebiete, $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ differenzierbar in $a \in \Omega_1$ und $f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $g(a)$, dann ist $f \circ g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in a und es gilt die Kettenregel

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Als elementarste **Beispiele** mit beliebig gegebenen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ sind folgende Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ überall differenzierbar: Die konstante Funktion $z \mapsto a_0$ mit Ableitung

0, die lineare Abbildung $z \mapsto a_1 z$ mit konstanter Ableitung a_1 und die Polynomfunktion $p: z \mapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$ mit $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + m a_m z^{m-1}$.

Als Abbildung $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist $z \mapsto 1/z$ differenzierbar mit $(1/z)' = -1/z^2$. Und $z \mapsto e^z$ ist als Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar mit

$$(e^z)' = \lim_{w \rightarrow z} \frac{e^w - e^z}{w - z} = e^z \lim_{w \rightarrow z} \frac{e^{w-z} - 1}{w - z} = e^z \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

1.5. Holomorphe Funktionen: Wir nennen¹ eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ *holomorph* auf dem Gebiet Ω , falls sie komplex differenzierbar in jedem Punkt von Ω ist und die Ableitungsfunktion $z \mapsto f'(z)$ stetig $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist. Analog zu den Eigenschaften in 1.4 überträgt sich Holomorphie auch auf Linearkombinationen, Produkte, Quotienten und Verknüpfungen von Funktionen.

Wir können eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stets punktweise mittels Real- und Imaginärteil aufspalten in $f(x + iy) = \operatorname{Re} f(x + iy) + i \operatorname{Im} f(x + iy)$ mit eindeutigen $x, y \in \mathbb{R}$ für $z = x + iy \in \Omega$. Wenn wir Ω mittels $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\}$ auch als Teilmenge von \mathbb{R}^2 auffassen, dann können wir die reellwertigen Funktionen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definieren durch $u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$ und erhalten

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (x + iy \in \Omega).$$

Nun lässt sich direkt ein Zusammenhang zwischen der Holomorphie von f mit der reellen Differenzierbarkeit von u und v herstellen.

Satz: Die komplexe Funktion f ist genau dann holomorph, wenn beide Funktionen u und v im Sinne der reellen Differentialrechnung C^1 -Funktionen sind, die zusätzlich auf Ω auch die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*

$$(1.3) \quad \partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_x v = -\partial_y u$$

erfüllen. In diesem Fall gilt außerdem

$$(1.4) \quad f'(x + iy) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) = \partial_y v(x, y) - i \partial_y u(x, y) \quad (x + iy \in \Omega).$$

Beweis: Die Beweisidee steckt in folgender Rechnung mit reellen partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} (1.5) \quad \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+iy+h) - f(x+iy)}{h} = \lim_{ih \rightarrow 0} \frac{f(x+iy+ih) - f(x+iy)}{ih} \\ &= \frac{1}{i} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h} \right) = -i \partial_y u(x, y) + \partial_y v(x, y). \end{aligned}$$

¹Im Vergleich zu Standard-Lehrbüchern der Komplexen Analysis bzw. Funktionentheorie verlangen wir hier mit der Zusatzbedingung der Stetigkeit von $z \mapsto f'(z)$ beim Begriff der Holomorphie zunächst mehr als üblich. Es stellt sich dann aber im Rahmen der umfangreicheren Theorie heraus, dass jede auf ganz Ω komplex differenzierbare Funktion automatisch dort sogar unendlich oft komplex differenzierbar sein muss, womit insbesondere die Stetigkeit der ersten Ableitung also implizit bereits gilt.

Falls f differenzierbar ist, sind beide Ausdrücke in der zweiten Zeile gleich $f'(x + iy)$ und es folgt weiterhin zwingend $\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y)$ und $\partial_x v(x, y) = -\partial_y u(x, y)$, d.h. (1.3) sowie auch Gleichung (1.4). Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$ folgt somit aus der Stetigkeit von f' .

Nehmen wir andererseits an, u und v seien beide C^1 und erfüllen (1.3). Dann folgt bei Lesart für (1.5) jeweils von außen nach innen in der zweiten Zeile also die Existenz und Gleichheit der beiden Limiten für die Differenzenquotienten von f entlang reeller und rein imaginärer Strecken. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir zunächst mit $\beta(x + iy)$. Mit $z = x + iy$ und $(r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit hinreichend kleiner Norm erhalten wir auf Grund der Differenzierbarkeit von u und v die Darstellung

$$\begin{aligned} f(z + r + is) - f(z) &= u(x + r, y + s) - u(x, y) + i(v(x + r, y + s) - v(x, y)) \\ &= \partial_x u(x, y)r + \partial_y u(x, y)s + g_1(r, s) + i(\partial_x v(x, y)r + \partial_y v(x, y)s + g_2(r, s)) \end{aligned}$$

mit Fehlerfunktionen g_1 und g_2 , sodass $\lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{|g_1(r,s)| + |g_2(r,s)|}{\sqrt{r^2 + s^2}} = 0$ gilt. Wir können $g(r + is) := g_1(r, s) + ig_2(r, s)$ setzen, dann gilt mittels $w = r + is$ also $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|g(w)|}{|w|} = 0$ und wir erhalten in obiger Gleichung

$$\begin{aligned} f(z + r + is) - f(z) &= \underbrace{(\partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y)) r}_{\beta(x+iy)} + \underbrace{(-i \partial_y u(x, y) s + \partial_y v(x, y)) is}_{\beta(x+iy)} + g(r + is) \\ &= \beta(x + iy)(r + is) + g(r + is). \end{aligned}$$

Daraus folgt nun mit $z = x + iy$ und $w = r + is$ die komplexe Differenzierbarkeit von f bei z sowie

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z + w) - f(z)}{w} = \beta(x + iy).$$

Diese Gleichung zeigt schließlich auch die Stetigkeit von f' , weil gemäß (1.5) z.B. $\beta(x + iy) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y)$ gilt und diese partiellen Ableitungen nach Voraussetzung stetig sind. \square

1.6. Komplexe Kurvenintegrale: Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Für eine C^1 -Kurve $t \mapsto z(t)$, die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist und in Ω verläuft, d.h. $z(t) \in \Omega$ für alle $t \in I$, und eine holomorphe Funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ können wir $\frac{d}{dt}(F(z(t)))$ einfach nach der Kettenregel berechnen, wofür wir zwischendurch $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ und $z(t) = x(t) + iy(t)$ setzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F(z(t))) &= \frac{d}{dt}(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) \\ &= \partial_x u(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + \underbrace{\partial_y u(x(t), y(t))}_{-\partial_x v(x(t), y(t))} \dot{y}(t) + i \left(\partial_x v(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + \underbrace{\partial_y v(x(t), y(t))}_{\partial_x u(x(t), y(t))} \dot{y}(t) \right) \\ &= (\partial_x u + i \partial_x v)(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + i (\partial_x u + i \partial_x v)(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \\ &= (\partial_x u + i \partial_x v)(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x} + i \dot{y})(t) = F'(z(t)) \cdot \dot{z}(t), \end{aligned}$$

also ist der Tangentialvektor der Kurve $t \mapsto F(z(t))$, $I \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch $F'(z(t)) \dot{z}(t)$.

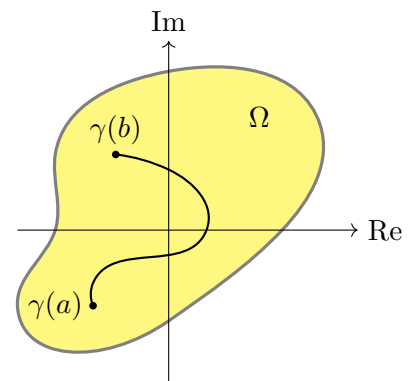
Wir weiten zuerst das Integral von stückweise stetigen Funktionen über ein reelles Intervall $[a, b]$ auf den Fall komplexwertiger Funktionen $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ aus, indem wir einfach

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t) dt$$

setzen. (Hier sollen also $\operatorname{Re} g$ und $\operatorname{Im} g$ stückweise stetige Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sein.) Für das Beispiel der obigen Situation mit $g(t) := F'(z(t))\dot{z}(t)$ erhalten wir auf diese Art direkt

$$(1.6) \quad \int_a^b F'(z(t))\dot{z}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(z(t))) dt = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Modelliert an der obigen Situation können wir das *komplexe Kurvenintegral* einer stetigen Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ entlang einer stückweise glatten Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$, in Ω , d.h. mit $\gamma([a, b]) \subseteq \Omega$, definieren. Wir bemerken zunächst, dass die Real- und Imaginärteile der Abbildung $t \mapsto f(z(t))\dot{z}(t)$ stückweise stetig sind und setzen



$$(1.7) \quad \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t) dt.$$

Wir erhalten unmittelbar die Eigenschaften der Linearität ($g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g)(z) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

sowie, im Falle $|f(z(t))| \leq M$ für alle $t \in [a, b]$, die grundlegende Abschätzung

$$(1.8) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma),$$

wobei $L(\gamma)$ die Kurvenlänge von γ bezeichnet, also $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{z}(t)| dt$.

Wenn $C := \gamma([a, b])$ das Kurvenbild in Ω ist, dann schreiben wir oft auch etwas salopp

$$\int_C f(z) dz := \int_{\gamma} f(z) dz,$$

obwohl hierfür die Parametrisierung von C durch $t \mapsto \gamma(t)$ maßgeblich ist. Wir werden ab nun oft auch nur einfach von Kurven oder Wegen sprechen, obwohl wir meistens stückweise glatte Kurven meinen.

Beispiel: Bezeichne $C_r(z_0)$ die Kreislinie mit Radius $r > 0$ um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, also den Rand von $K_r(z_0) = U_r(z_0)$, mit der Standardparametrisierung

$$t \mapsto z(t) = z_0 + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Wegen $\frac{d}{dt}e^{it} = \frac{d}{dt}(\cos t + i \sin t) = -\sin t + i \cos t = ie^{it}$ ist $\dot{z}(t) = rie^{it}$. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ erhalten wir somit

$$\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} (z(t) - z_0)^m \dot{z}(t) dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^m rie^{it} dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{it(m+1)} dt,$$

was sich im Falle $m \neq -1$ zu

$$\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^m dz = ir^{m+1} \left(\int_0^{2\pi} \cos((m+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \sin((m+1)t) dt \right) = ir^{m+1}(0 + i0) = 0$$

ergibt, während für $m = -1$ die Auswertung

$$\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^{-1} dz = ir^0 \int_0^{2\pi} e^{it0} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$$

liefert. Wir fassen zusammen:

$$(1.9) \quad \int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{für } m \in \mathbb{Z}, m \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } m = -1. \end{cases}$$

1.7. Stammfunktionen: Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf dem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit den reellen Funktionen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ eine stückweise glatte Kurve in Ω mit $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$. Dann können wir das komplexe Kurvenintegral von f entlang γ auf zwei reelle Kurvenintegrale über Vektorfelder im \mathbb{R}^2 zurückführen:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) \cdot (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) \dot{x}(t) - v(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + i(v(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + u(x(t), y(t)) \dot{y}(t))) dt \\ &= \int_a^b \left(\left\langle \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ -v(x(t), y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} v(x(t), y(t)) \\ u(x(t), y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \right) dt = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir können aus dieser Gleichung $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ zwei interessante Schlüsse ziehen:

(a) $\int_{\gamma} f$ ist wegunabhängig $\iff \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ sind wegunabhängig.

In diesem Fall erhalten wir Stammfunktionen (Potentiale) φ für $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und ψ für $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ durch Integration jeweils von einem fixen Punkt $z_0 \in \Omega$ aus nach $z = x + iy \in \Omega$ entlang eines beliebigen Weges γ_z in Ω mittels

$$\varphi(x, y) := \int_{\gamma_z} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, \quad \psi(x, y) := \int_{\gamma_z} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $\varphi, \psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sind C^1 und erfüllen die Cauchy-Riemann-Gleichungen, denn

$$\partial_x \varphi = u = \partial_y \psi \quad \text{und} \quad \partial_x \psi = v = -\partial_y \varphi.$$

Somit ist die Funktion

$$F(z) = F(x + iy) := \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$$

holomorph und es gilt

$$F'(z) = F'(x + iy) = \partial_x \varphi(x, y) + i \partial_x \psi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(x + iy) = f(z),$$

d.h. F ist eine *Stammfunktion* für f im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit.

(b) Die Cauchy-Riemann-Gleichungen zeigen: Die Funktion $f = u + iv$ ist holomorph \iff die C^1 -Vektorfelder $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ erfüllen die Integrabilitätsbedingungen.

Ist nun Ω zusätzlich einfach zusammenhängend² — oder spezieller sternförmig³ oder diffeomorphes Bild einer sternförmigen offenen Menge —, dann folgt also aus der Holomorphie von f , dass $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ Stammfunktionen besitzen und somit wie oben, dass f eine Stammfunktion hat und weiters auch Integrale von f über geschlossene Kurven in Ω verschwinden. Wir dürfen also festhalten:

Ist Ω einfach zusammenhängend und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann besitzt f eine Stammfunktion und es gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede geschlossene Kurve γ in Ω .

1.8. Zweige des Logarithmus und der Quadratwurzel: Wir erinnern zunächst an die grundlegenden Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ und $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ für $z = x + iy$. Speziell gilt $|e^z| = e^x$ und $\operatorname{Re} e^{iy} = \cos y$ und $\operatorname{Im} e^{iy} = \sin y$.

Wenn wir für $w = u + iv$ die Gleichung $e^z = e^w$ betrachten, dann ist diese also gleichbedeutend mit $x = u$ und $y = v + 2\pi n$ für ein gewisses $n \in \mathbb{Z}$; mit anderen Worten

$$e^z = e^w \iff \exists n \in \mathbb{Z}: z = w + 2\pi in.$$

Also ist \exp als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nicht injektiv — im Unterschied zur Einschränkung auf \mathbb{R} !

Wir können dennoch versuchen, wenigstens auf Teilgebieten von \mathbb{C} Umkehrfunktionen zur Exponentialfunktion zu konstruieren und kommen so zum Begriff eines *Zweiges des komplexen*

²Zur Erinnerung: Geschlossene Kurven in Ω können innerhalb Ω stetig auf Punkte zusammengezogen werden.

³Zur Erinnerung: Es gibt einen Punkt in Ω , von dem aus alle anderen Punkte in Ω durch Strecken innerhalb Ω erreicht werden können.

Logarithmus: Unter so einem verstehen wir eine holomorphe Funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft

$$(\exp \circ F)(z) = e^{F(z)} = z \quad (z \in \Omega).$$

Durch Differenzieren erhalten wir als unmittelbare Konsequenz $1 = F'(z)e^{F(z)} = F'(z)z$, also die Gleichung

$$F'(z) = \frac{1}{z} \quad (z \in \Omega).$$

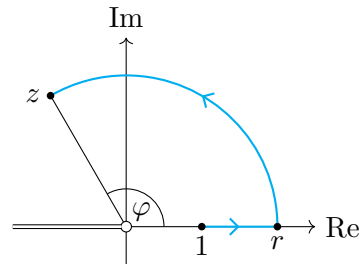
Wegen der oben festgestellten Periodizität von \exp bemerken wir auch sofort, dass mit F auch jede der Funktionen $F + 2\pi in$ für $n \in \mathbb{Z}$ ein weiterer Zweig des Logarithmus ist.

Wir definieren den *Hauptzweig des Logarithmus* auf der sogenannten geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^- := \{re^{i\phi} \in \mathbb{C} \mid r > 0, -\pi < \phi < \pi\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \text{ falls } \operatorname{Im} z = 0\}$ mittels

$$\log z := F(z) := \int_{\gamma} \frac{dw}{w},$$

wobei γ eine beliebige Kurve von 1 nach z innerhalb \mathbb{C}^- ist. Wir erhalten dadurch $F(1) = 0$.

Beispiel: Wählen wir speziell für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}^-$, $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$, den Weg γ zunächst entlang der reellen Achse von 1 nach r und gehen von dort weiter entlang des Kreisbogens mit Winkel φ und Radius r um den Mittelpunkt 0 nach $z = re^{i\varphi}$.



Dann ist leicht nachzurechnen (vgl. PUE), dass wir folgende konkrete Formel erhalten

$$\log z = F(z) = \log r + i\varphi \quad (z \in \mathbb{C}^-).$$

Als Anwendung des Hauptzweiges $\log z$ und des Nebenzweiges $\log z + 2\pi i$, die beide auf der geschlitzten Ebene \mathbb{C}^- definiert sind, können wir die beiden holomorphen Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, die durch

$$f_1(z) := e^{\frac{1}{2} \log z} \quad \text{und} \quad f_2(z) := -e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\log z + 2\pi i)}$$

gegeben sind. Sie erfüllen $f_j(z)^2 = e^{2 \cdot \frac{1}{2} \log z} = e^{\log z} = z$ und werden daher als *Zweige der komplexen Quadratwurzel* bezeichnet. Es lässt sich zeigen (vgl. PUE), dass dies die einzigen zwei holomorphen Funktionen auf \mathbb{C}^- mit dieser Eigenschaft sind. Bei Verwendung der symbolischen Notation \sqrt{z} muss im Prinzip stets angegeben werden, auf welchem Teilgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ diese Wurzel definiert sein soll und um welchen Zweig es sich handelt; im Falle $\Omega = \mathbb{C}^-$ kommt dann z.B. nur $\sqrt{z} := f_1(z)$ oder $\sqrt{z} := f_2(z)$ in Frage.

1.9. Kurvenintegral und Folgenkonvergenz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir nennen eine Folge $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) von stetigen Funktionen *kompakt konvergent* gegen die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ die Folge (f_n) auf K gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h.

$$\|f - f_n\|_K := \sup\{|f(z) - f_n(z)| \mid z \in K\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(Wegen der Kompaktheit von K und der Stetigkeit von $f - f_n$ ist das Supremum für jedes n endlich.) Damit folgt natürlich speziell die punktweise Konvergenz $f_n(z) \rightarrow f(z)$ für jedes $z \in \Omega$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz auf jedem Kompaktum folgt automatisch die Stetigkeit der Grenzfunktion f , weil ein gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen immer stetig ist.

Somit ist auch das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z) dz$ über eine beliebige stückweise glatte Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ definiert. Die Kompaktheit von $K := \gamma([a, b])$ zusammen mit der grundlegenden Abschätzung (1.8) ergibt nun

$$\left| \int_\gamma f(z) dz - \int_\gamma f_n(z) dz \right| = \left| \int_\gamma (f(z) - f_n(z)) dz \right| \leq \|f - f_n\|_K \cdot L(\gamma) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

womit wir den folgenden Satz bewiesen haben.

Satz: Sei $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge stetiger Funktionen, die kompakt konvergent gegen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist. Dann ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und es gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma f_n(z) dz$$

für jeden stückweise glatten Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$.

Wir können davon gleich eine entscheidende **Anwendung auf Potenzreihen** machen: Wir betrachten eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und setzen

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

für $z \in K_R(z_0)$. Jedes Kompaktum $K \subseteq K_R(z_0)$ ist in einer kompakten Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)}$ mit geeignetem $0 < r < R$ enthalten und f ist darauf der gleichmäßige Limes der Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$. Alle beteiligten Funktionen sind stetig und wir haben kompakte Konvergenz. Die gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1}$ hat denselben Konvergenzradius R und obige Überlegungen gelten völlig analog; ebenso auch für höhere gliedweise Ableitungen der Potenzreihe wie $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(z - z_0)^{k-2}$ etc.

Daraus folgt nun für jede Kurve von z_0 nach z in $K_R(z_0)$ mit dem obigen Satz

$$f(z) - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \int_\gamma (w - z_0)^{k-1} dw = \int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (w - z_0)^{k-1} dw,$$

d.h. links steht eine Stammfunktion für den Integranden ganz rechts, mit anderen Worten

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Natürlich gilt auch

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(z-z_0)^{k-2}$$

und so weiter. Insbesondere sehen wir, dass f unendlich oft komplex differenzierbar ist.

1.10. Analytische Funktionen: Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, falls es zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Kreisscheibe $K_R(z_0) \subseteq \Omega$ gibt, auf der f als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

dargestellt werden kann. Wie wir in der Anwendung in 1.9 gerade gesehen haben, gilt:

Jede analytische Funktion ist unendlich oft komplex differenzierbar.

Die Ableitungen von f lassen sich in obiger Darstellung auf $K_R(z_0)$ einfach durch gliedweise Differentiation gewinnen, d.h.

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(z-z_0)^{k-n},$$

was für $z = z_0$ speziell auf die Gleichung

$$(1.10) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

führt. Somit sind die Koeffizienten der Potenzreihendarstellung um z_0 eindeutig bestimmt.

Beispiele: 1) Für beliebiges festes $w \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf der punktierten komplexen Ebene $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{w\}$, gegeben durch $f(z) := 1/(w-z)$. Für $z_0 \in \Omega$ setzen wir $R := |w-z_0| > 0$ und berechnen für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < R$ die folgende Potenzreihendarstellung mittels geometrischer Reihe

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{(w-z_0)^{n+1}}}^{a_n} (z-z_0)^n.$$

Also ist f analytisch auf Ω .

2) Die komplexe Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$ ist analytisch auf \mathbb{C} , denn für beliebige $z_0, z \in \mathbb{C}$ gilt mit $R = \infty$ die Entwicklung

$$e^z = e^{z_0} e^{z-z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} (z-z_0)^n.$$

Der folgende Identitätssatz für analytische Funktionen wirkt sehr plausibel, wenn wir uns Potenzreihen als Limes von Polynomen vorstellen und daran erinnern, dass Polynomfunktionen vom Grad m schon durch Kenntnis der Werte an $m+1$ verschiedenen Stellen bereits festgelegt sind. (Ein Beweis des Satzes findet sich z.B. in [FK1, §27, Abschnitt 3].)

Identitätssatz: Seien $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in \Omega$ und (z_n) eine Folge in Ω mit $z_n \neq z_0$ ($n \in \mathbb{N}$), $f(z_n) = g(z_n)$, $z_n \rightarrow z_0$, dann folgt $f = g$.

Eine unmittelbare Folgerung ist beispielsweise die Eigenschaft, dass eine analytische Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, die nicht die Nullfunktion ist, in jedem Kompaktum $K \subseteq \Omega$ höchstens endlich viele Nullstellen haben kann. (Denn eine Folge von unendlich vielen verschiedenen Nullstellen z_n in K , $n \in \mathbb{N}$, hätte einen Häufungswert $z_0 \in K$ und somit wäre der Identitätssatz mit $g = 0$ anwendbar.)

Für eine Nullstelle $z_0 \in \Omega$ einer analytischen nichtkonstanten Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ lassen sich aus der Potenzreihendarstellung um z_0 direkt Eigenschaften analog zu jenen bei Polynomfunktionen herleiten: Es gibt eine eindeutige Zahl $k \in \mathbb{N}$, die *Ordnung der Nullstelle*, sodass in einer Umgebung U von z_0 mit einer holomorphen Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ die Faktorisierung

$$(1.11) \quad f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

gilt. Die Ordnung k ist konkret bestimmt durch die Bedingungen

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

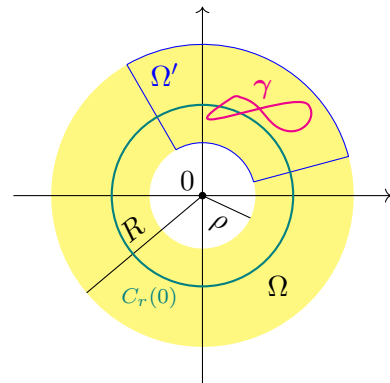
(Wegen $f(z_0) = 0$ ist automatisch $k \neq 0$; und $k \neq \infty$ gilt, weil f keine konstante Funktion ist.)

1.11. Integralsatz von Cauchy, Homologie und Homotopie: Wenn f auf dem Gebiet Ω holomorph ist und γ eine geschlossene Kurve, die in einem einfach zusammenhängenden Teilgebiet $\Omega' \subseteq \Omega$ enthalten ist (γ wird auch *einfach gelagert* genannt), dann folgt aus dem Resümee in 1.7 unmittelbar

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dies ist eine einfache Versionen des sogenannten *Cauchyschen Integralsatzes*, von dem auch mehr geometrisch-topologische Fassungen existieren (vgl. z.B. [FK1, §27, Abschnitt 4], [KvW, Abschnitt 14.5] oder [RS2, Abschnitt 8.1]).

Beispiel: Die Funktion $z \mapsto 1/z$ ist holomorph auf dem offenen Kreisring $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \rho < |z| < R\}$ mit dem äußeren Radius $R > 0$ und dem inneren Radius $0 < \rho < R$. Für $\rho < r < R$ ist die Kreislinie $C_r(0)$ eine geschlossene Kurve in Ω , aber nicht einfach gelagert. Es ist auch bekanntlich $\int_{C_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$. Ist allerdings γ eine geschlossene Kurve, die in einen Kreisringsektor $\Omega' \subseteq \Omega$ (wie in der nebenstehenden Skizze) passt, dann ist γ einfach gelagert und es ergibt sich $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0$.



Bemerkung: Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und z_0 ein Punkt, der nicht auf γ liegt, also $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, dann heißt

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Umlaufzahl (oder *Index*) von γ bezüglich z_0 . Wie sich zeigen lässt, ist $n(\gamma, z_0)$ tatsächlich ganzzahlig und erfüllt Eigenschaften, die wir intuitiv von so einem Begriff erwarten würden (siehe z.B. [RS1, Abschnitt 9.5.1]).

Wir formulieren nun eine etwas vereinfachte sogenannte Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes (ohne Beweis), wofür wir zwei Begriffe einführen.

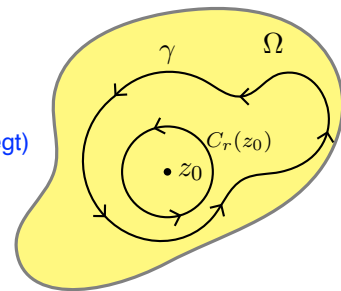
Definition: (i) Zwei geschlossene Wege γ_1 und γ_2 in Ω heißen *homolog*, falls für jede holomorphe Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

(ii) Eine geschlossene Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ umläuft den Punkt z_0 *einfach positiv*, wenn für die um z_0 verschobene Kurve α mit $\alpha(t) := \gamma(t) - z_0$ ($a \leq t \leq b$) gilt: 1. Jeder von 0 ausgehende Strahl trifft das Kurvenbild $\alpha([a, b])$ für genau ein $t \in [a, b]$, 2. Die Polarwinkelwerte von $\alpha(t)$ sind nichtfallend als Funktion von t .

Cauchyscher Integralsatz (Homologieversion): Sei $z_0 \in \Omega$ und f eine holomorphe Funktion auf dem punktierten Gebiet $\Omega \setminus \{z_0\}$. Falls γ eine geschlossene Kurve in $\Omega \setminus \{z_0\}$ ist, die z_0 einfach positiv umläuft, dann gilt für kleine Radien $r > 0$ stets (sodass $C_r(z_0)$ im Inneren von γ liegt)

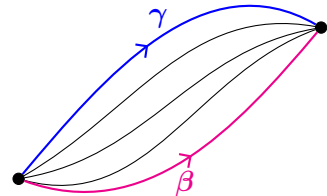
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_r(z_0)} f(z) dz.$$



Mit anderen Worten sind γ und $C_r(z_0)$ homolog.

Wir wollen abschließend die sogenannte Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes erwähnen. Dafür beschreiben wir den Begriff der *Homotopie* von Kurven nur anschaulich.

Zwei Kurven β und γ in einem Gebiet Ω heißen *homotop* (bei festen Endpunkten), wenn sich innerhalb Ω die eine stetig in die andere deformieren lässt. Das kann durch eine parametrisierte $(\alpha_s)_{0 \leq s \leq 1}$ Schar von „Zwischenkurven“ (mit fixen Anfangs- und Endpunkten) beschrieben werden, die $\alpha_0 = \beta$ und $\alpha_1 = \gamma$ erfüllen.



Für *geschlossene Kurven* wird meistens doch erlaubt, dass der Anfangspunkt (gleich Endpunkt) während der Homotopie „wandert“, also auch die Ausgangskurven nicht mehr durch denselben Punkt gehen müssen. Diese Kurven werden dann *frei homotop* genannt. Eine geschlossene Kurve heißt *nullhomotop*, falls sie frei homotop zu einer einpunktigen (konstanten) Kurve ist. Ein Gebiet Ω ist also genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop ist.

Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversion): Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet Ω und β, γ Kurven in Ω , die homotop sind (bei festen Endpunkten), dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz.$$

Insbesondere sind die Kurven β und γ auch homolog. Im Falle geschlossener Kurven gilt dieser Satz auch, wenn β und γ frei homotop sind.

(Es gibt nullhomologe Kurven, die nicht nullhomotop sind, vgl. [RS2,8.1.3])

1.12. Cauchysche Integralformel für Kreise und einfach positiv umlaufende Wege:

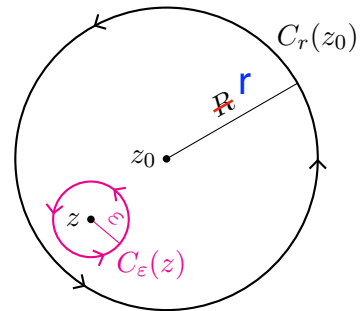
Ist f holomorph auf dem Gebiet Ω , $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so, dass $\overline{K_r(z_0)} \subseteq \Omega$, dann gilt

$$(1.12) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \in K_r(z_0)).$$

Die Werte von f in $K_r(z_0)$ sind also bereits festgelegt durch jene auf dem Rand $C_r(z_0)$.

Beweis: Für $z \in K_r(z_0)$ können wir ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ wählen, sodass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K_\varepsilon(z)}$ ganz in $K_r(z_0)$ enthalten ist. In $\Omega \setminus \{z\}$ ist die Funktion $w \mapsto 1/(w-z)$ holomorph und $C_r(z_0)$ und $C_\varepsilon(z)$ sind nach dem Integralsatz von Cauchy homolog, d.h. wir kommen mittels (1.9) zum Zwischenresultat

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{dw}{w-z} = \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i.$$



Daraus folgt zunächst

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) = \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{C_r(z_0)} \frac{1}{w-z} dw = \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw.$$

Nun ist auch $w \mapsto \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ holomorph in $\Omega \setminus \{z\}$, sodass wir wiederum die Homologie von $C_r(z_0)$ und $C_\varepsilon(z)$ anwenden können. Wir bekommen also

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) = \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw.$$

Wegen der Holomorphie von f ist sicherlich f' stetig und für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und $|w-z| \leq \varepsilon$ gilt $f(w) - f(z) = f'(w)(w-z) + h(w)$ mit $\lim_{w \rightarrow z} h(w)/(w-z) = 0$, also $|h(w)| \leq d|w-z|$ für eine Konstante $d > 0$. Somit können wir den obigen Integranden mittels $\|f'\| := \sup\{|f'(w)| \mid w \in \overline{K_\varepsilon(z)}\}$ abschätzen durch

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w-z} \right| \leq \frac{|f'(w)||w-z| + |h(w)|}{|w-z|} \leq \frac{(\|f'\| + d)|w-z|}{|w-z|} \leq \|f'\| + d =: M$$

und erhalten aus der grundlegenden Integralabschätzung insgesamt

$$\left| \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right| \leq M \cdot L(C_\varepsilon(z)) = M2\pi\varepsilon.$$

Weil wir aber $\varepsilon > 0$ beliebig klein machen dürfen, ist schließlich

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Ähnlich wie auch schon beim Cauchyschen Integralsatz lässt sich auch Formel (1.12) auf allgemeinere Situationen erweitern (ohne Beweis), indem wir die Homologie zwischen einer den Punkt z einfach positiv umlaufenden Kurve γ mit einem geeigneten Kreis $C_\varepsilon(z)$ ausnützen.

Satz: Sei γ eine geschlossene Kurve im Gebiet Ω , die jeden von ihr umschlossenen Punkt z einfach positiv umläuft und so, dass jeder dieser inneren Punkte z auch zu Ω gehört. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ die Cauchy-Formel

$$(1.13) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

1.13. Holomorphe Funktionen sind analytisch: Speziell folgt aus dem hier angekündigten Resultat auch, dass holomorphe Funktionen unendlich oft komplex differenzierbar sind.

Satz: Ist f holomorph auf dem Gebiet Ω , $z_0 \in \Omega$ und $R_0 := \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ (Abstand von z_0 zum Rand von Ω), dann gibt es eine Potenzreihenentwicklung von f um z_0 in der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die zumindest für $|z - z_0| < R_0$ konvergiert. Für $0 < r < R_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gelten die *Cauchy-Formeln*

$$(1.14) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Beweisskizze: Die Cauchysche Integralformel (1.12) erlaubt für $\overline{K_r(z_0)} \subseteq \Omega$ den Beginn der folgenden Berechnung, wo wir im zweiten Schritt die Reihenentwicklung aus 1.10, Beispiel 1), anwenden (für $|z - z_0| < r = |w - z_0|$):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw}^{a_n}. \end{aligned}$$

Vertauschung von Integration und Summation im dritten Schritt lässt sich rechtfertigen, weil die Reihe als Funktion von w gleichmäßig auf der kompakten Kreislinie $C_r(z_0)$ konvergiert. \square

Wir können als Folgerungen nun also auch den **Identitätssatz** für analytische Funktionen direkt übertragen: Sind $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$ und ist (z_n) eine Folge in Ω mit $z_n \neq z_0$ ($n \in \mathbb{N}$), $f(z_n) = g(z_n)$, $z_n \rightarrow z_0$, dann folgt $f = g$. Das ist insbesondere in einer Situation anwendbar, wo f und g entlang eines Kurvenstückes γ in Ω übereinstimmen, das nicht nur aus einem Punkt besteht.

Das führt uns zu folgenden Beobachtungen bzgl. **komplexer analytischer Fortsetzungen** von bekannten reellen Funktionen, weil diese Funktionen auf der reellen Achse oder zumindest nichtleeren Intervallen darin festgelegt sind:

(a) Die Formel $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ war tatsächlich die einzige Möglichkeit, die reelle Exponentialfunktion als holomorphe Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fortzusetzen. Wir erinnern auch an die Konsequenz

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

(b) Die aus dem Reellen bekannten Potenzreihen für die Winkelfunktionen \cos und \sin haben beide Konvergenzradius $R = \infty$ und ergeben die analytischen Fortsetzungen zu Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(1.15) \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

und

$$(1.16) \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Der Identitätssatz impliziert auch sehr rasch, dass die üblichen Additionstheoreme und Relationen gelten, wie z.B. $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, $\cos(z + 2\pi n) = \cos z$ für $n \in \mathbb{Z}$ etc.

(c) Für den Hauptzweig \log des Logarithmus gilt auf dem Einheitskreis $|z| < 1$ die Entwicklung

$$(1.17) \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

denn beide Seiten obiger Gleichung sind holomorph in $K_1(0)$ und stimmen für reelle $x \in]-1, 1[$ jeweils mit dem Wert $\log(1+x)$ der entsprechenden reellen Funktion $] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ überein.

Bemerkungen: (i) Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wird *ganz (analytisch)* genannt, falls sie holomorph ist, wie z.B. \exp , \cos , \sin oder Polynomfunktionen es sind.

(ii) Durch Abschätzungen der Potenzreihenkoeffizienten a_n aus den Cauchy-Formeln (1.14) lässt sich der folgende *Satz von Liouville* zeigen: Ist $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und beschränkt, dann muss f konstant sein ([FK1, §27, 6.3]).

Als Folgerung kann der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra gezeigt werden, nämlich, dass nichtkonstante komplexe Polynomfunktionen stets Nullstellen besitzen ([FK1, §27, 6.4]).

1.14. Eine Art „Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes“: Nehmen wir an, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion auf dem Gebiet Ω und hat die zusätzliche Eigenschaft, dass $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ gilt für jeden geschlossenen einfach gelagerten Weg γ in Ω .

Jede offene Kreisscheibe $K_r(z_0) \subseteq \Omega$ ist einfach zusammenhängend und daher jede geschlossene Kurve γ in $K_r(z_0)$ auch einfach gelagert. Folglich hat f nach 1.7(a) eine holomorphe Stammfunktion F auf $K_r(z_0)$. Gemäß 1.13 ist F und somit auch $f = F'$ unendlich oft komplex differenzierbar, speziell also f holomorph auf $K_r(z_0)$. Wir haben somit das folgende Resultat bewiesen.

Satz von Morera: Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede geschlossene einfach gelagerte Kurve γ in Ω , dann ist f holomorph.

Durch geschickte Kombination (vgl. [FK1, §27, 7.3]) des Cauchyschen Integralsatzes, des Satzes von Morera, der Vertauschbarkeit von Kurvenintegral und Limes bei kompakter Konvergenz (siehe 1.9) und den Cauchy-Formeln (1.14) könnten wir von hier aus noch ohne große Mühe das folgende Resultat erreichen.

Konvergenzsatz von Weierstraß: Ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von holomorphen Funktionen auf dem Gebiet Ω kompakt konvergent gegen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, dann ist f holomorph und es gilt auch, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge der k -ten Ableitungen $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ auf Ω kompakt konvergent gegen die k -te Ableitung $f^{(k)}$ ist.

In der Rückschau können wir die Gleichwertigkeit folgender Konzepte aus diesem Kapitel für eine stetige Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet Ω festhalten:

- f ist holomorph (bzw. in jedem Punkt von Ω komplex differenzierbar),
- f ist analytisch,
- $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit C^1 -Funktionen u und v , die die Cauchy-Riemann-Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$ erfüllen,
- $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede geschlossene einfach gelagerte Kurve γ in Ω .

2. Singularitäten und Residuenkalkül

2.1. Arten von isolierten Singularitäten: Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt *isolierte Singularität* der Funktion f , falls f holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$ ist, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Umgebung von z_0 ist.

Definition: Eine isolierte Singularität z_0 der Funktion f heißt

(i) *hebbbar*, wenn es eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, sodass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ gilt;

(ii) *Pol*, wenn es ein $R > 0$ gibt, sodass f holomorph ist auf der punktierten Kreisscheibe $K_R(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ und $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ gilt;

(iii) *wesentliche Singularität*, falls z_0 weder hebbbar noch ein Pol ist.

Bemerkung: Ein Pol kann keine hebbare Singularität sein, weil eine holomorphe Funktion g wie in (i) in einer kleinen kompakten Kreisscheibe um z_0 sicherlich beschränkt bleibt.

Beispiele: 1) $z_0 = 1$ ist eine hebbare Singularität von $\frac{z^3-1}{z-1}$, denn

$$\frac{z^3 - 1}{z - 1} = \frac{(z - 1)(z^2 + z + 1)}{z - 1} = z^2 + z + 1$$

und die Funktion $z \mapsto z^2 + z + 1$ ist holomorph auf \mathbb{C} .

2) $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität des *Sinus Cardinalis*

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} =: \text{sinc}(z),$$

weil $\text{sinc}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch (somit holomorph) auf \mathbb{C} ist; es ergibt sich $\text{sinc}(0) = 1$.

3) $z_0 = 0$ ist ein Pol von $\frac{1}{z}$, denn diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{|z|} = \infty$.

4) Für die Funktion $f(z) := e^{1/z}$ ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität: Zunächst ist 0 eine isolierte Singularität, weil f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Sie ist nicht hebbbar, weil f unbeschränkt ist nahe 0, z.B. ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = \infty$. Sie ist kein Pol, weil $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(\frac{1}{2\pi i n})| = 1$ zeigt, dass $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \infty$ nicht gelten kann.

2.2. Ein Standardbeispiel für Reihenentwicklungen im Innen- und Außenbereich: Betrachten wir für beliebige fixe Punkte $w, z_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$f(z) := \frac{1}{w - z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{w\}).$$

Die Funktion hat einen Pol in $z = w$.

1) Im Spezialfall $w = z_0$ können wir für $z \neq z_0$ formal schreiben

$$f(z) = \frac{1}{z_0 - z} = \frac{-1}{(z - z_0)^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{mit } a_{-1} = -1 \text{ und } a_{-n} = 0 \ (n > 1).$$

Diese „Reihenentwicklung“ gilt im Bereich $|z - z_0| > 0$, also in der gelochten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

2) Nehmen wir nun an, dass $w \neq z_0$ gilt, sodass $|w - z_0| > 0$ ist, und studieren zwei Fälle:

(a) $|z - z_0| < |w - z_0|$, also z in der offenen Kreisscheibe um z_0 mit Radius $|w - z_0|$: Wir dürfen auf die Potenzreihenentwicklung aus 1.10, Beispiel 1), zurückgreifen und erhalten

$$(2.1) \quad \frac{1}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } a_n = \frac{1}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Für jedes ρ mit $0 \leq \rho < 1$ haben wir gleichmäßige Konvergenz dieser Potenzreihe in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho|w - z_0|\}$ mit Radius $\rho|w - z_0|$ um z_0 .

(b) $|z - z_0| > |w - z_0|$, also z außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe um z_0 vom Radius $|w - z_0|$: Wir können wieder ähnlich wie in 1.10, Beispiel 1), vorgehen, verwenden allerdings diesmal die geometrische Reihe für den Kehrwert $\frac{w - z_0}{z - z_0}$ und kommen auf

$$(2.2) \quad \frac{1}{w - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{-1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^k} \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{mit } a_{-n} = -(w - z_0)^{n-1}.$$

Für jedes $r > 1$ haben wir gleichmäßige Konvergenz im Bereich $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \geq r|w - z_0|\}$, also außerhalb der offenen Kreisscheibe vom Radius $r|w - z_0|$ um z_0 . (Dies folgt direkt mittels $1/(w - z) = \frac{-1}{w - z_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (w - z_0)^n / (z - z_0)^n$ und der Abschätzung $|w - z_0|^n / |z - z_0|^n \leq r^{-n}$ aus dem Majorantenkriterium für Funktionenreihen; siehe z.B. [FK1, §12, 2.6].)

2.3. Laurent-Reihen: Die rationale Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{2z}{2z-1} + \frac{1}{1-z}$ ist holomorph und hat Pole in $\frac{1}{2}$ und 1. Wenn wir für f Reihenentwicklungen um $z_0 = 0$ anstreben, dann können wir f in die Form

$$f(z) = -z \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - z} + \frac{1}{1 - z}$$

bringen und zunächst die beiden Terme separat mittels 2.2 entwickeln, einmal mit $w = \frac{1}{2}$ und das andere Mal mit $w = 1$. Als gemeinsamer Konvergenzbereich für beide Terme ergibt sich dann der Durchschnitt des Außenbereichs mit $|z| > 1/2$ und des Innenbereichs mit $|z| < 1$, also das ringförmige Gebiet $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 1\}$. Als Reihenentwicklung in Ω erhalten wir dadurch

$$f(z) = -z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{n-1} z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k z^k} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n = 2^n$ für $n < 0$, $a_0 = 2$ und $a_n = 1$ für $n > 0$.

Das obige Beispiel motiviert also die folgende Begriffsbildung: Unter einer *Laurent-Reihe* verstehen wir eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

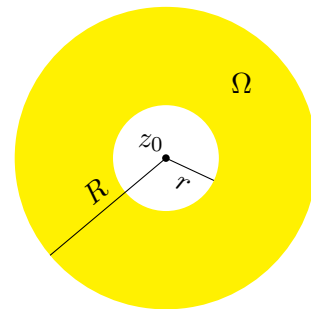
mit fixen komplexen Zahlen z_0 und a_n ($n \in \mathbb{Z}$). Die Laurent-Reihe konvergiert für ein bestimmtes $z \in \mathbb{C}$, falls sowohl $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ als auch $h(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ konvergent ist. In diesem Fall setzen wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := h(z) + g(z),$$

wobei $h(z)$ *singulärer Teil* oder *Hauptteil* genannt wird. Der sogenannte reguläre Teil $g(z)$ ist einfach eine Potenzreihe.

Durch Kehrwertbildung lässt sich wie bei Potenzreihen zeigen, dass im Falle der Konvergenz des Hauptteils $h(z)$ für ein z_1 auch die absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ folgt, während im Falle von Divergenz für ein z_2 auch die Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_2 - z_0|$ erzwungen wird.

Insgesamt hoffen wir darauf, dass für eine Laurent-Reihe der Konvergenzkreis der Potenzreihe $g(z)$ mit Radius R um z_0 im Durchschnitt mit einem Konvergenzbereich für den Hauptteil $h(z)$ außerhalb eines Kreises vom Radius r um z_0 einen nichtleeren ringförmigen Bereich $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ der Konvergenz beider Anteile und somit für die Laurent-Reihe „übrig lässt“. Wir nennen solche Mengen *Ringgebiete*.



In diesem Fall ist es nicht schwierig zu zeigen, dass die Laurent-Reihe auf jedem kompakten Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0| \leq R_1\} \subseteq \Omega$ mit $r < r_1 < R_1 < R$ gleichmäßig konvergiert. Nachdem die Partialsummen jeweils holomorphe Funktionen auf dem ursprünglichen Kreisring Ω sind und beliebige kompakte Teilmengen von Ω stets in passenden kompakten Kreisringen untergebracht werden können, haben wir es also mit kompakter Konvergenz einer Folge von holomorphen Funktionen zu tun. Wir dürfen also gemäß dem Konvergenzsatz aus 1.14 schließen, dass

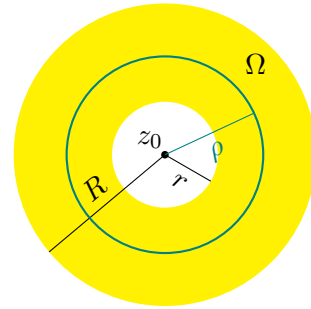
$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (r < |z - z_0| < R)$$

eine holomorphe Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Wenn wir nun in obiger Gleichung beide Seiten durch $(z - z_0)^{k+1}$ dividieren und gliedweise über einen Kreis $C_\rho(z_0)$ mit $r < \rho < R$ integrieren, dann ergibt sich mit Hilfe der grundlegenden Integralformeln (1.9) direkt

$$\begin{aligned} \int_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{C_\rho(z_0)} \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{C_\rho(z_0)} (z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n 2\pi i \delta_{n-k,0} = 2\pi i a_k. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Cauchy-Formeln (1.14) auch auf den Fall der Laurent-Reihen-Koeffizienten erweitert:

$$(2.3) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$



Insbesondere sind die Koeffizienten von Laurent-Reihen eindeutig bestimmt.

Wenn nun andererseits eine holomorphe Funktion f auf einem Ringgebiet Ω gegeben ist, so lässt sich ähnlich wie in den Argumentationen für 1.13 aus den Resultaten über Cauchysche Integralsätze 1.11 und Cauchysche Integralformeln 1.12 nachweisen, dass stets eine Laurent-Reihenentwicklung in Ω möglich ist. Wir formulieren hier nur die Aussage und verweisen für die Details des Beweises auf [FK1, §28, 2.4].

Satz: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < R$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f auf Ω eine Laurent-Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Teilmengen von Ω . Für $r < \rho < R$ gelten die folgenden Cauchy-Formeln für die Koeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Beispiele: 1) Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist natürlich holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Laurent-Entwicklung bzgl. $z_0 = 0$ ist gerade durch $1/z$ gegeben, also $a_{-1} = 1$ und $a_n = 0$ für $n \neq -1$.

2) Partialbruchdarstellung von $\cot z$: Die Funktion $z \cot z = \frac{z \cos z}{\sin z} = \frac{\cos z}{\operatorname{sinc}(z)}$ ist jedenfalls holomorph für $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, hat aber in 0 eine hebbare Singularität, weil $\operatorname{sinc}(0) = 1$ gilt. Daher gibt es eine Potenzreihenentwicklung

$$z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z| < \pi).$$

Die Koeffizienten können sukzessive durch Potenzreihenentwicklungen und Koeffizientvergleich in der Relation $z \cot z \sin z = z \cos z$ ermittelt werden: Einerseits haben wir

$$z \cos z = z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = z - \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{4!} \pm \dots$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (z \cot z) \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ &= (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 \dots) \cdot \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \\ &= b_0 z + b_1 z^2 + \left(b_2 - \frac{b_0}{6} \right) z^3 + \left(b_3 - \frac{b_1}{6} \right) z^4 + \left(b_4 - \frac{b_2}{6} + \frac{b_0}{5!} \right) z^5 + \dots, \end{aligned}$$

woraus z.B. die folgenden Gleichungen ablesbar sind:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 - \frac{b_0}{6} = -\frac{1}{2}, \quad b_3 - \frac{b_1}{6} = 0, \quad b_4 - \frac{b_2}{6} + \frac{b_0}{5!} = \frac{1}{4!}.$$

Daher folgt für die ersten fünf Koeffizienten $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = 0, b_4 = -\frac{1}{45}$ und die Laurent-Reihe für $\cot z$ im Bereich $|z| < \pi$ ergibt sich zu

$$\cot z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-1} = \frac{b_0}{z} + b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + b_4 z^3 + \dots = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} \pm \dots$$

Dies zeigt, dass der Hauptteil der Laurent-Entwicklung für $\cot z$ um $z_0 = 0$ einfach $1/z$ ist.

2.4. Kriterien für die verschiedenen Arten von isolierten Singularitäten: Hier sei stets z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f .

(a) Eine hinreichende Bedingung für Hebbarkeit: Aus den Cauchy-Formeln für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung lassen sich Abschätzungen gewinnen (vgl. [FK1, §28, 2.5]), falls Schranken für f bekannt sind, was rasch auf die folgende Aussage führt ([FK1, §28, 3.1]).

Ist f im Bereich $0 < |z - z_0| < R$ holomorph und beschränkt, so ist z_0 hebbar.

Zum Beispiel ist $\frac{e^z - e^{-z}}{z}$ holomorph für $z \neq 0$ und wegen $\lim_{w \rightarrow 0} (e^w - 1)/w = 1$ bleibt $\frac{e^z - e^{-z}}{z} = \frac{e^z - 1}{z} + \frac{e^{-z} - 1}{-z}$ für z nahe 0 sicherlich beschränkt. Also ist die Singularität in $z_0 = 0$ hebbar, was sich in diesem Fall natürlich auch leicht durch Betrachtung der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion überprüfen ließe.

(b) Eine grundlegende Äquivalenz für Pole:

(b1) Behauptung: Falls die Laurent-Entwicklung Terme mit negativen Potenzen von $z - z_0$ aufweist, aber nur endlich viele davon, dann ist z_0 ein Pol.

Begründung: Angenommen für $0 < |z - z_0| < R$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \text{ und } a_{-m} \neq 0,$$

dann folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z - z_0)^k}^{g(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

mit der nahe z_0 holomorphen Funktion g und $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$. Daher ist $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

(b2) Ist umgekehrt z_0 ein Pol, also $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, dann gilt $f(z) \neq 0$ für z nahe z_0 und die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} 1/f(z) & z \neq z_0, \\ 0 & z = z_0, \end{cases}$$

ist holomorph für z nahe z_0 , $z \neq z_0$, und zusätzlich wegen $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/|f(z)| = 0$ beschränkt, sodass wir nach (a) in z_0 eine hebbare Singularität von g haben. Somit ist g holomorph und besitzt für ein gewisses $r > 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < r).$$

Es ist sicherlich $b_0 = g(z_0) = 0$, aber g nicht die Nullfunktion, daher gibt es ein minimales $m \in \mathbb{N}$ mit $b_m \neq 0$. Wir können daher

$$g(z) = (z - z_0)^m \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k} (z - z_0)^k}^{h(z)} = (z - z_0)^m \cdot h(z)$$

schreiben mit einer holomorphen Funktion h und $h(z_0) \neq 0$. In einer kleinen Umgebung von z_0 bleibt daher auch $h(z) \neq 0$, also dort auch $1/h(z)$ holomorph mit einer Potenzreihenentwicklung $\sum_{l=0}^{\infty} c_l (z - z_0)^l = 1/h(z)$. Wir haben nun insgesamt für $z \neq z_0$ und z nahe z_0 die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} c_l (z - z_0)^l = \sum_{n=-m}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n.$$

Dies ist eine Laurent-Reihenentwicklung $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $a_n := c_{n+m}$ und $a_{-m} = c_0 = 1/h(z_0) \neq 0$. Wir haben somit zusammenfassend in (b1) und (b2) das folgende Resultat bewiesen:

$$z_0 \text{ ist ein Pol von } f \iff \text{es gibt } m \in \mathbb{N}, \text{ sodass } f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_{-m} \neq 0.$$

In diesem Fall heißt m die *Ordnung* des Pols z_0 .

Die Laurent-Reihenentwicklung um $z_0 = 0$ der Funktion $e^{1/z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ erhalten wir direkt aus der Potenzreihenentwicklung für \exp in der Form

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} \cdot z^n,$$

wodurch klar wird, dass die Singularität bei 0 kein Pol sein kann, weil der Hauptteil unendlich viele nichtverschwindende Terme hat. Wie wir früher schon bemerkt hatten, ist sie natürlich auch nicht hebbar (weil $e^{1/z}$ nicht beschränkt bleibt für $z \rightarrow 0$). Also haben wir hier nochmals bestätigt, dass 0 eine wesentliche Singularität von $e^{1/z}$ ist.

(c) Aus den Untersuchungen in (b) können wir gleich auch noch zwei praktisch verwertbare Varianten an Schlüssen für Pole m -ter Ordnung ziehen:

(c1) z_0 ist ein Pol der Ordnung $m \iff \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existiert und ist ungleich 0.

(c2) Ist g holomorph in der Kreisscheibe $|z - z_0| < R$ und z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von g , dann hat $1/g$ einen Pol der Ordnung m in z_0 .

Zum Beispiel hat die Funktion $\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}$ einen Pol der Ordnung 2 in $z_1 = 1$ und einen Pol der Ordnung 1 in $z_2 = 2$.

(d) Wesentliche Singularitäten: Wir wissen aus den bisherigen Überlegungen, dass der Hauptteil der Laurent-Reihe um eine wesentliche Singularität unendlich viele nichtverschwindende Glieder haben muss. Wie in [FK1, §28, 3.4] gezeigt wird, nimmt f in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität z_0 Werte beliebig nahe an jeder komplexen Zahl an. Zusätzlich gibt es aber auch immer eine Folge (w_n) mit $w_n \rightarrow z_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(w_n)| = \infty$.

2.5. Residuenkalkül: Ist f holomorph in einem punktierten Gebiet $\Omega \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \Omega$, dann erlaubt der Cauchysche Integralsatz 1.11 die Berechnung des Integrals entlang einer geschlossenen Kurve γ in $\Omega \setminus \{z_0\}$, die diese isolierte Singularität z_0 einfach positiv umläuft, durch Reduktion auf ein Kurvenintegral über Kreise. Sei konkret der Radius $\rho > 0$ klein genug, damit der Kreis $C_\rho(z_0)$ im Inneren von γ liegt, dann gilt also

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_\rho(z_0)} f(z) dz.$$

Die Cauchy-Formeln (2.3) für die Koeffizienten der Laurent-Reihe enthalten aber als Spezialfall für $n = -1$ die Beziehung

$$\int_{C_\rho(z_0)} f(z) dz = 2\pi i a_{-1},$$

sodass wir insgesamt auf die folgende Formel kommen:

$$(2.4) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Dies ist bereits die elementare Version des Residuensatzes. Wir sehen also, dass der Koeffizient a_{-1} der Laurent-Entwicklung von f um die isolierte Singularität z_0 eine Sonderrolle einnimmt.

Definition: Ist $z_0 \in \Omega$ eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < R),$$

dann heißt $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ das *Residuum* von f bei z_0 .

Berechnungsmethoden für das Residuum:

(a) Direkt aus der Laurent-Entwicklung lesen wir zunächst die Linearität ab, d.h. falls z_0 auch isolierte Singularität für die Funktion g ist und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig sind, dann gilt

$$(2.5) \quad \text{Res}(\alpha f + \beta g, z_0) = \alpha \text{Res}(f, z_0) + \beta \text{Res}(g, z_0).$$

(b) Ist z_0 hebbar oder ein Pol der Ordnung 1, dann lautet die Laurent-Entwicklung ja $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und somit ist $(z-z_0)f(z)$ konvergent für $z \rightarrow z_0$, nämlich gegen a_{-1} . Also gilt in diesem Fall

$$(2.6) \quad \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

(c) Ist z_0 Pol der Ordnung 1 von f und g holomorph nahe z_0 , dann gelten die Entwicklungen $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $a_{-1} \neq 0$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$. Daher ist die Laurent-Entwicklung für die Produktfunktion fg von der Form

$$f(z)g(z) = \frac{a_{-1}b_0}{z-z_0} + a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(z-z_0) + \dots,$$

weshalb wir $a_{-1}b_0 = a_{-1}g(z_0)$ als Laurent-Koeffizienten für $(z-z_0)^{-1}$ ablesen, d.h.

$$(2.7) \quad \text{Res}(fg, z_0) = g(z_0) \text{Res}(f, z_0).$$

(d) Ist z_0 eine einfache Nullstelle der holomorphen Funktion h , dann können wir die Zerlegung (1.11) anwenden und erhalten $h(z) = (z-z_0)g(z)$ mit einer holomorphen Funktion g , die $g(z_0) \neq 0$ erfüllt, weshalb auch $1/g$ holomorph nahe z_0 ist. Daraus folgt $h'(z_0) = g(z_0)$ und weiter $\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{1}{z-z_0}$. Also haben wir $1/h$ als Produkt dargestellt, wobei $1/g$ holomorph ist und $1/(z-z_0)$ bei z_0 natürlich einen Pol der Ordnung 1 mit Residuum gleich 1 hat. Aus der obigen Produktformel folgt nun also wegen $1/g(z_0) = 1/h'(z_0)$ die Formel

$$(2.8) \quad \text{Res}\left(\frac{1}{h}, z_0\right) = \frac{1}{h'(z_0)}.$$

(e) Schließlich können wir noch (2.6) auf den Fall verallgemeinern, dass z_0 ein Pol höchstens m -ter Ordnung von f ist: Die Laurent-Reihe ist dann nämlich von der Form $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und somit ist

$$h(z) := (z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k$$

eine Potenzreihe. Daher berechnet sich deren Koeffizient mit Index $k = m-1$ mittels der $(m-1)$ -ten Ableitung und liefert $a_{-1} = a_{(m-1)-m} = h^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$, d.h.

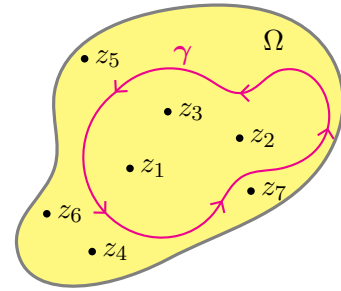
$$(2.9) \quad \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right) \right).$$

Beispiel: Betrachten wir $f(z) = z/(1-\cos z)$ mit isolierter Singularität bei $z_0 = 0$. Mit der Halbwinkelformel $1-\cos z = 2\sin^2(z/2)$ erhalten wir

$$(z-z_0)f(z) = \frac{z^2}{2\sin^2(z/2)} = 2 \frac{(z/2)^2}{\sin^2(z/2)} = 2 \left(\frac{z/2}{\sin(z/2)} \right)^2 \rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \quad (z \rightarrow 0 = z_0),$$

daher ist 0 ein Pol der Ordnung 1 und $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 2$.

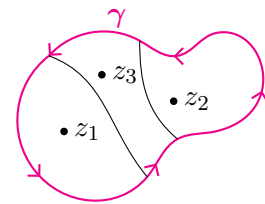
In der Physik treten viele Kurvenintegrale auf, die sich oft auf verblüffende Weise mit Hilfe des Residuensatzes berechnen lassen. Wir illustrieren dessen Ausgangssituation im nebenstehenden Bild: Hier sollen z_1, \dots, z_7 die isolierten Singularitäten einer ansonsten auf Ω holomorphen Funktion f sein. Die geschlossene Kurve γ vermeidet alle Singularitäten, umschließt aber z_1, z_2, z_3 einfach positiv umlaufend, während z_4, z_5, z_6, z_7 außerhalb von γ liegen und für die Integralberechnung irrelevant bleiben.



Residuensatz: Sei f holomorph auf dem Gebiet Ω abgesehen von isolierten Singularitäten. Sei γ eine geschlossene Kurve in Ω , auf der keine Singularitäten von f liegen, und welche die isolierten Singularitäten z_1, z_2, \dots, z_N von f umschließt, jeweils einfach positiv umlaufend. Dann gilt

$$(2.10) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, z_k).$$

Beweisidee: Wir zerlegen den Bereich innerhalb γ in Teilgebiete, die jeweils nur eine Singularität enthalten, und deren zusätzliche Randkurven „quer zu“ γ verlaufen. Jedes Stück dieser zusätzlichen inneren Kurven wird zweimal mitverwendet, jeweils mit entgegengesetzter Orientierung, um zusammen mit geeigneten Teilstücken von γ eine der Singularitäten z_k ($k = 1, \dots, N$) einzeln zu umschließen. In jedem dieser Teilgebiete wenden wir (2.4) an. \square



Bemerkung: Es gibt eine Version des Residuensatzes für in Ω nullhomotope Kurven γ , die Singularitäten dann auch mehrfach umlaufen dürfen. In diesem Fall ist die jeweilige Umlaufzahl pro Singularität zusätzlich zu berücksichtigen (vgl. etwa [KvW, Satz 14.11.4]).

Beispiel: Die komplex rationale Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z(z - i)^2} = \frac{(z - 2)(z + 2)}{z(z - i)^2}$$

hat einen Pol der Ordnung 1 in $z_1 = 0$ und einen Pol der Ordnung 2 in $z_2 = i$, weil $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -4/(-i)^2 = 4 \neq 0$ und $\lim_{z \rightarrow i} (z - i)^2 f(z) = (-1 - 4)/i = 5i \neq 0$. Wir können daraus direkt

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 4$$

ablesen. Für die Berechnung des Residuums in z_2 verwenden wir Formel (2.9) für $m = 2$:

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\underbrace{(z - i)^2 f(z)}_{\frac{z^2 - 4}{z} = z - \frac{4}{z}} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(1 + \frac{4}{z^2} \right) = 1 - 4 = -3.$$

Also ergibt sich für jede geschlossene Kurve, die 0 und i einfach positiv umläuft, ohne weitere Rechenmühe

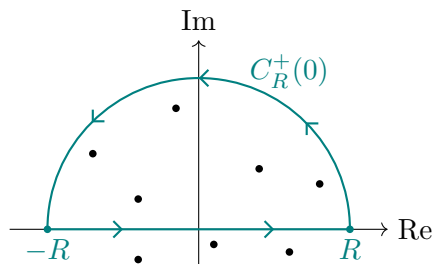
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{z^2 - 4}{z(z - i)^2} dz = 2\pi i (1 - 3) = -4\pi i$$

2.6. Anwendungen auf Integralberechnungen über die reelle Achse:

(A) Ein uneigentliches Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ können wir uns vorstellen als Grenzfalle von Kurvenintegralen über den Rand von großen Halbkreisen $\overline{K_R(0)} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ mit $R \rightarrow \infty$. Wir nehmen hier an, dass sich f auf \mathbb{C} fortsetzen lässt und holomorph ist abgesehen von endlich vielen isolierten Singularitäten, die nicht auf der reellen Achse liegen. Der Beitrag über den oberen Halbkreisbogen $C_R^+(0)$ mit Bogenlänge $R\pi$ lässt sich dann direkt mittels grundlegender Integralabschätzung so beschränken:

$$\left| \int_{C_R^+(0)} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot \sup\{|f(z)| \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| = R\}.$$

Wir sehen, dass diese Schranken beliebig klein werden, falls $|zf(z)| \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$ gilt. Für Radien, die so groß sind, dass alle Singularitäten der oberen Halbebene im oberen Halbkreis enthalten sind, können wir den Residuensatz anwenden und haben nun im Wesentlichen den Beweis für folgendes Resultat skizziert (vgl. [RS1, Satz 14.1.3]).



Methode A: Sei f holomorph auf \mathbb{C} abgesehen von endlich vielen isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_N , von denen keine auf der reellen Achse liegt. Falls das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existiert und $\lim_{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0$ ist, dann gilt

$$(2.11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Bemerkung A: Falls f beispielsweise mit einer Konstanten $C > 0$ die Abschätzung $|f(z)| \leq C/(1 + |z|^2)$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$ erlaubt, dann sind beide Bedingungen aus Methode A an f erfüllt. (Wegen $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{C dx}{1+x^2} < \infty$ und $|zf(z)| \leq C|z|/(1 + |z|^2) \leq C/|z|$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$ und $|z| \geq 1$.)

Ähnliche Überlegungen können wir natürlich für die untere Halbebene anstellen, wobei aber die Orientierung der unteren Halbkreisbögen dann negativ (also im Uhrzeigersinn) gewählt werden muss, um sich der positiven Laufrichtung in \mathbb{R} anzupassen. Die entsprechende Formel ergibt dann minus die Summe über die Residuen der Singularitäten in der unteren Halbebene.

Beispiel A: Wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Die Funktion $f(z) := 1/(1+z^4)$ hat Pole in den Nullstellen des Nenners $g(z) := 1+z^4$, d.h. für jene $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1 = e^{i\pi}$. Die Lösungen sind die einfachen Nullstellen $z_k = e^{i\pi(1+2k)/4}$

($k = 0, 1, 2, 3$), wovon $z_0 = e^{i\pi/4}$ und $z_1 = e^{i3\pi/4}$ in der oberen Halbebene liegen. Wir berechnen die Residuen mittels (2.8) unter Beachtung von $z_k^4 = -1$ in der Form

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \operatorname{Res}(1/g, z_k) = \frac{1}{g'(z_k)} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

und erhalten gemäß Residuensatz nun direkt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)) = -\frac{\pi i}{2} (e^{i\pi/4} + e^{i3\pi/4}) \\ &= -\frac{\pi i}{2} \underbrace{e^{i\pi/2}}_i \underbrace{(e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4})}_{2 \cos(\pi/4)} = \pi \cos(\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(B) Methode B (Fourierintegrale): Sei f holomorph auf \mathbb{C} abgesehen von endlich vielen isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_N , von denen keine auf der reellen Achse liegt. Unter der Bedingung $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ gilt dann

$$(2.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t) dt = \begin{cases} 2\pi i \cdot \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}(e^{ixz} f(z), z_k) & \text{für } x > 0, \\ -2\pi i \cdot \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ \operatorname{Im} z_k < 0}} \operatorname{Res}(e^{ixz} f(z), z_k) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Ein Beweis findet sich in [RS1, Satz 14.2.1], wobei die Grundidee ähnlich zu den Argumentationen in (A) ist, es sich aber hier als technisch günstiger erweist, über Ränder von (bzgl. der imaginären Achse asymmetrisch liegenden) Quadraten statt von Halbkreisen zu integrieren.

Bemerkung B: (i) Das Integral auf der linken Seite in (2.12) konvergiert zumindest als uneigentliches Riemann-Integral, d.h. es existieren beide Grenzwerte $I_1 := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 e^{ixt} f(t) dt$, $I_2 := \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{ixt} f(t) dt$ separat und $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t) dt := I_1 + I_2$. Dies impliziert zwar auch $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{ixt} f(t) dt$ (*Cauchyscher Hauptwert*), aber nicht umgekehrt.

(ii) Falls f auf \mathbb{R} absolut integrierbar ist, also $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty$, dann existiert das Integral auf der linken Seite in (2.12) auch als Lebesgue-Integral auf \mathbb{R} . (Die Bedingung $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ im Komplexen wird dann aber weiterhin benötigt, um die Gültigkeit der Gleichung (2.12) zu garantieren.)

Beispiele B: 1) Wir betrachten die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben als Fourierintegral durch

$$g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} dt}{1+t^2}.$$

Zunächst ist $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$. Wegen $1+z^2 = (z-i)(z+i)$ hat die komplexe Fortsetzung des Integranden Pole erster Ordnung in $-i$ und i und für die Residuen erhalten wir

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ixz}}{1+z^2}, \pm i\right) = \lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i) \frac{e^{ixz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{\mp ix}}{\pm 2i}.$$

Daher ist für $x > 0$ der Wert $g(x) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ixz}}{1+z^2}, i\right) = \pi e^{-x}$ und für $x < 0$ ergibt sich $g(x) = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ixz}}{1+z^2}, -i\right) = \pi e^x$. Wir sehen, dass wir alle drei Fälle für x in einer Formel zusammenfassen können, nämlich

$$(2.13) \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} dt}{1+t^2} = \pi e^{-|x|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2) Für $\operatorname{Re} b > 0$ und $x > 0$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} dt}{t+ib} = 0$, weil die Funktion $z \mapsto e^{ixz}/(z+ib)$ keinen Pol in der oberen Halbebene hat.

3) Für $\operatorname{Re} b > 0$ und $x > 0$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} dt}{t-ib} = 2\pi i e^{-xb}$, denn die Funktion $z \mapsto e^{ixz}/(z-ib)$ hat $z_0 = ib = -\operatorname{Im} b + i \operatorname{Re} b$ als einzigen Pol der Ordnung 1 in der oberen Halbebene und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ixz}}{z-ib}, z_0\right) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-ib) \frac{e^{ixz}}{z-ib} = e^{ixib} = e^{-xb}.$$

Teil B

**Fourier-Transformation und
Distributionen**

Vorbemerkung zum Integralbegriff im Hintergrund

Strukturierte und moderne Lösungsmethoden für partielle Differentialgleichungen benötigen Hilfsmittel aus der Analysis, die auf einem Integralbegriff basieren, der gute Konvergenzeigenschaften (z.B. von Fourierreihen oder allgemeineren Approximationsverfahren) garantiert. Dies spiegelt sich darin wider, dass entsprechende Normen auf Vektorräumen von Funktionen, wie z.B. $\|f\| = \int |f(x)| dx$ oder $\|f\| = \sqrt{\int |f(x)|^2 dx}$, *vollständig* sein sollen: Absolute Konvergenz $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ soll stets Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ergeben.

Eigenschaften wie oben erwähnt können durch einen Aufbau der Integrationstheorie nach Lebesgue erreicht werden, deren Details (vgl. [FK2, §8]) wir überspringen (müssen), aber die Strategien zur Approximation des Integrals von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vergleichen sich grob so:

(a) Riemann-Summen: Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ mit Zwischenpunkten $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ und

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

(b) Lebesgue-Theorie, besser angepasst an Schwankungen von f : Zerlegung der Bildmenge $f([a, b])$ durch $y_0 < y_1 < \dots < y_N$ mit „Längen“ $\mu(E_k)$ (Maß) von $E_k := f^{-1}([y_{k-1}, y_k]) = \{x \in [a, b] \mid y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ und

$$\int_{[a,b]} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} y_k \mu(E_{k+1}).$$

Die Suche nach einem geeigneten Begriff von „Länge“ für Mengen wie E_k führt zum Begriff des *Lebesgue-Maßes*, das einer möglichst flexiblen Klasse von Teilmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine „Maßzahl“ $\mu(E) \in [0, \infty]$ zuordnet und das elementare Volumen rechentechnisch erweitert. Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißen dann *messbar*, falls jede der Urbildmengen $f^{-1}([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq f(x) < b\}$ so eine Maßzahl besitzt.

Ein wichtiger Spezialfall sind Lebesgue-Nullmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mu(E) = 0$, u.a. weil es „auf solche beim Integrieren nicht ankommt“. Diese lassen sich auch elementar charakterisieren: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge von (n -dim.) Quadern I_k ($k \in \mathbb{N}$), deren Vereinigung E überdeckt und deren Summe über alle Volumina unterhalb ε bleibt. Eigenschaften, die abgesehen von einer Nullmenge E bestehen, sind in diesem präzisen Sinne *fast überall* (f.ü.) gültig. Z.B. heißt

$$f = g \quad \text{f.ü.}$$

für zwei messbare Funktionen $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dass es eine Nullmenge $E \subseteq \Omega$ gibt mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus E$. Zusammen mit Integralbedingungen der Form $\|f\|_1 := \int |f| < \infty$ bzw. $\|f\|_2 = \sqrt{\int |f|^2} < \infty$ führt dies auf die normierten Funktionenräume $L^1(\Omega)$ bzw. $L^2(\Omega)$ — Beispiele von Banach- bzw. Hilberträumen.

Bemerkung: Wegen der quasi eingebauten absoluten Konvergenz erfasst der Lebesgue-Integralbegriff allerdings nicht alle praktisch relevanten uneigentlichen (Riemann-)Integrale. Z.B. sind $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ oder die Fresnel-Integrale $\int_0^{\infty} \cos(\frac{\pi x^2}{2}) dx$ und $\int_0^{\infty} \sin(\frac{\pi x^2}{2}) dx$ nicht als Lebesgue-Integrale konvergent, wohl aber im Sinne der uneigentlichen Integrale.

3. Fouriertransformation

3.0. Heuristik des Fourierintegrals: Für die Heuristik des Begriffes einer Fouriertransformierten erinnern wir uns zunächst an Fourierreihen und stellen uns eine Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als „Funktion mit unendlicher Periodenlänge $\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} 2l$ “ vor. Wäre u einfach $2l$ -periodisch, dann hätten wir die Fourierentwicklung

$$u(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l u(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{l} g_l\left(\frac{n\pi}{l}\right),$$

wobei wir zwischenzeitlich die Funktion $g_l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der erhofften Eigenschaft

$$g_l(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l u(x) e^{-iyx} dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-iyx} dx =: \hat{u}(y) \quad (l \rightarrow \infty)$$

eingeführt haben. Mit derartigen Beobachtungen könnten wir obige Fourier-Approximation mit Hilfe von Riemann-Summen für Zerlegungspunkte $y_n := \frac{n\pi}{l}$ von \mathbb{R} , somit $y_{n+1} - y_n = \frac{\pi}{l}$, und Zwischenpunkten $\eta_n := y_n \in [y_n, y_{n+1}]$ nach einem waghalsigen Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ so beschreiben:

$$u(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{l} g_l\left(\frac{n\pi}{l}\right) e^{\frac{in\pi x}{l}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y_{n+1} - y_n) g_l(\eta_n) e^{i\eta_n x} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(y) e^{iyx} dy.$$

3.1. Fouriertransformation für L^1 -Funktionen: Für eine integrierbare Funktion $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ setzen wir (mit der Notation $\langle x, y \rangle$ für das Standardskalarprodukt von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$)

$$(3.1) \quad \hat{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} u(x) dx \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Wegen $|\hat{u}(y)| \leq (\int |u(x)| dx) / (2\pi)^{n/2} = \|u\|_1 / (2\pi)^{n/2}$ ist $\hat{u}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und als Parameterintegral (bzgl. y) auch stetig, was leicht aus Resultaten der Lebesgue-Theorie folgt.

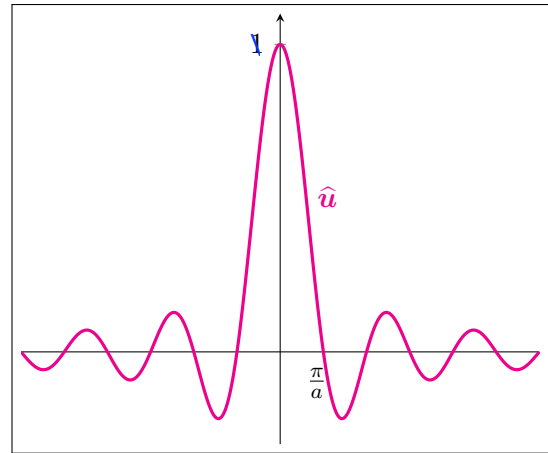
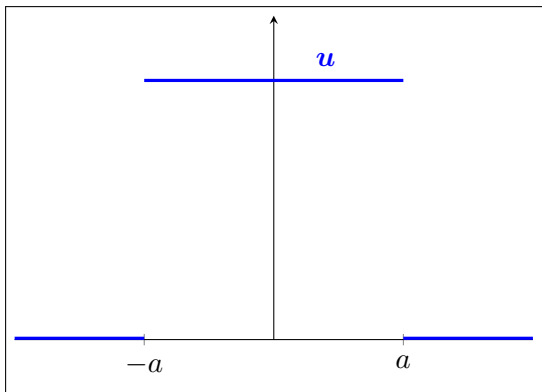
Beispiel: In der Beugung am Spalt mit Breite $2a > 0$ modelliert die Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = 1$ für $|x| \leq a$, $u(x) = 0$ sonst, die Durchlässigkeit des Spaltes. Für $y = 0$ haben wir

natürlich einfach $\widehat{u}(0) = \int u(x) dx / \sqrt{2\pi} = 2a / \sqrt{2\pi}$, während wir für $y \neq 0$ auch direkt $\widehat{u}(y)$ wie folgt berechnen:

$$\sqrt{2\pi} \widehat{u}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} u(x) dx = \int_{-a}^a e^{-ixy} dx = \frac{e^{-ixy}}{-iy} \Big|_{x=-a}^{x=a} = \frac{-1}{iy} (e^{-iay} - e^{iay}) = \frac{2}{y} \sin(ay).$$

Wegen $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(ay)}{ay} = 1$ können wir dies insgesamt in einer Formel zusammenfassen:

$$\widehat{u}(y) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(ay)}{ay} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(ay) \quad (y \in \mathbb{R}).$$



3.2. Ableitungs- und Multiplikationsoperatoren: Betrachten wir im eindimensionalen Spezialfall für eine Funktion $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ mit den Zusatzeigenschaften, dass sowohl u' als auch $x \mapsto xu(x)$ integrierbar sind, die folgenden Relationen: Zunächst erhalten wir mit partieller Integration¹

$$\sqrt{2\pi} \widehat{u'}(y) = \int e^{-ixy} u'(x) dx = - \int (-iy) e^{-ixy} u(x) dx = \sqrt{2\pi} iy \widehat{u}(y), \text{ d.h. } \widehat{\left(\frac{1}{i} u'\right)}(y) = y \widehat{u}(y),$$

und mit der Beobachtung $xe^{-ixy} = i \frac{d}{dy} (e^{-ixy})$ im Parameterintegral auch

$$\sqrt{2\pi} \widehat{(xu)}(y) = \int e^{-ixy} xu(x) dx = i \frac{d}{dy} \int e^{-ixy} u(x) dx = \sqrt{2\pi} i \widehat{u'}(y), \text{ d.h. } \widehat{(xu)}(y) = -\frac{1}{i} \widehat{u'}(y).$$

Mit der Notation $(Qu)(x) := xu(x)$ und $(Pu)(x) := \frac{1}{i} u'(x)$ schreiben sich diese Relationen ganz kompakt in der Form

$$(3.2) \quad \boxed{\widehat{Pu} = Q\widehat{u} \quad \text{und} \quad \widehat{Qu} = -P\widehat{u}}$$

und nehmen auch schon ein wenig den *Ortsoperator* Q und den *Impulsoperator* $\frac{1}{\hbar}P$ aus der Quantenmechanik vorweg.

¹Diese ist zulässig, denn $u(\xi) = u(0) + \int_0^\xi u'(x) dx$ und die Integrierbarkeit von u' zeigen, dass beide Grenzwerte $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u(\xi)$ existieren; weil u insbesondere auch als stetig vorausgesetzt ist, kann aber keiner dieser Grenzwerte ungleich 0 sein, ohne die L^1 -Bedingung $\int |u| < \infty$ zu zerstören.

Im n -dimensionalen Analogon mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ ist

$$(Q_k u)(x) = x_k u(x) \quad \text{und} \quad (P_k u)(x) := \frac{1}{i} \partial_k u.$$

Für das Weitere verwenden wir am besten die *Multiindexschreibweise* für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und $P^\alpha := P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n}$ sowie $Q^\alpha := Q_1^{\alpha_1} \dots Q_n^{\alpha_n}$. Dann ergeben sich (vgl. [FK2, §12, 2.2]) mittels mehrfacher partieller Integration ähnlich wie im eindimensionalen Spezialfall die *Austauschformeln*

$$(3.3) \quad \boxed{\widehat{P^\alpha u} = Q^\alpha \widehat{u} \quad \text{und} \quad \widehat{Q^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} P^\alpha \widehat{u}}$$

unter den Annahmen $|\alpha| \leq m \in \mathbb{N}$, $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^m(\mathbb{R}^n)$, $P^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $Q^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Die erste Formel in (3.3) besagt z.B. für $\alpha = 2e_k$ jeweils $(-\widehat{\partial_k^2 u})(y) = y_k^2 \widehat{u}(y)$ und ergibt in Summe über $k = 1, \dots, n$ dann mit $\Delta := \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ die Relation

$$(3.4) \quad (\widehat{-\Delta u})(y) = \|y\|^2 \widehat{u}(y).$$

Bemerkungen: (i) Für sehr glatte Funktionen u mit integrierbaren Ableitungen folgt durch N -fache Anwendung von Δ auf der linken Seite also auch, dass die Funktion $\|y\|^{2N} \widehat{u}(y)$ beschränkt ist, d.h. je glatter u (mit integrierbaren Ableitungen) ist, desto stärker muss \widehat{u} im Unendlichen abfallen.

(ii) Mit der zweiten Formel in (3.3) können wir ein analoges Spiel treiben und erkennen, dass ein stark abfallendes u auch eine besonders glatte Fouriertransformierte \widehat{u} erzwingt. Das geht soweit, dass wir sogar Folgendes festhalten dürfen: Ist $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und verschwindet außerhalb eines beschränkten Intervalls, dann ist \widehat{u} analytisch und als holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} fortsetzbar. Es gibt davon auch eine n -dimensionale Version.

(Für die Begründung sei $u(x) = 0$ für $|x| \geq R$, womit klar wird, dass nun $\sqrt{2\pi} \widehat{u}(y) = \int_{-R}^R e^{-ixy} u(x) dx$ auch für beliebige $y \in \mathbb{C}$ definiert ist; außerdem lassen sich dann mühelos die Cauchy-Riemann-Gleichungen für das Parameterintegral nachweisen.)

(iii) Wenn wir L^1 -Funktionen durch glatte und stark abfallende Funktionen approximieren, dann liefern Standardabschätzungen aus den Austauschformeln (3.3) im L^1 -Limes das folgende Resultat, das als *Lemma von Riemann-Lebesgue* bekannt ist:

Für jedes $u \in L^1$ ist \widehat{u} stetig und es gilt $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \widehat{u}(y) = 0$.

3.3. Eigenschaften und Rechenregeln der Fouriertransformation auf L^1 : Wir schreiben der Einfachheit halber ab nun oft nur L^1 statt $L^1(\mathbb{R}^n)$.

- Für $u \in L^1$ ist \widehat{u} stetig und beschränkt, also auch $\widehat{u} v \in L^1$, falls $v \in L^1$. Somit können wir in folgender Rechnung iterierte Integrale nach dem Satz von Fubini in beliebiger Reihenfolge auswerten und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(y) v(y) dy &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} u(x) dx v(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} v(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \widehat{v}(x) dx, \end{aligned}$$

d.h. $\boxed{\langle \widehat{u}, v \rangle := \int \widehat{u} v = \int u \widehat{v} =: \langle u, \widehat{v} \rangle}.$

- Die Fouriertransformation übersetzt Translationen in Modulationen: Ist $u \in L^1$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $(T_a u)(x) := u(x - a)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), dann berechnen wir mittels simpler Substitution

$$\widehat{T_a u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} u(x - a) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x+a, y \rangle} u(x) dx = e^{-i\langle a, y \rangle} \widehat{u}(y).$$

Mit der Notation $(M_b u)(x) := e^{i\langle b, x \rangle} u(x)$ für die Modulation heißt dies $\boxed{\widehat{T_a u} = M_{-a} \widehat{u}}$.

- Durch eine sehr ähnliche Rechnung ergibt sich auch $\boxed{\widehat{M_a u} = T_a \widehat{u}}$.
- Das Verhalten der Fouriertransformation bzgl. Skalierungen $(S_\lambda u)(x) := u(\lambda x)$, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ ist für $u \in L^1$ auch leicht direkt mit einer Substitution nachzurechnen; wir müssen nur beachten, dass für $r > 0$ die Determinante der Jakobi-Matrix von $x \mapsto rx = \xi$ gerade r^n ist und erhalten

$$\widehat{S_{1/r} u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} u\left(\frac{x}{r}\right) dx = \frac{r^n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ir\langle \xi, y \rangle} u(\xi) d\xi = r^n \widehat{u}(ry),$$

d.h. $\boxed{\widehat{S_{1/r} u} = r^n S_r \widehat{u}}$.

- Falls $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ von Produktform $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$ mit $u_k \in L^1(\mathbb{R})$ ($k = 1, \dots, n$) ist, dann folgt wegen $\exp(-i\langle x, y \rangle) = \exp(-i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)) = \exp(-ix_1 y_1) \cdots \exp(-ix_n y_n)$ und wiederum nach dem Satz von Fubini einfach

$$\widehat{u}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_k y_k} u_k(x_k) dx_k = \widehat{u}_1(y_1) \cdots \widehat{u}_n(y_n).$$

Beispiel (Fouriertransformation von Gauß-Funktionen): Wir betrachten die mit $t > 0$ skalierten Gauß-Dichtefunktion

$$u(x) := e^{-t\|x\|^2} = e^{-tx_1^2} \cdots e^{-tx_n^2} = v(x_1) \cdots v(x_n) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

wobei wir $v(s) := e^{-ts^2}$ für $s \in \mathbb{R}$ gesetzt haben. Um die Fouriertransformierte von u erhalten genügt es also, jene von v zu bestimmen. Wir skalieren das einmal kurz um und schreiben $v(s) = v_0(\sqrt{2t}s)$ mit der Standard-Gauß-Funktion

$$v_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_0(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

Es gilt $v_0(0) = 1$ und $v_0'(\xi) = -\xi v_0(\xi)$, daher $Pv_0 = iQv_0$ und $v_0(0) = 1$. Die Austauschformeln (3.2) ergeben nun

$$P\widehat{v_0} = -Q\widehat{v_0} = iP\widehat{v_0} = iQ\widehat{v_0},$$

d.h. $\widehat{v_0}$ erfüllt dieselbe (gewöhnliche lineare) Differentialgleichung (erster Ordnung) wie v_0 . Außerdem ist

$$\widehat{v_0}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i0} v_0(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1,$$

wie wohl spätestens aus Analysis II bekannt ist. Somit erfüllt $\widehat{v_0}$ auch dieselbe Anfangsbedingung wie v_0 . Wir schließen daraus also $\boxed{\widehat{v_0} = v_0}$ — die Standard-Gauß-Funktion ist

also ein Fixpunkt unter der Fouriertransformation – und mittels Skalierungseigenschaft der Fouriertransformation weiters

$$\widehat{v}(\eta) = (\widehat{S_{\sqrt{2t}} v_0})(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2t}} v_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{2t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{\eta^2}{4t}}.$$

Wir fügen nun alles wieder zusammen und gelangen zur Formel

$$(3.5) \quad \widehat{u}(y) = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} \quad \text{für} \quad u(x) = e^{-t\|x\|^2}.$$

Am Ende der Diskussion in 3.0 zur (eindimensionalen) Heuristik der Fouriertransformation entstand die Formel $u(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(y) e^{iyx} dy = \widehat{\widehat{u}}(-x)$ und auch diese lässt sich präzisieren. Wir formulieren hier nur das Resultat, ein Beweis findet sich in [FK2, §12, 3.4].

Umkehrsatz für L^1 : Sind sowohl u als auch \widehat{u} in L^1 , dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$u(x) = \widehat{\widehat{u}}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \widehat{u}(y) dy.$$

Insbesondere folgt für $u \in L^1$ aus $\widehat{u} = 0$ stets $u = 0$.

3.4. Fouriertransformation und Faltung: Für zwei Funktionen $u, v \in L^1$ ist die *Faltung* (oder das Faltungsprodukt) definiert als jene Funktion $u * v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, die fast überall gegeben ist durch

$$u * v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)v(y) dy.$$

Man kann zeigen, dass $u * v = v * u$ und $u * v \in L^1$ gilt. Somit ist die Fouriertransformierte von $u * v$ definiert und die besondere Bedeutung ergibt sich aus dem folgenden Zusammenhang mit der Multiplikation:

$$(3.6) \quad \widehat{u * v} = (2\pi)^{n/2} \widehat{u} \cdot \widehat{v}.$$

Die Beweisskizze dazu verläuft entlang folgender Berechnung, wobei die Vertauschung der Integrationsreihenfolge im dritten Schritt ein bisschen delikater ist (sich aber durch den Satz von Tonelli aus der Maß- und Integrationstheorie rechtfertigen lässt; vgl. z.B. [FK2, §12, 3.5(c)]):

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{u * v}(x) &= \int e^{-i\langle x, z \rangle} (u * v)(z) dz = \int e^{-i\langle x, z \rangle} \int u(z - y)v(y) dy dz \\ &= \int \underbrace{\int e^{-i\langle x, z - y \rangle} u(z - y) dz}_{(2\pi)^{n/2} \widehat{u}(x)} e^{-i\langle x, y \rangle} v(y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{u}(x) \underbrace{\int e^{-i\langle x, y \rangle} v(y) dy}_{(2\pi)^{n/2} \widehat{v}(x)} = (2\pi)^n \widehat{u}(x) \widehat{v}(x). \end{aligned}$$

3.5. Fouriertransformation von rasch fallenden Funktionen: Der Umkehrsatz für die Fouriertransformation auf L^1 birgt eine Asymmetrie, weil die Zusatzbedingung $\widehat{u} \in L^1$ in der Praxis nicht leicht überprüfbar ist und auch in vielen Fällen nicht zutrifft, wie schon das Beispiel in 3.1 zeigt. Das Lemma von Riemann-Lebesgue in 3.2, Bemerkung (iii), garantiert ja bloß, dass \widehat{u} stetig ist und im Unendlichen gegen 0 geht. Wir geben daher nun mit Hilfe

der Erkenntnisse aus 3.2 über Ableitungs- und Multiplikationsoperatoren einen Teilraum von $L^1(\mathbb{R}^n)$ an, der unter Fouriertransformation in sich selbst abgebildet wird.

Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ sowie $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Wir nennen eine komplexwertige Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *rasch fallend* (oder auch Schwartz-Funktion), falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion $x \mapsto x^\alpha \partial^\beta u(x)$ beschränkt auf \mathbb{R}^n ist. Das lässt sich technisch leicht übersetzen in die äquivalente Bedingung, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion

$$x \mapsto (1 + \|x\|^m) \partial^\beta u(x)$$

beschränkt auf \mathbb{R}^n ist. Die Menge der rasch fallenden Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder auch kurz \mathcal{S} . Z.B. ist $x \mapsto \exp(-\lambda \|x\|^2)$ für jedes $\lambda > 0$ eine Funktion in \mathcal{S} .

Es folgt direkt $\mathcal{S} \subseteq L^1 \cap L^2$ und, dass für $u \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ auch stets $P^\alpha u, Q^\alpha u \in \mathcal{S}$ gilt. Weiters ist für eine beliebige glatte Funktion v , die *polynomial beschränkt* ist, d.h. es gibt $c > 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ mit **samt ihrer Ableitungen**

$$|v(x)| \leq c(1 + \|x\|^m) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \text{und analog für jede Ableitung}$$

auch das Produkt $vu \in \mathcal{S}$ für jedes $u \in \mathcal{S}$.

Eine kleine technische Überlegung mit Parameterintegralen (vgl. [FK2, §12, 3.2]) zeigt auch, dass \mathcal{S} hervorragende Eigenschaften bzgl. des Faltungsproduktes hat:

$$\text{Für } u, v \in \mathcal{S} \text{ folgt } u * v \in \mathcal{S} \text{ sowie } \partial^\beta(u * v) = (\partial^\beta u) * v = u * (\partial^\beta v).$$

Nachdem für $u \in \mathcal{S}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ stets auch $Q^\beta u \in \mathcal{S} \subseteq L^1$ gilt, können wir die Austauschformeln (3.3) anwenden und erhalten Glattheit von \widehat{u} wegen Stetigkeit von $P^\beta \widehat{u} = (-1)^{|\beta|} \widehat{Q^\beta u}$. Weiters ergibt sich für beliebiges $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ wegen $P^\alpha Q^\beta u \in \mathcal{S} \subseteq L^1$ und der Beschränktheit von $Q^\alpha P^\beta \widehat{u} = (-1)^{|\beta|} \widehat{P^\alpha Q^\beta u}$ als Fouriertransformation einer L^1 -Funktion nun sukzessive, dass auch \widehat{u} eine rasch fallende Funktion ist. Somit haben wir den Nachweis des folgenden Resultats skizziert:

Für $u \in \mathcal{S}$ ist auch $\widehat{u} \in \mathcal{S}$ und für beliebiges $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gelten die Austauschformeln

$$\widehat{P^\alpha u} = Q^\alpha \widehat{u} \quad \text{und} \quad \widehat{Q^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} P^\alpha \widehat{u}$$

gleichlautend zu (3.3) (aber ohne einschränkende Bedingungen). Speziell beinhaltet dies auch

$$(3.7) \quad \widehat{(-i\partial_k u)}(y) = y_k \widehat{u}(y), \quad \widehat{(x_k u)} = i\partial_k \widehat{u}, \quad \widehat{\Delta u}(y) = -\|y\|^2 \widehat{u}(y).$$

Die entscheidende strukturelle Stärke des Vektorraumes \mathcal{S} der rasch fallenden Funktionen besteht nun in der folgenden Eigenschaft.

Umkehrsatz: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto \widehat{u} =: \mathcal{F}u$ ist linear bijektiv und es gilt

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \widehat{u}(y) dy \quad (u \in \mathcal{S}, x \in \mathbb{R}^n),$$

d.h. für jedes $v \in \mathcal{S}$ gilt

$$(\mathcal{F}^{-1}v)(x) = \widehat{v}(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Beweisskizze: Für die Gauß-Funktion $g(x) := \exp(-\|x\|^2/2)$ und $r > 0$ setzen wir $g_r := S_{1/r}g$, dann wissen wir aus 3.3, dass $\widehat{g}_r = \mathcal{F}(S_{1/r}g) = r^n S_r \widehat{g} = r^n S_r g$ gilt. Zusätzlich bemerken wir die punktweise monotone Konvergenz

$$g_r(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2r^2}} \nearrow 1 \quad (r \rightarrow \infty),$$

aber natürlich stets mit $g_r \in \mathcal{S}$ für jedes $r > 0$. Das Integral $\int e^{i\langle x,y \rangle} \widehat{u}(y) dy$ sollte sich daher brauchbar durch $\int e^{i\langle x,y \rangle} \widehat{u}(y) g_r(y) dy$ approximieren lassen.

Beachten wir noch die Übersetzung zwischen Modulationen und Translationen vermöge der Fouriertransformation, konkret $e^{i\langle x,y \rangle} \widehat{u}(y) = (M_x \widehat{u})(y) = \widehat{T_{-x}u}(y)$, dann ergibt sich mit einer weiteren Eigenschaft aus 3.3 und der Substitution $z = ry$ im letzten Schritt der folgenden Berechnung nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{i\langle x,y \rangle} \widehat{u}(y)}_{(M_x \widehat{u})(y)} g_r(y) dy &= \langle \widehat{T_{-x}u}, g_r \rangle = \langle T_{-x}u, \widehat{g}_r \rangle = \langle T_{-x}u, r^n S_r g \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y+x) r^n g(ry) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u\left(\frac{z}{r} + x\right) g(z) dz. \end{aligned}$$

Im Limes $r \rightarrow \infty$ kommen wir ganz links auf $\int M_x \widehat{u}$ und ganz rechts auf $u(x) \int g$, wobei das Gauß-Integral bekanntlich $\int_{\mathbb{R}^n} g(z) dz = (2\pi)^{n/2}$ ergibt; zusammenfassend erhalten wir also

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y \rangle} \widehat{u}(y) dy = (2\pi)^{n/2} u(x)$$

und somit die Behauptung. □

Schließlich bemerken wir noch, dass auch Faltung und Fouriertransformation auf \mathcal{S} wunderbar Hand in Hand gehen (für den Beweis siehe [FK2, §12, 3.5]):

$$\text{Für alle } u, v \in \mathcal{S} \text{ gilt: } \widehat{u * v} = (2\pi)^{n/2} \widehat{u} \cdot \widehat{v} \text{ sowie } \widehat{u} * \widehat{v} = (2\pi)^{n/2} \widehat{(u \cdot v)}.$$

Beispiel (Eigenwertgleichung von $-\Delta$): Für gegebenes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ wollen wir die Lösbarkeit der Gleichung

$$(-\Delta - \lambda)u = f$$

mit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ studieren. Mittels Fouriertransformation erhalten wir sofort die (in \mathcal{S} !) äquivalente Bedingung

$$(\star) \quad (\|y\|^2 - \lambda) \widehat{u}(y) = \widehat{f}(y) \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

1. Fall $\lambda \geq 0$: Die Existenz einer Lösung hängt stark von spezifischen Eigenschaften von f ab, weil für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| = \sqrt{\lambda}$ zwingend $\widehat{f}(y) = (\|y\|^2 - \lambda) \widehat{u}(y) = 0$ folgt. Z.B. mit der Gauß-Funktion für f , also $f(x) = \exp(-\|x\|^2/2)$, gibt es dann gar keine Lösung $u \in \mathcal{S}$.

2. Fall $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } \lambda < 0$ oder ($\text{Re } \lambda \geq 0$ und $\text{Im } \lambda \neq 0$): Dies beschreibt also für λ das komplexe Gebiet, das aus allen Punkten außerhalb der Halbachse der nichtnegativen reellen

Zahlen besteht. Somit hat λ einen positiven Mindestabstand $\rho > 0$ zu dieser Halbachse, es gilt also

$$\left| \|y\|^2 - \lambda \right| \geq \rho > 0 \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Die Funktion $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(y) := 1/(\|y\|^2 - \lambda)$ ist daher glatt und sicherlich polynomial beschränkt auf \mathbb{R}^n , weil alle Ableitungen von h rationale Funktionen in den Variablen y_1, \dots, y_n sind und alle auftretenden Nenner durch Potenzen von ρ beschränkt sind. Daher ist $h\hat{f} \in \mathcal{S}$ und wir können die Gleichung (\star) durch $u \in \mathcal{S}$ mit $\hat{u} = h\hat{f}$ lösen, d.h.

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}(h\hat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \frac{\hat{f}(y)}{\|y\|^2 - \lambda} dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

ist eine Lösung der Resolventen ~~Eigenwert~~ Gleichung. Weil \hat{u} durch (\star) als glatte Funktion festgelegt ist und \mathcal{F} injektiv, ist die Lösung u sogar eindeutig.

Im Spezialfall $n = 1$ und $\lambda = -a^2$ mit $a > 0$ können wir die obige Lösungsformel noch viel konkreter ausformulieren. Wir haben in dem Fall $h(y) = 1/(y^2 + a^2)$, also $h \in L^1(\mathbb{R})$ und ein Blick auf (2.13) zusammen mit einer einfachen Substitution $t = y/a$ liefert sofort $\hat{h}(x) = \sqrt{\pi} e^{-a|x|}/(a\sqrt{2}) =: v(x)$, insbesondere auch $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$. Nach dem L^1 -Umkehrsatz und wegen $h(-y) = h(y)$ folgt daher $h = \hat{v}$ und wir erhalten in obiger Lösungsformel

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{F}^{-1}(h\hat{f})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (v * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|x-y|} f(y) dy = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|} f(y) dy. \end{aligned}$$

3.6. Fouriertransformation auf L^2 : Die rasch fallenden Funktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. zu jedem $f \in L^2$ gibt es eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $u_m \in \mathcal{S}$ mit der Eigenschaft $\|f - u_m\|_2 \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ ([FK2, §10, 3.3]). Daher wollen wir die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ durch Grenzwertbildungen zu einer (genau gleich bezeichneten) linearen Abbildung $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ ausdehnen. Wir erinnern daran, dass $\|f\|_2 = \sqrt{\int |f|^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ mit dem komplexen Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int \bar{f}g$ ist.

Dieses „Ausdehnungsprojekt“ funktioniert auf Grund der folgenden Eigenschaften: Zunächst bemerken wir, dass für $u \in \mathcal{S}$ wegen $\int e^{-i\langle x, y \rangle} u(-x) dx = \int e^{i\langle x, y \rangle} u(x) dx$ stets $\overline{\widehat{u(-x)}}(y) := \widehat{u}(-y)$ gilt und

$$\overline{\widehat{u}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \overline{u(x)} dx = \widehat{u}(-y)$$

ist, somit also $\overline{\widehat{u}}(x) = \widehat{\widehat{u}}(-x) = \widehat{\widehat{u}}(x)$, d.h. kurz $\overline{\widehat{u}} = \widehat{\widehat{u}}$. Damit und kombiniert mit der ersten Eigenschaft aus 3.3 gehen wir nun für beliebige $u, v \in \mathcal{S}$ in die Berechnung von L^2 -Skalarprodukten

$$\langle u, v \rangle = \int \overline{u} v = \int \widehat{\widehat{u}} v = \int \widehat{u} \widehat{v} = \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle.$$

Insbesondere folgt daraus $\|\widehat{u}\|_2 = \|u\|_2$ und zusammenfassend gelangen wir zum

Satz von Plancherel: Die Fouriertransformation lässt sich ausdehnen zu einem unitären Operator $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. \mathcal{F} ist linear bijektiv und erfüllt

$$\langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}v \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \text{insbesondere} \quad \|\mathcal{F}u\|_2 = \|u\|_2.$$

Bemerkung (Hermite-Funktionen in einer Dimension): Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $H_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}),$$

$c_n := 1/\sqrt{\sqrt{\pi}n!2^n}$ und $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h_n(x) := c_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Dann lässt sich zeigen ([FK2, §12, 5.2]), dass $h_n \in \mathcal{S} \subseteq L^2$ gilt und $\|h_n\|_2 = 1$ bzw. konkreter noch

$$\langle h_m, h_n \rangle = \delta_{mn},$$

also ist $\{h_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Orthonormalsystem in L^2 . Es ist sogar ein *vollständiges Orthonormalsystem*, weil für jedes $u \in L^2$ im Sinne der Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_2$ die Reihenentwicklung

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle h_n, u \rangle h_n$$

mit eindeutigen Koeffizienten gilt. Vergleichen Sie das mit Orthonormalbasis-Entwicklungen in unitären Vektorräumen aus der Linearen Algebra.

Als zusätzliche Sondereigenschaft stellt sich heraus, dass die n -te Hermite-Funktion h_n jeweils eine Eigenfunktion der Fouriertransformation \mathcal{F} mit Eigenwert $(-i)^n$ ist, d.h.

$$\widehat{h}_n = (-i)^n h_n.$$

4. Distributionen

Wir skizzieren hier Methoden, die es erlauben den Begriff der üblichen Funktionen zu verallgemeinern, z.B. um auch Ableitungen von nichtdifferenzierbaren Funktionen oder Grenzwerte für klassisch nicht konvergente Folgen oder Reihen zu erhalten.

4.1. Zwei paradigmatische Beispiele:

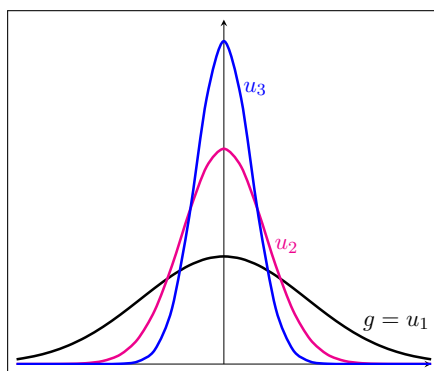
1) Wir betrachten eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Skalierungen

$$u_k(x) := kg(kx) \quad (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

der Standard-Gauß-Funktion $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$g(x) := e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi},$$

mit der Eigenschaft $\int g = 1$. Dann gilt $u_k \in \mathcal{S}$ und $\int u_k = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Die Folge (u_k) ist unbeschränkt im L^2 , denn



$$\|u_k\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 g(kx)^2 dx = k \int_{-\infty}^{\infty} g(y)^2 dy = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Aber im Skalarprodukt mit jedem festen $\varphi \in \mathcal{S}$ haben wir Konvergenz¹ für $k \rightarrow \infty$:

$$\langle u_k, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} kg(kx)\varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(y/k) dy \rightarrow \varphi(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = \varphi(0).$$

Wollten wir nun diesen Grenzwert auch als Skalarprodukt $\varphi(0) = \langle u, \varphi \rangle$ mit einer — wenigstens lokal Lebesgue-integrierbaren — Funktion u interpretieren, so müssten wir hinnehmen, dass dies unmöglich ist ([FK2, §13, 2.4]). Dennoch ist die Zuordnung $\delta_0: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(0)$ ein lineares Funktional, das wir hier sozusagen als punktwisen Limes der Folge von linearen Funktionalen $\varphi \mapsto \langle u_k, \varphi \rangle$ erhalten haben.

2) Schwache Lösungen der Wellengleichung: Für jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $c > 0$ ergibt

$$(4.1) \quad u(x, t) := \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct))$$

eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die Wellengleichung:

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \partial_t u(x, 0) = 0.$$

¹Hier kommt zum Beispiel „still und heimlich“ der Satz über dominierte Konvergenz aus der Lebesgue-Integrationstheorie zum Einsatz.

Das wird einfach durch direktes Nachrechnen klar und im Zeitverlauf bzgl. $t > 0$ lassen sich die Graphen von $x \mapsto u(x, t)$ interpretieren als arithmetisches Mittel des nach links ($x \mapsto f(x + ct)$) und nach rechts ($x \mapsto f(x - ct)$) gewanderten anfänglichen Wellenprofils.

Nun hängt die Konstruktion (4.1) der wandernden Wellenprofile eigentlich gar nicht von der C^2 -Regularität von f ab und kann natürlich für weitaus allgemeinere, auch unstetige, Funktionen sinnvoll eine Wellenausbreitung beschreiben, insbesondere also auch Stoßwellen mit Sprungstellen im Anfangsprofil f . Aber in welchem Sinne könnten solche Funktionen $u(x, t) = (f(x + ct) - f(x - ct))/2$ noch als „Lösungen einer Wellengleichung“ gelten?

Dazu probieren wir wieder den „Skalarprodukttrick“: Wir multiplizieren zunächst die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ für eine klassische Lösung u mit einer glatten Funktion φ auf \mathbb{R}^2 , die außerhalb einer kompakten Menge verschwindet. Die Wahl solcher Testfunktionen φ erlaubt uns nämlich beim anschließenden Integrieren Randterme zu vernachlässigen. Wir wählen dazu unten im ersten Schritt die Integrationsreihenfolge in den Termen jeweils so, dass wir im inneren Integral partielle Integration anwenden können und berechnen also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u)(x, t) \varphi(x, t) \, d(x, t) \\ &= \iint \partial_t^2 u(x, t) \varphi(x, t) \, dt \, dx - c^2 \iint \partial_x^2 u(x, t) \varphi(x, t) \, dx \, dt \\ &= - \iint \partial_t u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) \, dt \, dx + c^2 \iint \partial_x u(x, t) \partial_x \varphi(x, t) \, dx \, dt \\ &= \iint u(x, t) \partial_t^2 \varphi(x, t) \, dt \, dx - c^2 \iint u(x, t) \partial_x^2 \varphi(x, t) \, dx \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) (\partial_t^2 \varphi - c^2 \partial_x^2 \varphi)(x, t) \, d(x, t). \end{aligned}$$

Wir haben somit die Differentiationen von u auf die „Testfunktion“ φ hinübergewälzt und am Schluss einen Ausdruck erhalten, der auch für unstetige Funktionen u zumindest definiert ist; u braucht nur über kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^2 integrierbar zu sein, was *lokalintegabel* genannt wird. Für solche Funktionen u haben wir nun also den Begriff einer *schwachen Lösung* der Wellengleichung entwickelt, welcher fordert, dass für jede Testfunktion φ die Gleichung

$$(4.2) \quad \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) (\partial_t^2 \varphi - c^2 \partial_x^2 \varphi)(x, t) \, d(x, t) = 0$$

besteht. Mit etwas Mühe, aber im Prinzip elementar, kann man z.B. nachweisen, dass eine Funktion u , die wie in (4.1) aus einer beliebigen lokalintegablen Funktion f auf \mathbb{R} entsteht, für jede Testfunktion φ tatsächlich die Gleichung (4.2) erfüllt, also eine schwache Lösung ist. Weiters stimmt es auch, dass eine schwache Lösung, die mindestens Regularität C^2 hat, stets eine klassische Lösung der Wellengleichung ist. (Der Beweis für diese Tatsache benötigt als Lemma, dass die Eigenschaft $\int v \varphi = 0$ für jede Testfunktion immer $v = 0$ f.ü. impliziert.)

Zusammenfassend sind wir zum Begriff der schwachen Lösung gelangt, indem wir u vermöge $\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle := \int u \varphi$ als *lineares Funktional auf den Testfunktionen* aufgefasst haben und Ableitungen durch die Resultate einer partiellen Integration für klassische Lösungen modelliert haben. D.h. wir haben quasi z.B. $\partial_x u$ für eine eventuell auch unstetige Funktion u definiert durch die Wirkung des Funktionals auf Testfunktionen: $\langle \partial_x u, \varphi \rangle := -\langle u, \partial_x \varphi \rangle$ etc.

4.2. Das Konzept der Distributionen: Für eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ den Vektorraum aller *Testfunktionen*, das ist die Menge² aller C^∞ -Funktionen, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω verschwinden. Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ schreiben wir oft kurz \mathcal{D} statt $\mathcal{D}(\Omega)$.

Wir nennen eine Folge (φ_k) von Testfunktionen *konvergent* gegen die Testfunktion φ , falls es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ gibt, sodass für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt: Jedes φ_k verschwindet außerhalb K und $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$.

Eine *Distribution* (oder verallgemeinerte Funktion) auf Ω ist ein stetiges lineares Funktional $U: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle U, \varphi \rangle$, d.h.

- (i) $\langle U, a\varphi + b\psi \rangle = a\langle U, \varphi \rangle + b\langle U, \psi \rangle$ für $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $a, b \in \mathbb{C}$,
- (ii) $\varphi_k \rightarrow 0$ impliziert $\langle U, \varphi_k \rangle \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). (Bem.: Daraus folgt $\varphi_k \rightarrow \varphi \Rightarrow \langle U, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle U, \varphi \rangle$.)

Die Menge aller Distributionen auf Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$, kurz \mathcal{D}' im Falle von $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Beispiele: 1) Für festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die *Dirac-Distribution* $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'$ gegeben als Auswertung

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle := \varphi(x_0) \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

2) Für jedes $j = 1, \dots, n$ ist $\varphi \mapsto \partial_j \varphi(x_0)$ eine Distribution; auch $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

3) Wir bezeichnen die Menge aller *lokalintegriblen* Funktionen auf \mathbb{R}^n mit L_{loc}^1 , d.h. diese sind integrierbar auf jeder kompakten Teilmenge. Für $f \in L_{\text{loc}}^1$ erhalten wir durch die Zuordnung

$$\varphi \mapsto \int f\varphi =: \langle I_f, \varphi \rangle$$

eine sogenannte *reguläre Distribution* I_f . Wir schreiben in dem Fall aber oft auch einfach $\langle f, \varphi \rangle$ statt $\langle I_f, \varphi \rangle$. Wie bereits in 4.1, Beispiel 1), erwähnt ist die Dirac-Distribution δ_{x_0} nicht regulär, d.h. es gibt kein $f \in L_{\text{loc}}^1$ mit $\delta_{x_0} = I_f$ bzw. $\varphi(\mathbf{0}) = \int f\varphi$ für alle Testfunktionen φ .

4) Wir betrachten die *Heaviside-Distribution* I_θ auf \mathbb{R} , die als reguläre Distribution entsprechend der *Heaviside-Funktion* $\theta \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ mit $\theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\theta(x) = 1$ für $x > 0$ gegeben ist (der Wert bei $x = 0$ ist für die distributionelle Wirkung unerheblich) und schreiben auch gleich θ statt I_θ , d.h.

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) dx.$$

Bemerkung: Die Menge \mathcal{D}' ist natürlich ein Vektorraum, weil für $a, b \in \mathbb{C}$ und $u, v \in \mathcal{D}'$ das lineare Funktional $au + bv \in \mathcal{D}'$ wie üblich durch die Wirkung auf Testfunktionen gegeben ist, d.h.

$$\langle au + bv, \varphi \rangle := a\langle u, \varphi \rangle + b\langle v, \varphi \rangle,$$

und somit selbst ein lineares Funktional sowie stetig im Sinne von (ii) in der obigen Definition ist. Wir können also z.B. auf \mathbb{R} die Distribution $5\delta_0 + 3\theta$ betrachten mit der Wirkung $\varphi \mapsto 5\varphi(0) + 3 \int_0^\infty \varphi(x) dx$.

²Wie z.B. in [FK2, §10] gezeigt wird, ist $\mathcal{D}(\Omega)$ durchaus reichhaltig.

4.3. Konvergenz: Eine Folge $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Distributionen ist *konvergent* gegen die Distribution U , Notation $U_k \rightarrow U$ für $k \rightarrow \infty$, falls für jede Testfunktion φ gilt

$$\langle U_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle U, \varphi \rangle \quad (k \rightarrow \infty).$$

Beispiele: 1) Wir hatten in 4.1, Beispiel 1), die Folge (u_k) von Funktionen auf \mathbb{R} mit $u_k(x) = ke^{-k^2x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Fassen wir jedes u_k als reguläre Distribution $u_k \in \mathcal{D}'$ auf, dann zeigt die dortige Rechnung gerade $u_k \rightarrow \delta_0$ für $k \rightarrow \infty$ im Sinne der Distributionen, weil $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ gilt und sich daher auch für jede Testfunktion

$$\langle u_k, \varphi \rangle = \int u_k \varphi \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad (k \rightarrow \infty)$$

ergibt.

2) Ist $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige nichtnegative Funktion, die außerhalb der Einheitskugel verschwindet und $\int \rho = 1$ erfüllt, dann können wir für fixes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und beliebiges $r > 0$ die Funktion

$$u_r(x) := \frac{1}{r^n} \rho\left(\frac{x - x_0}{r}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

definieren. Es gilt $u_r \rightarrow \delta_{x_0}$ ($r \rightarrow 0$) im Sinne der Distributionen, denn für jede Testfunktion φ berechnen wir mittels einfacher Substitution und dominierter Konvergenz

$$\langle u_r, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \rho\left(\frac{x - x_0}{r}\right) \varphi(x) \frac{dx}{r^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \varphi(ry + x_0) dy \rightarrow \varphi(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle.$$

Nach Konstruktion ist $u_r \geq 0$ stetig, verschwindet außerhalb der Kugel vom Radius r um x_0 und erfüllt $\int u_r = \int \rho = 1$. Allgemeiner gilt für jede Familie von Funktionen u_r ($r > 0$) mit diesen drei Eigenschaften stets $u_r \rightarrow \delta_{x_0}$ in \mathcal{D}' für $r \rightarrow 0$ (vgl. [FK2, §13, 3.2]).

Bemerkung: Da die Funktionen u_r im Beispiel 2) für kleiner werdendes $r > 0$ immer stärker nahe x_0 lokalisiert sind und $u_r \geq 0$ sowie $\int u_r = 1$ gilt, kann dies im Limes als punktförmig konzentrierte Einheitsdichte in x_0 interpretiert werden. Insofern kann beispielsweise $q\delta_{x_0}$ mit $q \in \mathbb{R}$ für die Modellierung einer Punktladung in x_0 verwendet werden; endlich viele Punktladungen mit Werten q_1, \dots, q_N an den Stellen x_1, \dots, x_N werden dann einfach durch die Linearkombination $q_1\delta_{x_1} + \dots + q_N\delta_{x_N}$ in \mathcal{D}' dargestellt.

4.4. Differentiation: Die grundlegende Idee für die unten folgende Definition von distributionellen Ableitungen haben wir schon am Ende von Beispiel 2) zu schwachen Lösungen in 4.1 entwickelt. Hier können wir diese Erkenntnis nochmal im Kontext einer regulären Distribution I_f entsprechend einer C^1 -Funktion f auf \mathbb{R} konkreter machen, weil in dem Fall sowohl f als auch die Ableitung f' zu L^1_{loc} gehört: Für jede Testfunktion φ ist nämlich

$$\langle I_{f'}, \varphi \rangle = \int f'(x) \varphi(x) dx = - \int f(x) \varphi'(x) dx = - \langle I_f, \varphi' \rangle.$$

Ähnlich erhalten wir allgemeiner für $f \in C^{\underline{m}}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| < m+1$ auch

$$\langle I_{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle I_f, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Wir definieren daher für eine Distribution U auf \mathbb{R}^n die Ableitung $\partial^\alpha U \in \mathcal{D}'$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ durch ihre Wirkung auf Testfunktionen (Linearität und Stetigkeit von $\partial^\alpha U$ ergeben sich unmittelbar)

$$\langle \partial^\alpha U, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle U, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Beispiele: 1) Für die Heaviside-Distribution (bzw. Funktion) θ auf \mathbb{R} ist

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -\varphi|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

also kurz gefasst $\boxed{\theta' = \delta_0}$.

2) Nun berechnen wir für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ auch noch

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_{x_0}, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

Speziell für $n = 1$, $x_0 = 0$ und $|\alpha| = 1$ gilt also $\boxed{\langle \theta'', \varphi \rangle = \langle \delta_0', \varphi \rangle = -\varphi'(0)}$.

3) Für eine beliebige Distribution U auf \mathbb{R}^n und $1 \leq j, k \leq n$ ist stets

$$\langle \partial_j \partial_k U, \varphi \rangle = -\langle \partial_k U, \partial_j \varphi \rangle = \langle U, \partial_k \partial_j \varphi \rangle = \langle U, \partial_j \partial_k \varphi \rangle = -\langle \partial_j U, \partial_k \varphi \rangle = \langle \partial_k \partial_j U, \varphi \rangle$$

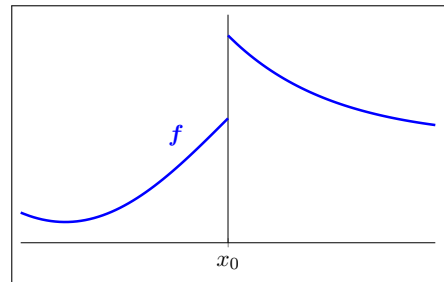
und somit vertauschen distributionelle partielle Ableitungen immer, d.h. $\boxed{\partial_j \partial_k U = \partial_k \partial_j U}$.

Ist etwas allgemeiner $L = c + \sum_{k=1}^n b_k \partial_k + \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_k \partial_l$ ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten c, b_k, a_{kl} , dann ist

$$\langle LU, \varphi \rangle = \langle U, L^T \varphi \rangle \quad (U \in \mathcal{D}', \varphi \in \mathcal{D})$$

mit dem (*formal*) adjungierten Differentialoperator $L^T = c - \sum_{k=1}^n b_k \partial_k + \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \partial_k \partial_l$.

4) Wir betrachten eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die jeweils C^1 ist auf $] -\infty, x_0[$ und $]x_0, \infty[$ und bei x_0 alle einseitigen Limiten für f und f' besitzt, d.h. es existieren $f(x_0 \pm) := \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ und auch $f'(x_0 \pm) := \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f'(x)$. Letzteres garantiert, dass auch die „adaptierte klassische“ Ableitung \tilde{f}' lokal integrierbar ist, die wir einfach durch $\tilde{f}'(x) := f'(x)$ für $x \neq x_0$ und $\tilde{f}'(x_0) := 0$ definieren.



Wir berechnen die distributionelle Ableitung

$$\begin{aligned} \langle (I_f)', \varphi \rangle &= -\langle I_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= - (f\varphi)|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x) \varphi(x) dx - (f\varphi)|_{x_0}^{\infty} + \int_{x_0}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}'(x) \varphi(x) dx - f(x_0-) \varphi(x_0) + f(x_0+) \varphi(x_0) = \langle I_{\tilde{f}'}, \varphi \rangle + (f(x_0+) - f(x_0-)) \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Somit können wir (ein bisschen salopp) folgende intuitiv ansprechende Gleichung notieren

$$f' = \tilde{f}' + (f(x_0+) - f(x_0-)) \delta_{x_0},$$

wo sich also die Sprunghöhe im Falle einer Unstetigkeit von f bei x_0 in der Ableitung kombiniert mit einer Dirac-Distribution an der entsprechenden Stelle direkt bemerkbar macht.

Stetigkeit der Differentiation: Ist die Folge (U_k) von Distributionen auf \mathbb{R}^n konvergent gegen $U \in \mathcal{D}'$, dann gilt auch für jede partielle Ableitung ∂_j ($j = 1, \dots, n$) die Konvergenz $\partial_j U_k \rightarrow \partial_j U$ ($k \rightarrow \infty$), d.h. $\partial_j: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ ist stetig. Der Beweis ist ein Einzeiler:

$$\langle \partial_j U_k, \varphi \rangle = -\langle U_k, \partial_j \varphi \rangle \rightarrow -\langle U, \partial_j \varphi \rangle = \langle \partial_j U, \varphi \rangle \quad (k \rightarrow \infty).$$

4.5. Weitere Operationen und Konstruktionen mit Distributionen: Ähnlich wie bei der Definition der Ableitung können wir gelegentlich geeignete Formeln für neue Operationen mit Distributionen von dem Spezialfall abschauen, wo wir zunächst eine (genügend) reguläre Distribution auf Testfunktionen mittels Integration wirken lassen. (Mehr Details oder Hintergrund für die Inhalte hier und im Rest des Kapitels finden Sie z.B. in [BB] oder [App].)

(a) Multiplikation mit C^∞ -Funktionen: Ist $f \in L^1_{\text{loc}}$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann ist natürlich $\int (gf)\varphi = \int f(g\varphi)$ und auch $g\varphi \in \mathcal{D}$ für $\varphi \in \mathcal{D}$. Also definieren wir problemlos für $U \in \mathcal{D}'$ die Multiplikation mit g durch

$$\langle gU, \varphi \rangle := \langle U, g\varphi \rangle$$

und eine einfache Rechnung beweist übrigens auch direkt die Eigenschaft

$$\partial_j(gU) = (\partial_j g)U + g\partial_j U.$$

(b) Koordinatentransformationen: Ist $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $\varphi \in \mathcal{D}$, dann ist auch $\varphi \circ F^{-1}$ eine Testfunktion (Glattheit ist klar und $y \mapsto \varphi(F^{-1}(y))$ verschwindet außerhalb der kompakten Menge $F(K)$, falls φ außerhalb der kompakten Menge K verschwindet). Ist $u \in L^1_{\text{loc}}$, dann erhalten wir mittels Transformationsformel für Mehrfachintegrale

$$\begin{aligned} \langle u \circ F, \varphi \rangle &= \int u(F(x))\varphi(x) dx \\ &= \int u(y)|\det dF^{-1}(y)|\varphi(F^{-1}(y)) dy = \langle u, |\det dF^{-1}|(\varphi \circ F^{-1}) \rangle. \end{aligned}$$

Somit wird uns folgende Definition für $U \in \mathcal{D}'$ nahegelegt:

$$\langle U \circ F, \varphi \rangle := \langle U, |\det dF^{-1}|(\varphi \circ F^{-1}) \rangle.$$

Der Spezialfall $F(x) = Ax + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und einer invertierbaren $(n \times n)$ -Matrix A ergibt z.B. wegen $dF(x) = A$ einfach

$$\langle U \circ F, \varphi \rangle = \langle U, (\varphi \circ F^{-1})/|\det A| \rangle,$$

wobei natürlich $F^{-1}(y) = A^{-1}(y - b)$ gilt.

(c) Faltung von Distributionen mit Testfunktionen: Ist $u \in L^1_{\text{loc}}$ und $\varphi \in \mathcal{D}$, dann können wir ebenso eine Faltung $u * \varphi$ definieren durch

$$u * \varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(z)\varphi(x-z) dz,$$

weil φ ja außerhalb einer kompakten Menge verschwindet. Den letzten Integralausdruck interpretieren wir mit dem Diffeomorphismus $F_x(y) := x - y$, der natürlich $F_x^{-1} = F_x$ und $|\det dF_x^{-1}| = 1$ erfüllt. Es ergibt sich

$$u * \varphi(x) = \langle U \circ F_x, \varphi \rangle = \langle u, |\det dF_x^{-1}| (\varphi \circ F_x^{-1}) \rangle = \langle u, \varphi \circ F_x \rangle = \langle u, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

Damit haben wir nun aber sogar eine Formel, die wir für $U * \varphi$ mit $U \in \mathcal{D}'$ verwenden können:

$$U * \varphi(x) := \langle U, \varphi \circ F_x \rangle = \langle U, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

Es lässt sich relativ einfach zeigen, dass $x \mapsto U * \varphi(x)$ eine glatte Funktion ist und

$$\partial_j(U * \varphi) = (\partial_j U) * \varphi = U * \partial_j \varphi$$

gilt. Im Spezialfall $U = \delta_0$ erhalten wir $\delta_0 * \varphi(x) = \langle \delta_0, \varphi(x - \cdot) \rangle = \varphi(x - 0) = \varphi(x)$.

Bemerkungen: (i) Das Konzept der Faltung lässt sich sogar auf gewisse Paarungen von Distributionen U und V erweitern, z.B. wenn eine davon in ihrer Wirkung auf allen Testfunktionen verschwindet, die außerhalb einer bestimmten kompakten Menge konzentriert sind. In diesen Fällen ist $U * V$ eine Distribution und es gilt ebenso

$$\partial_j(U * V) = (\partial_j U) * V = U * \partial_j V.$$

Nach dem Resultat im obigen Spezialfall wenig überraschend gilt auch stets

$$\delta_0 * V = V.$$

(ii) Eine *Fundamentallösung* für den linearen partiellen Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

mit konstanten Koeffizienten a_α ist eine Distribution E , die die Gleichung

$$(4.3) \quad LE = \delta_0$$

erfüllt. So eine Fundamentallösung kann unter Umständen eine Art „Universalschlüssel“ zur Konstruktion von Lösungen U für die Differentialgleichung

$$LU = F \in \mathcal{D}'$$

sein, insbesondere wenn das Faltungsprodukt $E * F$ existiert. In solchen Fällen erhalten wir nämlich wegen $a_\alpha \partial^\alpha (E * F) = (a_\alpha \partial^\alpha E) * F$ für jeden Term von L durch den Ansatz $U := E * F$ unmittelbar eine Lösung:

$$LU = L(E * F) = (LE) * F = \delta_0 * F = F.$$

Anwendung einer Translation $G_{x_0}(x) := x - x_0$ (als Diffeomorphismus) auf die distributionelle Gleichung (4.3) und $E_{x_0} := E \circ G_{x_0}$ sowie $\delta_0 \circ G_{x_0} = \delta_{x_0}$ führt übrigens auf $L(E_{x_0}) = \delta_{x_0}$. Daher lässt sich E_{x_0} in geeignetem Zusammenhang physikalisch interpretieren als Lösung für eine punktförmige Quelle bei x_0 .

4.6. Fouriertransformation für temperierte Distributionen: Wir haben in 3.5 im Zusammenhang mit der Fouriertransformation \mathcal{F} die stark fallenden Funktionen \mathcal{S} eingeführt und gesehen, dass $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ein Isomorphismus ist. Aus den Definitionen folgt unmittelbar $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ und damit auch $\mathcal{F}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{S}$. Allerdings macht Bemerkung (ii) in 3.2 sofort $\mathcal{F}(\mathcal{D}) \not\subseteq \mathcal{D}$ klar, weil $\widehat{\varphi}$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ ja holomorph ist und deshalb nicht außerhalb einer kompakten Menge verschwinden kann, ohne bereits die Nullfunktion zu sein. Aus diesem Grund ist \mathcal{S} statt \mathcal{D} der geeignetere Testfunktionenraum, wenn wir die Fouriertransformation auf Distributionen erweitern wollen.

Wenn wir uns an die erste Eigenschaft in 3.3 erinnern, dann haben wir für $u \in L^1$ und $v \in \mathcal{S}$ mit der Gleichung

$$\langle \widehat{u}, v \rangle = \int \widehat{u}v = \int u\widehat{v} = \langle u, \widehat{v} \rangle$$

bereits einen „Prototypen“ für die distributionelle Variante. Allerdings können wir dies dann nur auf lineare Funktionale anwenden, die auch auf dem größeren Testfunktionenraum \mathcal{S} definiert sind.

Wir führen auf \mathcal{S} zuvor noch einen passenden Konvergenzbegriff ein: Eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von rasch fallenden Funktionen *konvergiert* gegen $\varphi \in \mathcal{S}$, falls wir für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gleichmäßige Konvergenz $x^\alpha \partial^\beta \varphi_k \rightarrow x^\alpha \partial^\beta \varphi$ für $k \rightarrow \infty$ haben.

Eine *temperierte Distribution* ist ein lineares Funktional $U: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle U, \varphi \rangle$, das im folgenden Sinne stetig ist: Konvergenz $\varphi_k \rightarrow 0$ in \mathcal{S} impliziert stets $\langle U, \varphi_k \rangle \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). (Daraus folgt auch die Eigenschaft $\varphi_k \rightarrow \varphi \Rightarrow \langle U, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle U, \varphi \rangle$.)

Die Menge aller temperierten Distributionen bezeichnen wir mit \mathcal{S}' .

Eine große Klasse von Funktionen u kann mittels Integralwirkung als reguläre temperierte Distributionen aufgefasst werden, z.B. jede Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}$ mit der Eigenschaft, dass für ein gewisses $N \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $x \mapsto |u(x)|/(1 + \|x\|^N)$ integrierbar auf \mathbb{R}^n ist. Insbesondere ist also jede polynomial beschränkte stetige Funktion eine reguläre temperierte Distribution. Die Dirac-Distribution δ_{x_0} ist temperiert, aber nicht regulär.

Erwartungsgemäß definieren wir nun die *Fouriertransformierte* $\mathcal{F}U = \widehat{U}$ einer temperierten Distribution $U \in \mathcal{S}'$ durch

$$\langle \widehat{U}, \varphi \rangle := \langle U, \widehat{\varphi} \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}).$$

Die Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ist linear, bijektiv und die Inverse \mathcal{F}^{-1} lässt sich mittels Punktspiegelung $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(x) := -x$ (ein Diffeomorphismus) rein distributionell so beschreiben:

$$\mathcal{F}^{-1}U = (\mathcal{F}U) \circ \sigma.$$

Die Ableitungs- und Multiplikationsoperatoren Q^α und P^α sind ebenso auf \mathcal{S}' definiert und es gelten auch die Austauschformeln analog zu (3.3) nun für $U \in \mathcal{S}'$, d.h.

$$\widehat{P^\alpha U} = Q^\alpha \widehat{U} \quad \text{und} \quad \widehat{Q^\alpha U} = (-1)^{|\alpha|} P^\alpha \widehat{U}.$$

Schließlich hat die Fouriertransformation auch auf \mathcal{S}' die Eigenschaft, Modulationen und Translationen in einander überzuführen: $\mathcal{F}(T_a U) = M_{-a} \mathcal{F}U$ und $\mathcal{F}(M_a U) = T_a(\mathcal{F}U)$.

Beispiele: 1) Die konstante Funktion 1 ist eine reguläre temperierte Distribution und

$$\langle \widehat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(y) dy = (2\pi)^{n/2} \varphi(0) = (2\pi)^{n/2} \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

d.h. $\widehat{1} = (2\pi)^{n/2} \delta_0$.

2) Etwas allgemeiner können wir die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ als $Q^\alpha 1$ auffassen und erhalten mit einer Austauschformel

$$\widehat{x^\alpha} = \widehat{Q^\alpha 1} = (-1)^{|\alpha|} P^\alpha \widehat{1} = (2\pi)^{n/2} (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0 = (2\pi)^{n/2} i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0.$$

3) Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \widehat{\delta_{x_0}}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(x_0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x_0, x \rangle} \varphi(x) dx = \left\langle \frac{e^{-i\langle x_0, \cdot \rangle}}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi \right\rangle,$$

d.h. $\widehat{\delta_{x_0}}$ entspricht der Funktion $x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\langle x_0, x \rangle}$. Im Spezialfall $x_0 = 0$ erhalten wir als Resultat eine konstante Funktion, nämlich $\widehat{\delta_0} = (2\pi)^{-n/2}$. Dies folgt natürlich auch bereits aus Beispiel 1) zusammen mit der allgemeinen Relation $\mathcal{F}(\mathcal{F}U) = U \circ \sigma$, weil $1 \circ \sigma = 1$ gilt.

Stetigkeit der Fouriertransformation: Konvergenz einer Folge (U_k) von temperierten Distributionen gegen $U \in \mathcal{S}'$ ist ganz ähnlich erklärt wie der entsprechende Begriff in 4.3, nämlich, dass $\langle U_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle U, \varphi \rangle$ ($k \rightarrow \infty$) für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ gelten soll. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ist stetig in dem Sinne, dass $U_k \rightarrow U$ in \mathcal{S}' für $k \rightarrow \infty$ immer auch $\widehat{U}_k \rightarrow \widehat{U}$ in \mathcal{S}' nach sich zieht. Dies ist sogar ganz leicht gezeigt, denn

$$\langle \widehat{U}_k, \varphi \rangle = \langle U_k, \widehat{\varphi} \rangle \rightarrow \langle U, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{U}, \varphi \rangle \quad (k \rightarrow \infty).$$

Entsprechend folgt auch die Stetigkeit der Inversen \mathcal{F}^{-1} , dazu ist nur $\mathcal{F}^{-1}U = (\mathcal{F}U) \circ \sigma$, $\sigma^{-1} = \sigma$ und $|\det d\sigma(x)| = 1$ zu beachten, somit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}U_k, \varphi \rangle &= \langle (\mathcal{F}U_k) \circ \sigma, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}U_k, \varphi \circ \sigma \rangle = \langle U_k, \mathcal{F}(\varphi \circ \sigma) \rangle \rightarrow \langle U, \mathcal{F}(\varphi \circ \sigma) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}U, \varphi \circ \sigma \rangle = \langle (\mathcal{F}U) \circ \sigma, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}U, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Teil C

**Klassische partielle
Differentialgleichungen**

Wir besprechen in diesem VO-Teil eine Vielfalt an Methoden für das Studium der drei klassischen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten (reellen) Koeffizienten: Alle haben den Laplace-Operator bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ als wesentlichen Bestandteil der räumlichen Ableitungen und dazu kommen im Falle von Zeitabhängigkeiten noch erste oder zweite partielle Ableitungen bzgl. $t \in \mathbb{R}$, wodurch die Wärmeleitungsgleichung (auch Diffusionsgleichung) oder die Wellengleichung geprägt ist. (Die Schrödinger-Gleichung ist dann im Hintergrund der Konzepte für den folgenden Teil D dieser VO angesiedelt.)

Alle diese grundlegenden Gleichungen kommen in zentralen Modellen der Physik vor und wir werden hier keine eigene — wahrscheinlich auch vergleichsweise stümperhaft ausfallende — Beschreibung der Herleitung dieser Gleichungen versuchen. Außerdem ist im Rahmen dieser VO ohnehin zu wenig Zeit, das in Ruhe zu machen. Wir werden nicht einmal viel Muße haben, die präzisen mathematischen Rechtfertigungen der Lösungsmethoden im Detail auszuführen, uns oftmals mit nur kursorisch vorgestellten Theorien begnügen und uns letztlich auf die operativen Aspekte konzentrieren. Mehr Informationen zu all dem finden sich sehr übersichtlich dargestellt in [FK2]; teilweise vertiefend oder breiter dann z.B. auch in [Eva] und [Fol].

5. Separationsansätze

Die Strategie für Problemstellungen mit zwei unabhängigen Variablen ist hier

(a) zunächst spezielle Lösungen in Produktform zu suchen, wo jeder Faktor nur von einer der Variablen abhängt, und

(b) die Linearität der Grundgleichungen auszunützen, um allgemeinere Lösungen durch sogenannte Superposition (physikalisch gesprochen) bzw. Linearkombinationen (mathematisch gesprochen) der speziellen Lösungen aus (a) zu erhalten.

Wir illustrieren die Vorgangsweise hier nur an wenigen typischen Problemstellungen.

5.1. Eingespannte schwingende Saite: Die transversale Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t werde durch die Funktion $(x, t) \mapsto u(x, t)$ beschrieben, die den folgenden Bedingungen unterworfen ist:

$$(5.1) \quad \partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad (0 < x < L, t \in \mathbb{R}),$$

$$(5.2) \quad u(0, t) = 0 = u(L, t),$$

$$(5.3) \quad u(x, 0) = f(x),$$

$$(5.4) \quad \partial_t u(x, 0) = g(x),$$

wobei $L > 0$ und $c > 0$ aus der Problemstellung bekannte Konstanten sind sowie die Funktionen $f, g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben sind mit $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$. Gleichung (5.2) ist eine Randbedingung und beschreibt die Einspannung der Saite an den Enden und (5.1) ist die eindimensionale Wellengleichung. In Gleichungen (5.3) und (5.4) werden die Anfangsauslenkung sowie die Anfangsbeschleunigung der Saite vorgegeben (jeweils transversal).

Wir machen nun mal den Ansatz

$$u(x, t) = v(x)w(t)$$

und erhalten aus der Wellengleichung (5.1) unmittelbar $v(x)w''(t) = c^2 v''(x)w(t)$, was wir unter der Annahme $v(x) \neq 0, w(t) \neq 0$ in die Bedingung

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)}$$

übersetzen können. Hier hängt die linke Seite nur von t ab, während die rechte Seite nur von x abhängt. Beide Seiten müssen somit konstant sein, sagen wir mit dem gemeinsamen Wert $-\lambda c^2$ für ein passendes $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\frac{w''(t)}{w(t)} = -\lambda c^2 = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)}$. Daraus schließen wir auf folgende zwei Bedingungen an v und w separat:

$$(I) \quad v''(x) + \lambda v(x) = 0,$$

$$(II) \quad w''(t) + \lambda c^2 w(t) = 0.$$

Wir bemerken zunächst, dass für eine nichtkonstante Lösung v aus (I) die Information

$$\lambda > 0$$

folgt, denn mittels (I), (5.2) und partieller Integration ist

$$\lambda \int_0^L v^2 = - \int_0^L v v'' = - \underbrace{v v'}_0^L + \int_0^L (v')^2 = \int_0^L (v')^2 > 0.$$

Also ergibt (I) zusammen mit der Randbedingung (5.2) nun konkreter

$$\lambda > 0, \quad v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad v(0) = 0 = v(L),$$

und hat bekanntlich Lösungen der Gestalt $v(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wegen $0 = v(0) = a$ ist zunächst $v(x) = b \sin(\sqrt{\lambda} x)$, was für eine nichttriviale Lösung v also $b \neq 0$ erfordert. Somit erzwingt die andere Randbedingung $0 = v(L) = b \sin(\sqrt{\lambda} L)$ nun $0 < \sqrt{\lambda} L = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$, d.h. wir erhalten für jedes k eine Grundlösung v_k mit $b := 1$ und

$$(5.5) \quad \lambda_k := \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Gehen wir nun mit $\lambda_k = k^2\pi^2/L^2$ in die Gleichung (II) hinein. Die Lösungen dafür sind von der Gestalt

$$w_k(t) = a_k \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)$$

mit beliebigen Konstanten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Insgesamt haben wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Lösung von (5.1) und (5.2) in der Form

$$(5.6) \quad u_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right)$$

erhalten. Wegen der Linearität aller beteiligten Gleichungen ergeben natürlich auch endliche Summen $\sum_{k=1}^N u_k$ solcher Lösungen wieder eine Lösung. Mit ein wenig „Vorschussvertrauen“ in eine geeignete Konvergenz — sei es als klassische Funktionenreihe oder zumindest distributionell — machen wir nun den mutigen Lösungsansatz

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

und bemerken, dass wir es hier mit einer Fourierreihe in zwei Variablen (x und t) zu tun haben. Werten wir bei $t = 0$ aus und nehmen noch die Anfangsbedingung (5.3) zu Hilfe, dann folgt

$$(5.7) \quad f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

während formal gliedweises Differenzieren nach t , also $\partial_t u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \partial_t u_k(x, t)$, und anschließende Auswertung bei $t = 0$ zusammen mit (5.4) noch diese Zusatzinformation liefert

$$(5.8) \quad g(x) = \partial_t u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{L} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Wir stellen uns am besten vor, dass wir die Funktionen f und g zunächst als ungerade Funktionen auf $[-L, L]$ (mittels $f(-x) := -f(x)$ für $0 < x \leq L$ und ebenso für g) und anschließend auf ganz \mathbb{R} mit Periode $2L$ (also $f(x + n2L) := f(x)$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $-L \leq x \leq L$ und ebenso für g) fortgesetzt haben — das funktioniert übrigens wegen der Randbedingung (5.2) bzw. der Vorgaben $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$, die wir eingangs erwähnt hatten. Dann besteht nämlich die jeweilige Fourierreihenentwicklung (dieser Fortsetzungen) von f und g aus reinen Sinus-Reihen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

deren Koeffizienten c_k und d_k ($k \in \mathbb{N}$) also a priori bestimmt werden können und somit vermöge (5.7) und (5.8) auch die Konstanten a_k und b_k festlegen durch

$$a_k = c_k \quad \text{und} \quad b_k = \frac{Ld_k}{k\pi c}.$$

Dies belegt übrigens die Eindeutigkeit der Lösung (im Kontext der Fourierreihenentwicklungen) und es lässt sich darüberhinaus zeigen, dass wir für Anfangswerte $f \in C^3([0, L])$ und $g \in C^2([0, L])$ durch obiges Verfahren stets eine C^2 -Lösung u erhalten. Grob gesagt wird die Regularität der Anfangsdaten f und g in den Anwendungen jeweils steuern, wie gut die Reihe für u konvergiert und das ergibt sich von selbst aus der Güte der Fourierreihenentwicklungen (5.7) und (5.8).

Beispiel: Wir betrachten das Anfangs-Randwert-Problem mit $c = 1$, $L = \pi$, $g(x) = 0$ und der unstetigen Anfangsauslenkung $f(x) := x$ für $0 \leq x < \pi$, $f(\pi) := 0$. Ungerade und 2π -periodische Fortsetzung von f ergibt ein bekanntes Sägezahnprofil. Da es später beim Integrieren auf den konkreten Wert von f an der einen Stelle π nicht ankommt, schreiben wir das ganze Problem der Einfachheit halber gleich so an:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x, t) &= \partial_x^2 u(x, t) \quad (0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}), \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t) \quad (t > 0), \\ u(x, 0) &= x, \quad \partial_t u(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \pi). \end{aligned}$$

Der Lösungsansatz ist also

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

und die Bedingung $0 = \partial_t u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \sin(kx)$ ergibt sofort $b_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$).

Die Bedingung $x = f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ bedeutet nichts anderes als die Fourierreihenentwicklung (mit Periode 2π) zu berechnen. Für die ungerade Funktion f ist $x \mapsto f(x) \sin(kx)$ gerade, daher $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$ und somit ergibt eine einfache partielle Integration

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x \cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx = -\frac{2 \cos(k\pi)}{k} + \frac{2}{\pi k^2} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{k} (-1)^k + 0 = \frac{2}{k} (-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx) \cos(kt).$$

Um deren klassische Konvergenzeigenschaften ist es zwar wegen der Unstetigkeit von f nicht so gut bestellt, aber es wäre gar nicht schwierig zu zeigen, dass die gliedweise differenzierten Reihen für $\partial_t^2 u$ und $\partial_x^2 u$ distributionell konvergieren und $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ erfüllen.

5.2. Eindimensionale Wärmeleitung: Wir können nun auf ähnliche Art auch die folgende Problemstellung angehen, wobei $L > 0$ und $f(0) = f(L)$ vorgegeben sein soll:

$$(5.9) \quad \partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) \quad (0 < x < L, t > 0),$$

$$(5.10) \quad u(0, t) = 0 = u(L, t),$$

$$(5.11) \quad u(x, 0) = f(x).$$

Hier beschreibt $u(x, t)$ die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t in einem wärmeleitfähigen Draht, wobei die Drahtenden auf konstanter Temperatur 0 gehalten werden und f die anfängliche Temperaturverteilung angibt.

Wir machen wieder den Produktansatz

$$u(x, t) = v(x)w(t),$$

was in der Wärmeleitungsgleichung (5.9) auf $v(x)w'(t) = v''(x)w(t)$ führt. Unter der Annahme $v(x) \neq 0$, $w(t) \neq 0$ bedeutet dies nun

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda \quad (\text{konstant})$$

und somit in separaten Gleichungen für v und w :

$$(I) \quad v''(x) + \lambda v(x) = 0,$$

$$(II) \quad w'(t) + \lambda w(t) = 0.$$

Gleichung (II) hat grundsätzlich als Lösungen reelle Vielfache von $e^{-\lambda t}$ und für (I) sind die (nichttrivialen) Lösungen wieder Vielfache von $\sin(\sqrt{\lambda}x)$, wobei $\lambda > 0$ ist. Die Randbedingung (5.10) erzwingt $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, also muss $\sqrt{\lambda}L = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$ sein. Wir erhalten daher für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Lösung von (5.9) und (5.10) mit $\lambda_k := (k\pi/L)^2$ in der Form

$$(5.12) \quad u_k(x, t) = a_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

mit einer reellen Konstanten a_k und dann durch „Superposition“

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

eine Fourierreihe bzgl. x mit zusätzlichen t -abhängigen Dämpfungsfaktoren $e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t}$. Auswertung bei $t = 0$ in Kombination mit der Anfangsbedingung (5.11) ergibt schließlich

$$(5.13) \quad f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

d.h. die Koeffizienten a_k sind festgelegt durch die Fourierreihenentwicklung der ungeraden und $2L$ -periodischen Fortsetzung von f auf \mathbb{R} , somit folgt auch Eindeutigkeit der Lösung (in diesem Rahmen). Für die Konvergenzeigenschaften der Reihe $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$ gilt Ähnliches wie schon bei der Wellengleichung diskutiert.

Beispiel: Betrachten wir das konkrete Problem

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \partial_x^2 u(x, t) \quad (0 < x < \pi, t > 0), \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t) \quad (t > 0), \\ u(x, 0) &= \frac{\pi}{8}(\pi - |2x - \pi|) \quad (0 \leq x \leq \pi),\end{aligned}$$

d.h. mit $L = \pi$, $f(x) = \pi x/4$ für $0 \leq x \leq \pi/2$ und $f(x) = \pi(\pi - x)/4$ für $\pi/2 \leq x \leq \pi$.

Der Lösungsansatz ist

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

und die Anfangsbedingung fordert $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$. Daher berechnen wir mittels partieller Integration direkt

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin(kx) dx + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{x \cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{(\pi - x) \cos(kx)}{k} \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi \cos(k\frac{\pi}{2})}{2k} + \frac{\sin(kx)}{k^2} \Big|_0^{\pi/2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \cos(k\frac{\pi}{2})}{2k} - \frac{\sin(kx)}{k^2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) \\ &= -\frac{\pi \cos(k\frac{\pi}{2})}{4k} + \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{2k^2} + \frac{\pi \cos(k\frac{\pi}{2})}{4k} + \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{2k^2} = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k^2}\end{aligned}$$

und erkennen $a_{2l} = 0$ und $a_{2l-1} = (-1)^{l-1}/(2l-1)^2$ für $l \in \mathbb{N}$. Die Lösungsdarstellung ist somit

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{(2l-1)^2} e^{-(2l-1)^2 t} \sin((2l-1)x).$$

5.3. Stationäres Wärmeleitungsproblem für die Kreisscheibe: Die Temperaturverteilung u in der wärmeleitfähigen Kreisscheibe $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ bei zeitlich konstant gehaltener Temperatur f auf dem Rand $\partial\Omega$ sei nach einer gewissen Wärmeausgleichszeit nahezu stationär, sodass $\partial_t u = 0$ angenommen werden kann. In diesem Fall schließen wir aus der Wärmeleitungsgleichung $0 = \partial_t u = \Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$ auf dieses Randwertproblem für die Laplace-Gleichung:

$$(5.14) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(5.15) \quad u = f \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wir schreiben das Problem in Polarkoordinaten um, indem wir

$$U(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

ansetzen und (jedenfalls im Bereich $r > 0$) für den Laplace-Operator den Ausdruck

$$(5.16) \quad \Delta u = \partial_r^2 U + \frac{1}{r} \partial_r U + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 U$$

erhalten, wobei links am Punkt $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ausgewertet wird und rechts im Punkt (r, φ) . (Für den unwahrscheinlichen Fall, dass Sie Gleichung (5.16) noch nicht kennengelernt haben: Direkte Verifikation ist z.B. möglich, indem Sie mittels Kettenregel die Ausdrücke für $\partial_r U(t, \varphi) = \partial_r(u(r \cos \varphi, r \sin \varphi))$, $\partial_r^2 U$ und $\partial_\varphi^2 U$ berechnen und die rechte Seite von (5.16) konkret ausschreiben.)

Nun machen wir den Separationsansatz

$$U(r, \varphi) = v(r)w(\varphi)$$

und verwenden (5.16), um $\Delta U = v''w + \frac{1}{r}v'w + \frac{1}{r^2}vw''$ zu schreiben. Damit wird aus der Laplace-Gleichung unter der Annahme $v(r) \neq 0$, $w(\varphi) \neq 0$ einfach

$$0 = v''w + \frac{1}{r}v'w + \frac{1}{r^2}vw'' = \frac{1}{r^2} \left((r^2v'' + rv')w + w''v \right) = \frac{vw}{r^2} \left(\frac{r^2v'' + rv'}{v} + \frac{w''}{w} \right)$$

und somit

$$\frac{r^2v''(r) + rv'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} = \lambda \quad (\text{konstant}).$$

Wir erhalten daraus die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(I) \quad v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{\lambda}{r^2}v = 0,$$

$$(II) \quad w'' + \lambda w = 0.$$

Lösungen von (II): Nehmen wir Periodizität von w in der Form $w(-\pi+) = w(\pi-)$ und $w'(-\pi+) = w'(\pi-)$ an, dann erzwingt die zweite Gleichung für $w \neq 0$ zunächst $\lambda \geq 0$, denn $\lambda \int_{-\pi}^{\pi} w^2 = - \int_{-\pi}^{\pi} ww'' = -ww'|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (w')^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (w')^2 \geq 0$. Die Lösungen von (II) sind wieder grundsätzlich von der Form

$$w(\varphi) = a \cos(\sqrt{\lambda} \varphi) + b \sin(\sqrt{\lambda} \varphi)$$

mit reellen Konstanten a und b . Die Bedingung $w(-\pi+) = w(\pi-)$ und $w'(-\pi+) = w'(\pi-)$ implizieren nun

$$b \sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 0 \quad \text{und} \quad (a \sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 0. \text{ oder } \lambda = 0)$$

Wollen wir eine nichttriviale Lösung, so müssen wir $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ verlangen. In beiden Fällen schließen wir auf $\sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 0$ und somit $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}_0$, d.h. wir haben für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ Lösungen mit $\lambda_k := k^2$ in der Form

$$(5.17) \quad w_k(\varphi) = a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) = 2 \operatorname{Re} c_k e^{ik\varphi} = c_k e^{ik\varphi} + \overline{c_k} e^{-ik\varphi},$$

wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ bzw. $c_k = (a_k - ib_k)/2$ ($k \in \mathbb{N}$), $c_0 = a_0/2$ noch zu bestimmen sind.

Lösungen von (I): Nun gehen wir mit $\lambda_k = k^2$ ($k \in \mathbb{N}_0$) in die Gleichung (I) und sehen zunächst, dass

$$(5.18) \quad v_k(r) = r^k$$

eine Lösung davon ist, die sich auch nach $r = 0$ stetig fortsetzen lässt. Für gegebenes k ist v_k sogar die einzige Lösung von (I) mit dieser Stetigkeitseigenschaft: Setzen wir nämlich $v(r) = h(\log r)$ für $r > 0$, dann ergibt sich $v' = h'/r$ und $v'' = (h'' - h')/r^2$ und (I) bedeutet

$$0 = r^2 v'' + r v' - k^2 v = h'' - h' + h' - k^2 h = h'' - k^2 h$$

und die Gleichung $h'' = k^2 h$ hat für $k \geq 1$ die Lösungen $h(y) = d_1 e^{-ky} + d_2 e^{ky}$, während sich für $k = 0$ natürlich $h(y) = a + by$ ergibt; daraus folgt nun mit $y = \log r$, $v(r) = h(\log r)$ also

$$v(r) = a + b \log r \quad (k = 0), \quad v(r) = d_1 r^{-k} + d_2 r^k \quad (k \geq 1);$$

wir sehen, dass wir in der Tat nur für $b = 0$ und $d_1 = 0$ Lösungen erhalten, die nach $r = 0$ stetig fortsetzbar sind.

Lösung des Randwertproblems für die Laplace-Gleichung: Wir setzen nun $U_k(r, \varphi) := v_k(r)w_k(\varphi)$ zu den folgenden Grundlösungen zusammen

$$U_0(r, \varphi) := \frac{a_0}{2} = c_0, \quad U_k(r, \varphi) := r^k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) = 2r^k \operatorname{Re} c_k e^{ik\varphi} \quad (k \in \mathbb{N})$$

und machen den Reihenansatz für die Lösung (mit $c_{-k} := \overline{c_k}$) in der Form

$$U(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k e^{ik\varphi}.$$

Die Randbedingung (5.15) ist in Polarkoordinaten bei $r = 1$ auszuwerten und verlangt

$$U(1, \varphi) = f(\cos \varphi, \sin \varphi) =: F(\varphi),$$

d.h. mit der Reihenentwicklung für $U(1, \varphi)$ eingesetzt nun

$$F(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi}.$$

Also sind alle c_k (somit auch a_k, b_k) als Fourierkoeffizienten der periodischen Randfunktion F bestimmt. Konkret erhalten wir

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\psi) e^{-ik\psi} d\psi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

und damit weiter

$$\begin{aligned} U(r, \varphi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k e^{ik\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\psi) e^{-ik\psi} d\psi e^{ik\varphi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\varphi-\psi)} \right)}_{Q(r, \varphi-\psi)} F(\psi) d\psi = \int_{-\pi}^{\pi} Q(r, \varphi-\psi) F(\psi) d\psi, \end{aligned}$$

wobei wir

$$Q(r, s) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{iks}$$

gesetzt haben. Diese Integralkernfunktion Q lässt sich für $r < 1$ mittels geometrischer Reihe explizit berechnen:

$$\begin{aligned} 2\pi Q(r, s) &= \sum_{k=0}^{\infty} (re^{is})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (re^{-is})^k = \frac{1}{1-re^{is}} + re^{-is} \frac{1}{1-re^{-is}} \\ &= \frac{1-re^{-is} + (1-re^{is})re^{-is}}{(1-re^{is})(1-re^{-is})} = \frac{1-r^2}{1-r(e^{is}+e^{-is})+r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(s)+r^2}. \end{aligned}$$

Somit erreichen wir folgende Darstellung der Lösung in Polarkoordinaten

$$(5.19) \quad U(r, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(r, \varphi - \psi) F(\psi) d\psi,$$

$$\text{wobei } F(\psi) := f(\cos \psi, \sin \psi), \quad Q(r, s) := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos(s)+r^2}.$$

Wir streben schließlich noch eine Darstellung mit kartesischen Koordinaten $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ im \mathbb{R}^2 an. Dazu setzen wir $x := r(\cos \varphi, \sin \varphi)$ und $y := (\cos \psi, \sin \psi)$ und bemerken

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= (r \cos \varphi - \cos \psi)^2 + (r \sin \varphi - \sin \psi)^2 \\ &= r^2 - 2r \underbrace{(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi)}_{\cos(\varphi - \psi)} + 1 = 1 - 2r \cos(\varphi - \psi) + r^2, \end{aligned}$$

sodass wir wegen $r^2 = \|x\|^2$ nun

$$Q(r, \varphi - \psi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2}$$

schreiben können. Mittels $F(\psi) = f(\cos \psi, \sin \psi)$ und positiv orientierter Parametrisierung $y(\psi) = (\cos \psi, \sin \psi)$, $-\pi \leq \psi \leq \pi$, der Randkurve $S^1 = \partial\Omega$ erhalten wir die Lösungsdarstellung als *Poisson-Integral*

$$(5.20) \quad u(x) = \int_{S^1} P(x, y) f(y) ds(y) \quad (\|x\| < 1)$$

mit dem *Poisson-Kern*

$$(5.21) \quad P(x, y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} \quad (\|x\| < 1, \|y\| = 1).$$

Beispiel: Wir bestimmen die Lösung u von $\Delta u = 0$ auf der offenen Einheitskreisscheibe um den Ursprung mit der Randbedingung $u = f$ auf S^1 , wobei $f(x, y) = 4x^3$ für $x^2 + y^2 = 1$ ist.

In Polarkoordinaten ist also $F(\psi) := f(\cos \psi, \sin \psi) = 4 \cos^3 \psi$, wovon wir die (endliche) Fourierentwicklung mittels $\cos \psi = (e^{i\psi} + e^{-i\psi})/2$ durch direkte Rechnung¹ bestimmen können:

$$F(\varphi) = 4 \cos^3 \varphi = \frac{4}{2^3} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^3 = \frac{1}{2} (e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}) = 3 \cos \varphi + \cos(3\varphi).$$

Daher lautet die Lösung in Polarkoordinaten

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = U(r, \varphi) = 3r \cos \varphi + r^3 \cos(3\varphi).$$

Um die Lösung auch in kartesischen Koordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ anzugeben, verwenden wir zunächst das cos-Additionstheorem $\cos(3\varphi) = \cos(\varphi + 2\varphi) = \cos \varphi \cos(2\varphi) - \sin \varphi \sin(2\varphi)$ und dann die Formeln $\sin(2\varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi$ und $\cos(2\varphi) = 2 \cos^2 \varphi - 1$, sodass wir schließlich ein Polynom erhalten:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 3r \cos \varphi + r^3 \cos(3\varphi) = 3x + r^3 (\cos \varphi \cos(2\varphi) - \sin \varphi \sin(2\varphi)) \\ &= 3x + r^3 (2 \cos^3 \varphi - \cos \varphi - 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi) = 3x + r \cos \varphi (2r^2 \cos^2 \varphi - r^2 - 2r^2 \sin^2 \varphi) \\ &= 3x + x(2x^2 - (x^2 + y^2) - 2y^2) = 3x + x(x^2 - 3y^2) = x(3 + x^2 - 3y^2). \end{aligned}$$

5.4. Eigenwertprobleme für $-\Delta$ auf der Kreisscheibe und auf der Kugel: Hier machen wir nur zwei kurze Ausblicke auf Spezialfälle allgemeinerer Eigenwertprobleme für den Laplace-Operator Δ auf einem Gebiet Ω in \mathbb{R}^n (also Ω offen und zusammenhängend). Der folgende Begriff ist im Wesentlichen aus der Linearen Algebra übernommen: Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein *Eigenwert* des linearen Operators $-\Delta = -\sum_{j=1}^n \partial_j^2$ auf Ω , wenn es eine Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $u \neq 0$ (d.h. u nicht die Nullfunktion), sodass auf Ω folgende Gleichung gilt:

$$-\Delta u = \lambda u.$$

(A) $\boxed{\Omega = K_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2}$: Wir suchen nichttriviale Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{Dirichlet-Bedingung}). \end{aligned}$$

Übergang zu Polarkoordinaten $U(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ergibt gemäß (5.16) in der Eigenwertgleichung

$$-\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r U) - \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 U = \lambda U.$$

Mit dem schon aus 5.3 bekannten Separationsansatz

$$U(r, \varphi) = v(r)w(\varphi)$$

ergibt dies unter der Annahme $v(r) \neq 0$, $w(\varphi) \neq 0$ die Gleichung

$$\lambda v w = \frac{v w}{r^2} \left(-\frac{r(rv)'}{v} - \frac{w''}{w} \right),$$

¹Wir erinnern an $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

also

$$\frac{r(rv'(r))'}{v(r)} + \lambda r^2 = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)},$$

wobei die linke Seite nur von r abhängt, die rechte nur von φ . Daher gibt es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{r(rv'(r))'}{v(r)} + \lambda r^2 = \alpha = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)}$ gilt, woraus wir auf die folgenden beiden Gleichungen schließen dürfen:

$$(I) \quad \frac{1}{r}(rv'(r))' + \left(\lambda - \frac{\alpha}{r^2}\right)v(r) = 0,$$

$$(II) \quad w''(\varphi) + \alpha w(\varphi) = 0.$$

Gleichung (II) ist analog zu (II) in 5.3, wird mit denselben Periodizitätsannahmen gelöst und führt auf die üblichen Lösungen für $\alpha_l := l^2$ mit $l \in \mathbb{N}_0$. Gleichung (I) ist eine *Bessel-Differentialgleichung* und die Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ übersetzt sich in

$$v(R) = 0.$$

Unter der zusätzlichen Bedingungen, dass v beschränkt sein soll, gibt es für jedes l eine Folge von Lösungen, die mit Hilfe der sogenannten *Bessel-Funktionen* dargestellt werden — für mehr Details verweisen wir auf [FK2, §15, 3.1-2]. Es ergibt sich auch eine Folge von Eigenwerten, die u.a. aus den Nullstellen der Bessel-Funktionen bestimmt werden.

(B) $\boxed{\Omega = K_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3}$: Gesucht werden nichttriviale Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{Dirichlet-Bedingung}). \end{aligned}$$

Natürlich kommen nun die Kugelkoordinaten zum Zug, d.h. wir setzen zunächst $U(r, \theta, \varphi) := u(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$ und benötigen eine Darstellung für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten wie z.B. in [FK2, §11, 5.2], um die Eigenwertgleichung entsprechend umzuschreiben:

$$-\frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r U) - \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta U) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 U \right)}_{\Delta_{S^2} U} = \lambda U.$$

Hier bezeichnet Δ_{S^2} den sogenannten *Laplace-Beltrami-Operator* für die Einheitssphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Nun folgt ein erster Separationsansatz in radiale und sphärische Anteile mittels

$$U(r, \theta, \varphi) = X(r)Y(\theta, \varphi),$$

der zunächst auf die Gleichung

$$-\frac{1}{r^2}(r^2 X'(r))' \cdot Y(\theta, \varphi) - \frac{1}{r^2} X(r) \cdot \Delta_{S^2} Y(\theta, \varphi) = \lambda X(r)Y(\theta, \varphi)$$

führt. Unter der Annahme $X(r) \neq 0$, $Y(\theta, \varphi) \neq 0$ folgt daraus wie üblich

$$-\frac{\Delta_{S^2} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \frac{(r^2 X'(r))'}{X(r)} + \lambda r^2 = \alpha \quad (\text{konstant})$$

und somit die beiden separaten Gleichungen

$$(I) \quad \frac{1}{r^2} (r^2 X'(r))' + \left(\lambda - \frac{\alpha}{r^2} \right) X(r) = 0,$$

$$(II) \quad -\Delta_{S^2} Y(\theta, \varphi) = \alpha Y(\theta, \varphi).$$

Die zweite Gleichung entspricht dem Eigenwertproblem für $-\Delta_{S^2}$ auf der Kugel S^2 und wir gehen unten noch kurz darauf ein. Die Lösungen Y werden *Kugel(flächen)funktionen* genannt.

In Gleichung (I) führt die Substitution $X(r) = h(r)/\sqrt{r}$ nach ein wenig Rechenarbeit auf eine Bessel-Differentialgleichung²

$$\frac{1}{r} (r h'(r))' + \left(\lambda - \frac{\alpha + \frac{1}{4}}{r^2} \right) h(r) = 0$$

und kann also wie in (A) erwähnt weiter behandelt werden.

Wir wenden uns schließlich noch kurz der Eigenwertgleichung (II) zu. Ein weiterer Separationsansatz

$$Y(\theta, \varphi) = V(\theta)W(\varphi)$$

liefert unmittelbar

$$-\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta V'(\theta))' \cdot W(\varphi) - \frac{1}{\sin^2 \theta} W''(\varphi) \cdot V(\theta) = \alpha V(\theta)W(\varphi).$$

Unter der Annahme $V(\theta) \neq 0$, $W(\varphi) \neq 0$ können wir wie schon mehrmals folgern, dass

$$-\frac{W''(\varphi)}{W(\varphi)} = \frac{\sin \theta}{V(\theta)} (\sin \theta V'(\theta))' + \alpha \sin^2 \theta = \beta \quad (\text{konstant})$$

gelten muss. Also erhalten wir zwei weitere separate Gleichungen in der Form

$$(II.1) \quad \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta V'(\theta))' + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) V(\theta) = 0,$$

$$(II.2) \quad W''(\varphi) + \beta W(\varphi) = 0.$$

Gleichung (II.2) ist natürlich von altbekannter Form und wir müssen diese nicht mehr diskutieren. In der Gleichung (II.1) gelangt man nach einer weiteren Transformation gemäß $V(\theta) = q(\cos \theta)$, $s = \cos \theta$ und somit $\sin \theta = 1 - s^2$ zu einer sogenannten *Legendre-Differentialgleichung*

$$\left((1 - s^2) q'(s) \right)' + \left(\lambda - \frac{\beta}{1 - 2s^2} \right) q(s) = 0,$$

deren beschränkte Lösungen sich mittels *Legendre-Funktionen* darstellen lassen. Wir lassen es hier gut sein mit unserem kursorischen Ausblick und dürfen für Details auf [FK2, §15, 3.3-6] verweisen.

²Meistens wird noch $\alpha = l(l+1)$ gesetzt, sodass dann $\alpha + \frac{1}{4} = (l + \frac{1}{2})^2$ wird.

6. Randwertprobleme für den Laplace-Operator

6.1. Grundlegende Begriffe und erste Übersicht: Wir betrachten den Differentialoperator $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ und Funktionen (oder Distributionen) auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (also Ω offen und zusammenhängend) bzw. auf dessen Rand $\partial\Omega$.

Das *Dirichlet-Problem* (oder *erste Randwertproblem*) für gegebene Funktionen f und g lautet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Falls der Rand $\partial\Omega$ hinreichend glatt ist, können wir ein äußeres Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} auf $\partial\Omega$ festlegen und mit der Notation $\partial_{\mathbf{n}}u := \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle$ für die Normalableitung das *Neumann-Problem* (oder *zweite Randwertproblem*) formulieren:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}}u &= g & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Gleichung $-\Delta u = f$ selbst heißt *Poisson-Gleichung*, im Falle $f = 0$ *Laplace-Gleichung*.

Ist Ω ein beschränktes Gebiet, so sprechen wir von einem *Innenraumproblem*; falls $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ (nichtleer) und beschränkt ist, nennen wir die Fragestellung ein *Außenraumproblem*.

Nichtnegativität der Eigenwerte: Die Vorzeichenkonvention für den *Laplace-Operator* ist in der Literatur keineswegs einheitlich, wobei die Wahl $-\Delta$ den Vorzug hat, dass die Eigenwerte λ von $-\Delta$ (sofern sie existieren) garantiert $\lambda \geq 0$ erfüllen, falls nur Eigenfunktionen $u \neq 0$ mit $-\Delta u = \lambda u$ zugelassen werden, für die u oder $\partial_{\mathbf{n}}u$ auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet: Die Greensche Integralformel ergibt in diesem Fall nämlich

$$\lambda \cdot \overbrace{\int_{\Omega} |u|^2}^{>0} = \int_{\Omega} \langle \lambda u, u \rangle = - \int_{\Omega} \langle \Delta u, u \rangle = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u \rangle - \overbrace{\int_{\partial\Omega} u \partial_{\mathbf{n}}u}^{=0} = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \geq 0.$$

Bemerkung: Eine C^2 -Funktion u auf Ω heißt *harmonisch*, wenn sie die Laplace-Gleichung erfüllt, also $\Delta u = 0$ auf Ω gilt. Wir haben in den PUE gesehen, dass die Real- und Imaginärteile von holomorphen Funktionen auf Gebieten $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ stets harmonische Funktionen sind. Ist Ω sternförmig, dann gilt auch umgekehrt, dass eine reelle harmonische Funktion auf Ω immer als Realteil einer auf Ω holomorphen Funktion geschrieben werden kann (siehe etwa [KvW, Satz 14.14.2]).

Eine *Bewegung* des \mathbb{R}^n ist ein spezieller Diffeomorphismus $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form $h(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Die sogenannte *Invarianz von Δ unter Bewegungen* bedeutet nun

$$(6.1) \quad \Delta(u \circ h) = (\Delta u) \circ h,$$

d.h. es macht keinen Unterschied, ob wir eine solche Koordinatentransformation vor oder nach dem Laplace-Operator anwenden. Insbesondere haben wir also Translations- und auch Rotationsinvarianz von Δ . Beweise ergeben sich entweder durch direkte (teilweise mühsame) Rechnung oder als einfache Folgerung einer allgemeineren Transformationsformel für Δ nach Jacobi ([FK2, 5.2-3]).

Maximumsprinzip für harmonische Funktionen: Wir nehmen nun an, dass Ω ein *beschränktes* Gebiet ist und u im Inneren C^2 ist und bis zum Rand hin stetig. Für $x \in \Omega$ ist der Ausdruck $\Delta u(x)$ ja gerade die Spur der Hesse-Matrix von u an der Stelle x , daher ist es nicht unplausibel, dass eine Ungleichung für Δu auch Information über lokale Extrema beinhalten kann. Dies führt in der Tat zu den sogenannten Maximumsprinzipien ([FK2, §6, 5.6, und §14, 2.3 sowie 2.7(b)]), von denen wir hier nur wenige Aspekte als kleine „Kostproben“ erwähnen:

- Wenn $\Delta u \geq 0$ auf Ω gilt, dann folgt für jedes $x \in \Omega$

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u,$$

d.h. die Funktion u nimmt ihr Maximum jedenfalls auf dem Rand $\partial\Omega$ an. Ist u harmonisch, also $\Delta u = 0$, dann erhalten wir durch Betrachtung von $-u$ auch

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u,$$

was insbesondere bedeutet, dass eine harmonische Funktion mit Randwert 0 insgesamt verschwinden muss.

- Nimmt eine harmonische Funktion ein Maximum oder Minimum innerhalb Ω an, dann muss sie konstant sein.

6.2. Fundamentallösungen: Wir hatten bereits allgemein in (4.3) den Begriff einer Fundamentallösung eines Differentialoperators. Speziell für den Laplace-Operator ist dies daher eine Distribution $\Gamma \in \mathcal{D}'$ mit der Eigenschaft

$$-\Delta\Gamma = \delta_0.$$

In diesem Fall zeigt sich, dass wir Γ sogar als lokalintegrierte Funktion $\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ haben können, daher ist die obige Bedingung gleichwertig mit folgender Eigenschaft für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$-\langle \Delta\Gamma, \varphi \rangle := -\langle \Gamma, \Delta\varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \Delta\varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Wegen der Rotationsinvarianz von Δ gemäß (6.1) ist es ohnehin verlockend, $\Gamma(x) = \gamma(\|x\|)$ mit einer Funktion $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anzusetzen. Dann wirkt Δ auf Γ bzgl. x im Wesentlichen als gewöhnlicher Differentialoperator auf γ bzgl. $r = \|x\|$ (direkter Nachweis mittels Kettenregel),

konkret gilt $\Delta\Gamma(x) = r^{1-n}(r^{n-1}\gamma'(r))'$. Wollen wir klassisch $\Delta\Gamma(x) = 0$ für $x \neq 0$ haben, dann folgt durch zweifaches Integrieren im Bereich $r > 0$ mit Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ direkt

$$\gamma(r) = \begin{cases} cr^{2-n} + d & \text{für } n \neq 2, \\ c \log(r) + d & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Natürlich werden wir $c \neq 0$ wählen müssen, weil das Auftreten irgendeiner Singularität bei 0 wegen des Wunsches $-\Delta\Gamma = \delta_0$ sowieso obligat erscheint, und können aber jedenfalls gleich $d = 0$ annehmen, weil eine additive Konstante spätestens beim Differenzieren ohnehin wegfällt.

„Nebenschauplatz“: In Dimension $n = 1$ ergibt $r \mapsto cr$ von sich aus gar keine Singularität bei 0 und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, sodass wir einfach künstlich durch $\gamma(-r) := -r$ ins Negative fortsetzen, d.h. letztlich $\Gamma(x) = \gamma(r) = c|x|$ und in der Tat ist ja distributionell $\Gamma' = c \operatorname{sgn}$ mit der lokalintegrablen Signumfunktion $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$, und weiter dann $\Gamma'' = 2c\delta_0$; also haben wir in diesem Fall eine Fundamentallösung in der Form $\Gamma(x) = |x|/2$.

Es zeigt sich dann (mit etwas Mühe, die wir einmal scheuen), dass wir für $n \geq 2$ im Detail die folgenden lokalintegrablen Funktionen als Fundamentallösungen für $-\Delta$ gewinnen:

$$(6.2) \quad \Gamma(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \|x\|^{2-n} & \text{für } n > 2, \end{cases}$$

wobei die Zahl ω_n für die Oberfläche der Sphäre S^{n-1} steht. Wir betonen nochmals, dass unsere Konstruktion unterwegs die Bedingung $\Delta\Gamma(x) = 0$ für $x \neq 0$ verwendet und wir automatisch erwirkt haben, dass Γ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

Der Spezialfall $n = 3$ lautet

$$\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}$$

und entspricht also bis auf gravitative Konstanten dem *Newton-Potential*.

Darstellungsformel: Ist φ eine Testfunktion und $\psi(z) := \varphi(z+x)$, dann folgt aus der definierenden Eigenschaft der Fundamentallösung Γ und der Translationsinvarianz von Δ die folgende einfache Variante einer Darstellung des Funktionswertes $\varphi(x)$ als Integral:

$$\varphi(x) = \psi(0) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) \Delta\psi(z) dz = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) \Delta\varphi(z+x) dz = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y-x) \Delta\varphi(y) dy.$$

Falls φ außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω verschwindet, sodass weiterhin keine Randwerte auf $\partial\Omega$ berücksichtigt werden müssen, dann können wir diese Formel auch als

$$\varphi(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(y-x) \Delta\varphi(y) dy$$

anschreiben — das ist gewissermaßen der embryonale Zustand der unten folgenden Darstellungsformel. Nun ist es interessant, φ auch „bis zum Rand hinreichen zu lassen“ und weiters die Regularität von φ etwas zu lockern. Mittels der n -dimensionalen Version des Integralsatzes von Gauß ([FK2, §11, 3.2]) und daraus fast unmittelbar folgenden Greenschen Integralformeln für den Laplace-Operator ([FK2, §11, 4.1]) lässt sich alles auf so geschickte Art kombinieren,

dass letztlich in einer Erweiterung obiger Darstellungsformel sukzessive auch Randintegrale eingebaut werden können. Wir überspringen hier viele Details (siehe dafür [FK2, §14, 2.4]) und berichten nur von dem Resultat, das auf diese Weise erreicht wird.

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit äußerem Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} und u eine C^2 -Funktion auf Ω , für die auch jede partielle Ableitung höchstens zweiter Ordnung bis zum Rand $\partial\Omega$ hin stetig ist. Dann gilt die folgende Darstellungsformel für Funktionswerte von u , wobei wir die Notation $\Gamma_x(y) := \Gamma(y - x)$ verwenden:

$$(6.3) \quad u(x) = - \int_{\Omega} \Gamma_x(y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} (\Gamma_x \partial_{\mathbf{n}} u - u \partial_{\mathbf{n}} \Gamma_x).$$

Der Spezialfall der konstanten Funktion $u = 1$ ergibt in obiger Formel übrigens

$$1 = -0 + \int_{\partial\Omega} (0 - \partial_{\mathbf{n}} \Gamma_x) = - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} \Gamma_x \quad (x \in \Omega).$$

6.3. Greensche Funktionen: Eine entscheidende Idee für die Gewinnung von Lösungsformeln für das Dirichlet- oder Neumann-Problem ist nun, im Gebiet Ω die Fundamentallösung Γ geeignet für die Randbedingungen zu adaptieren, sodass im Wesentlichen die Darstellungsformel (6.3) verwendet werden kann. Wir erinnern an die Notation $\Gamma_x(y) = \Gamma(y - x)$ und nehmen an, für jedes $x \in \Omega$ sei eine harmonische Funktion $y \mapsto H_x(y)$ auf Ω gegeben, also mit der Eigenschaft $\Delta H_x = 0$, wobei hier Δ in den y -Variablen wirkt. Da die Formel $\varphi(x) = - \int \Gamma(y - x) \Delta \varphi(y) dy$ für Testfunktionen φ , die wir oben schon erwähnt hatten, nichts anderes bedeutet als

$$-\Delta \Gamma_x = \delta_x \quad \text{auf } \mathbb{R}^n,$$

erhalten wir nun durch die Setzung $G_x := \Gamma_x + H_x$ ebenfalls

$$-\Delta G_x = \delta_x \quad \text{auf } \Omega,$$

aber mit dem entscheidenden Vorteil, dass wir durch den Zusatzterm H_x ein wenig Spielraum für das Anpassen der Randwerte gewonnen haben. Es lässt sich nun relativ mühelos zeigen, dass wir mit G_x unter Bedingungen wie oben bei (6.3) zur sogenannten *Greenschen Darstellungsformel* gelangen

$$(6.4) \quad u(x) = - \int_{\Omega} G_x(y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} (G_x \partial_{\mathbf{n}} u - u \partial_{\mathbf{n}} G_x).$$

Anwendung auf das Dirichletproblem: Um nun $-\Delta u = f$ in Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$ zu lösen, müssen wir also mit Blick auf (6.4) „nur ein G_x konstruieren“, das die Bedingung

$$G_x(y) = 0 \quad \text{für } y \in \partial\Omega, x \in \Omega$$

erfüllt. Dann erhalten wir nämlich als Lösungsformel direkt

$$(6.5) \quad u(x) = \int_{\Omega} G_x(y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} g \partial_{\mathbf{n}} G_x.$$

Es gilt übrigens, dass G_x durch Ω bereits eindeutig festgelegt ist und stets auch die folgende Symmetrieeigenschaft hat ([FK2, §14, Teile (a), (b) des Satzes in 2.5])

$$G(x, y) := G_x(y) = G_y(x) = G(y, x).$$

Anwendung auf das Neumannproblem: Um nun $-\Delta u = f$ in Ω und $\partial_n u = g$ auf $\partial\Omega$ zu lösen, müssen wir zuerst noch beachten, dass die Formel (6.4), wie schon im Kontext von (6.3) für Γ_x oben bemerkt, eine zusätzliche Bedingung an G_x beinhaltet: Ist $u = 1$, dann folgt nämlich ebenso $1 = -\int_{\partial\Omega} \partial_n G_x$. Wir setzen $c(\partial\Omega) := \int_{\partial\Omega} 1$ (das ist die [Ober-]Fläche von $\partial\Omega$) und suchen diesmal ein G_x mit den Eigenschaften

$$\partial_n G_x \text{ ist konstant auf } \partial\Omega \text{ mit Wert } -1/c(\partial\Omega).$$

Damit erhalten wir dann die Lösungsformel

$$(6.6) \quad u(x) = \int_{\Omega} G_x(y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} G_x g.$$

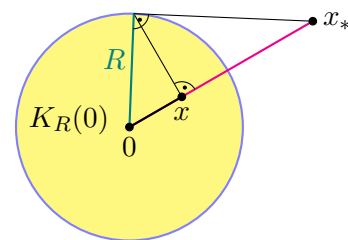
Die Existenz von Greenschen Funktionen ist für beschränkte Gebiete mit hinreichend glattem Rand gesichert, z.B. basierend auf der ausgefeilten klassischen sogenannten Potentialtheorie, wodurch die Fragestellungen auf Integralgleichungen zurückgeführt werden können, deren Lösbarkeit mit funktionalanalytischen Methoden entschieden werden kann ([FK2, §14, Abschnitt 5]). Die explizite Konstruktion gelingt eher nur für Gebiete mit sehr vielen Symmetrien.

Beispiel (Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem in einer Kugel):

Wir betrachten $\Omega := K_R(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Dimension $n \geq 2$ und definieren die Spiegelung eines Punktes $x \neq 0$ an der Sphäre $\partial K_R(0)$ wie folgt:

Wir setzen den Bildpunkt x_* so an, dass er ebenfalls auf dem Strahl durch x liegt und seine Entfernung $\|x_*\|$ das Verhältnis $\|x\| : R = R : \|x_*\|$ beachtet. Daher soll $\|x_*\| = R^2/\|x\|$ sein und insgesamt

$$x_* := \frac{R^2}{\|x\|^2} x.$$



Wir wählen einen beliebigen normierten Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und setzen

$$G(x, y) := \begin{cases} \Gamma(y) - \Gamma(Rb) & \text{für } x = 0, \\ \Gamma(y - x) - \Gamma\left(\frac{\|x\|}{R}(y - x_*)\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

(a) $H_x := G_x - \Gamma_x$ ist für jedes $x \in K_R(0)$ harmonisch auf einer offenen Menge, die $\overline{K_R(0)}$ umfasst: Für $x = 0$ ist $H_0(y) = -\Gamma(Rb)$ konstant und somit harmonisch; für $x \in K_R(0)$ ist automatisch $x_* \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{K_R(0)}$ und daher $H_x(y) = -\Gamma\left(\frac{\|x\|}{R}(y - x_*)\right)$ harmonisch für $\|y\| < \|x_*\|$.

(b) $G_x(y) = 0$ für $y \in \partial K_R(0)$ und $x \in \mathbb{R}^n$: Im Falle $x = 0$ ist $G_0(y) = G(0, y) = \Gamma(y) - \Gamma(Rb) = 0$, weil Γ rotationssymmetrisch ist und $\|y\| = R$; für $x \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\|x\|}{R}(y - x_*) \right\|^2 &= \frac{\|x\|^2}{R^2} \left\langle y - \frac{R^2}{\|x\|^2} x, y - \frac{R^2}{\|x\|^2} x \right\rangle = \frac{\|x\|^2}{R^2} \left(\|y\|^2 - 2 \frac{R^2}{\|x\|^2} \langle y, x \rangle + \frac{R^4}{\|x\|^4} \|x\|^2 \right) \\ &= \frac{\|x\|^2}{R^2} \left(R^2 - 2 \frac{R^2}{\|x\|^2} \langle y, x \rangle + \frac{R^4}{\|x\|^2} \right) = \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + R^2 = \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

und daher $\Gamma(y - x) = \Gamma\left(\frac{\|x\|}{R}(y - x_*)\right)$ wegen der Rotationssymmetrie von Γ , also $G_x(y) = 0$.

Aus (a) und (b) folgt, dass G_x eine Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem ist. Die Symmetrie $G(x, y) = G(y, x)$ ist zwar nicht offensichtlich, dennoch gültig. Für festes $a \in \mathbb{R}^n$ ergibt übrigens $(x, y) \mapsto G(x - a, y - a)$ eine Greensche Funktion für die Kugel $K_R(a)$.

Um die Formel (6.5) anzuwenden benötigen wir auch noch einen möglichst expliziten Ausdruck für den (n -dimensionalen) *Poisson-Kern*

$$P(x, y) := -\partial_n G_x(y) \quad (\|x\| < R, \|y\| = R)$$

für die Kugel $K_R(0)$. Die direkte Berechnung mit dem Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}(y) = y/R$ ergibt (vgl. [Fol, §2.H] oder [Eva, Subsection 2.2.4])

$$P(x, y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{\omega_n R \|x - y\|^n},$$

was sich bestens in unsere Formel (5.21) für den Spezialfall $n = 2$ und $R = 1$ fügt.

Ist z.B. die Funktion u harmonisch auf einem Gebiet des \mathbb{R}^n , das $\overline{K_R(0)}$ umfasst, also $\Delta u = 0$, dann erhalten wir mit Hilfe des Poisson-Kerns nun aus der Greenschen Darstellungsformel mit der Notation $S_R(0) := \partial K_R(0)$ für die n -dimensionale Sphäre vom Radius R (und do für das Oberflächenmaß) die *Poisson-Integralformel*

$$(6.7) \quad u(x) = \int_{S_R(0)} P(x, y) u(y) do(y).$$

Konkret für die Lösung des Dirichlet-Problems mit stetiger Randfunktion g , d.h.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } K_R(0), \quad u = g \quad \text{auf } S_R(0),$$

erhalten wir $u(x) := g(x)$ für $\|x\| = R$ und für $\|x\| < R$ die Formel

$$u(x) := \frac{R^2 - \|x\|^2}{\omega_n R} \cdot \int_{S_R(0)} \frac{g(y) do(y)}{\|x - y\|^n}.$$

Bemerkung: Die eingangs beschriebene Spiegelung an der Sphäre $x \mapsto x_*$ ist ein Diffeomorphismus $h: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und kann gelegentlich auch eingesetzt werden, um mittels $u_*(x) := R^{n-2} u(x_*) / \|x\|^{n-2}$ Lösungen u von Innenraumproblemen für Ω in solche von Außenraumproblemen für $\Omega_* := h(\Omega \setminus \{0\})$ zu transformieren (sogenannte *Kelvin-Transformation*).

6.4. Variationsmethode und schwache Lösungen für das Dirichlet-Problem: Die Grundidee zur Lösung von

$$(D) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

ist diesmal ein Umweg über Minimierungseigenschaften eines Energiefunktional. Dazu definieren wir für jede C^1 -Funktion v auf Ω , die samt ihrer partiellen Ableitungen erster Ordnung bis zum Rand $\partial\Omega$ hin stetig ist und die Randbedingung $v = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt, das sogenannte *Dirichlet-Funktional*

$$J(v) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v(x)\|^2 - f(x)v(x) \right) dx.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, d.h. φ ist eine glatte Testfunktion und höchstens auf einer kompakten Teilmenge innerhalb Ω ungleich 0. So ein φ verschwindet also insbesondere bereits in der Nähe des Randes $\partial\Omega$ und kann problemlos durch 0 bis dorthin fortgesetzt gedacht werden. Nun „variieren wir J in Richtung φ um $s \in \mathbb{R}$ “ durch Betrachtung von

$$\begin{aligned} h(s) := J(u + s\varphi) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u + s\nabla\varphi\|^2 - fu - sf\varphi \right) \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + 2s\langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle + s^2\|\nabla\varphi\|^2) - fu - sf\varphi \right) \\ &= J(u) + s \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle - s \int_{\Omega} f\varphi + \frac{s^2}{2} \int_{\Omega} \|\nabla\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Anwendung der Greenschen Integralförmel $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \partial_n u \varphi - \int_{\Omega} \varphi \Delta u$ sowie $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$, daher $\int_{\partial\Omega} \partial_n u \varphi = 0$ ergibt also

$$h(s) = \underbrace{J(u)}_{h(0)} - s \underbrace{\int_{\Omega} (\Delta u + f) \varphi}_{-h'(0)} + \underbrace{\frac{s^2}{2} \int_{\Omega} \|\nabla\varphi\|^2}_{O(s^2)}.$$

1. Beobachtung: Falls $-\Delta u = f$ in Ω gilt, dann ist für jedes φ sicher $h'(0) = 0$ und

$$J(u + s\varphi) = J(u) + \underbrace{\frac{s^2}{2} \int_{\Omega} \|\nabla\varphi\|^2}_{\geq 0} \geq J(u),$$

d.h. u ist ein (lokales) Minimum von J .

2. Beobachtung: Falls u ein (lokales) Minimum von J ist, dann muss $h'(0) = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gelten, also

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f) \varphi = 0 \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

was $\Delta u + f = 0$ zur Folge hat ([FK2, §10, 4.1]), d.h. $-\Delta u = f$ in Ω .

Somit haben wir gezeigt: $\boxed{u \text{ löst (D)} \iff u \text{ minimiert } J}.$

Umformulierung auf Randwert 0: Angenommen g ist geeignet auf ganz $\bar{\Omega}$ fortgesetzt worden, dann können wir $u_0 := u - g$ setzen und erhalten natürlich

$$-\Delta u_0 = -\Delta u + \Delta g \quad \text{und} \quad u_0 = g - g = 0 \quad \text{in } \partial\Omega.$$

Betrachten wir also das folgende Dirichlet-Problem mit homogener Randbedingung

$$(D_0) \quad -\Delta u_0 = f + \Delta g \quad \text{in } \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

dann gilt offensichtlich: u löst (D) $\iff u_0$ löst (D₀).

Das adaptierte Dirichlet-Funktional für v mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$ lautet einfach

$$J_0(v) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - f v \right) - \int_{\Omega} v \Delta g.$$

Wir wenden auf der rechten Seite im zweiten Integral wieder die Greensche Identität $\int_{\Omega} v \Delta g = \int_{\partial\Omega} v \partial_n g - \int_{\Omega} \langle \nabla g, \nabla v \rangle$ sowie $\int_{\partial\Omega} v \partial_n g = 0$ an, dann folgt

$$J_0(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - f v \right) + \int_{\Omega} \langle \nabla g, \nabla v \rangle,$$

was den Vorteil hat, dass nur erste Ableitungen von v vorkommen. Außerdem gilt mit einer Überlegung wie oben: u_0 minimiert J_0 $\iff u_0$ löst (D₀) $\iff u = u_0 + g$ löst (D).

Daher genügt es also im Wesentlichen, die Lösbarkeit von (D₀) zu studieren.

Schwache Lösungen von (D₀): Für u mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$, eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir ähnlich wie schon anfangs

$$\begin{aligned} h_0(s) &:= J_0(u + s\varphi) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla(u + s\varphi)\|^2 - f \cdot (u + s\varphi) \right) + \int_{\Omega} \langle \nabla g, \nabla(u + s\varphi) \rangle \\ &= J_0(u) + s \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - f\varphi + \langle \nabla g, \nabla \varphi \rangle) + \frac{s^2}{2} \int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^2 \end{aligned}$$

und lesen $h_0'(0) = \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - f\varphi + \langle \nabla g, \nabla \varphi \rangle)$ ab. Weiters ergibt sich auch die Eigenschaft, dass u genau dann ein lokales Minimum von J_0 ist, wenn $h_0'(0) = 0$ für jedes φ ist, d.h.

$$(6.8) \quad \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \int_{\Omega} (f\varphi - \langle \nabla g, \nabla \varphi \rangle) \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Wir nennen eine Funktion u mit der Eigenschaft (6.8) eine *schwache Lösung* des Dirichlet-Problems (D₀). Es ist bemerkenswert, dass schon die Eigenschaft $\nabla u \in L^2(\Omega)$ ausreicht, um dieses Konzept anzuwenden; u muss dafür also bei Weitem nicht C^2 sein. Wir sehen auch, dass wir die Gleichung (6.8) im Sinne der Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$ natürlich als $-\Delta u = f + \Delta g$ interpretieren können.

Bemerkungen: (i) Indem wir die in dem Funktional J_0 und in (6.8) auftretenden Integrale im Sinne von $L^2(\Omega)$ auffassen, gelangen wir zum Begriff des *Sobolev-Raumes* $W_0^1(\Omega)$. Er besteht aus jenen Funktionen $v \in L^2(\Omega)$, die (im geeigneten Sinne) am Rand $\partial\Omega$ verschwinden und

deren distributionelle partielle Ableitungen $\partial_j v$ ($j = 1, \dots, n$) reguläre Distributionen sind (also Funktionen), die ebenfalls zu $L^2(\Omega)$ gehören. Speziell ist jede C^1 -Funktion, die am Rand verschwindet und samt ihren ersten Ableitungen stetig bis zum Rand ausdehnbar ist, ein Element von $W_0^1(\Omega)$.

(i) Das Dirichlet-Funktional J_0 ist also eine Abbildung $W_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ und schwache Lösungen des Dirichlet-Problems (D_0) werden gerade in diesem Sobolev-Raum $W_0^1(\Omega)$ gesucht.

6.5. Eigenwertprobleme: Wir haben die Lösbarkeit der Eigenwertgleichung

$$-\Delta v = \lambda v \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{in } \partial\Omega,$$

wobei v nicht die Nullfunktion sein soll, in 5.4 bereits für 2- und 3-dimensionale Spezialfälle studiert und in 6.1 die Notwendigkeit der Bedingung $\lambda \geq 0$ bemerkt. Mit den aus 6.4 bekannten Argumentationen lässt sich das obige Dirichlet-Problem einfach umformulieren, sodass Eigenfunktionen v auch als *schwache Lösungen* mit der Eigenschaft

$$\int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle = \lambda \int_{\Omega} v \varphi \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{oder auch } \varphi \in W_0^1(\Omega))$$

charakterisiert werden können.

Im Falle eines *beschränkten* Gebietes Ω gibt es eine Folge von Eigenfunktionen v_j ($j \in \mathbb{N}$) mit zugehörigen Eigenwerten λ_j ($j \in \mathbb{N}$), d.h. $-\Delta v_j = \lambda_j v_j$ in Ω und v_j verschwindet am Rand $\partial\Omega$, mit diesen Eigenschaften:

- $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots$,
- $\lambda_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$),
- im Sinne des L^2 -Skalarproduktes $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} \bar{f} g$ gilt $\langle v_j, v_k \rangle_{L^2} = \delta_{jk}$ für $j, k \in \mathbb{N}$, d.h. die Eigenfunktionen v_j ($j \in \mathbb{N}$) bilden ein Orthonormalsystem,
- es gilt für jedes $u \in L^2(\Omega)$ die L^2 -konvergente Entwicklung

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, u \rangle_{L^2} \cdot v_k,$$

d.h. das Orthonormalsystem $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist *vollständig*. Diese L^2 -Entwicklung ist eine Verallgemeinerung der klassischen Konvergenz von Fourierreihen im quadratischen Mittel.

Im Übrigen lässt sich auch zeigen, dass v_1 im Wesentlichen eindeutig ist (der Eigenraum zu λ_1 ist eindimensional) und keine Nullstellen in Ω besitzt. Die Folge der Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$) beinhaltet gewisse Informationen über Ω (z.B. asymptotisch über das Volumen von Ω).

Bemerkungen: (i) Auf unbeschränkten Gebieten muss $-\Delta$ im Allgemeinen keine Eigenwerte mit Eigenfunktionen $v \in L^2$ besitzen. Das Kardinalbeispiel ist $\Omega = \mathbb{R}^n$, denn die Gleichung $-\Delta v = \lambda v$ geht durch Fouriertransformation über in $\|y\|^2 \hat{v}(y) = \lambda \hat{v}(y)$ und somit

$$(\|y\|^2 - \lambda) \hat{v}(y) = 0,$$

also $\hat{v}(y) = 0$ f.ü. und daher $v = 0$ in L^2 .

(ii) Eigenwertprobleme für $-\Delta$ entstehen oft aus Wellengleichungen über die sogenannten *Helmholtz-Gleichungen*: Betrachten wir

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R},$$

dann führt der Ansatz

$$u(x, t) = e^{i\omega t} v(x)$$

zu $\partial_t^2 u = -\omega^2 e^{i\omega t} v$ und $\Delta u = e^{i\omega t} \Delta v$ und daher

$$0 = e^{i\omega t} (-\omega^2 v - c^2 \Delta v), \quad \text{also} \quad -\Delta v = \frac{\omega^2}{c^2} v = \lambda v \quad \text{mit } \lambda := \frac{\omega^2}{c^2} > 0.$$

(iii) Beim Neumann-Eigenwertproblem

$$-\Delta v = \lambda v \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_n v = 0 \quad \text{in } \partial\Omega,$$

müssen wir berücksichtigen, dass $\lambda_1 = 0$ stets ein Eigenwert ist, weil z.B. die konstante Funktion $v = 1$ eine nichttriviale Lösung ist. Abgesehen davon verläuft die Theorie sehr ähnlich zum Dirichlet-Problem (vgl. etwa [Fol, §7.E]).

7. Wärmeleitungsgleichung

Wir verwenden in diesem Kapitel folgende Notationen und Begriffe: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $T > 0$, so bezeichnet

$$\Omega_T := \Omega \times]0, T[$$

entsprechend das $(n + 1)$ -dimensionale Gebiet für das Studium der Temperaturverteilungen in ihrer zeitlichen Entwicklung, d.h. $u(x, t)$ ist die Temperatur zur Zeit $t \in]0, T[$ an der Stelle $x \in \Omega$. Weiters ist stets eine Anfangstemperaturverteilung $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und wir werden $u(x, 0) = u_0(x)$ verlangen (im geeigneten Sinne im Falle schwacher oder distributioneller Lösungen).

Wir werden folgende zwei Typen von Problemstellungen betrachten:

(a) Das *Anfangswertproblem* AWP für $\Omega = \mathbb{R}^n$ lautet

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, T[, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

und

(b) das *Anfangsrandwertproblem* ARWP für ein beschränktes Gebiet Ω ist gestellt durch

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \end{aligned}$$

7.1. Lösungsformel für AWP mit Wärmeleitungskern: Nehmen wir an, dass die Anfangstemperaturverteilung des homogenen AWP

$$(*) \quad \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

rasch fallend ist, also $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Wir erwarten, dass für jedes feste $t > 0$ auch die Temperaturverteilung $x \mapsto u(x, t)$ eine rasch fallende Funktion ist, und können die Fouriertransformation von u bzgl. der räumlichen Variablen

$$\widehat{u}(y, t) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} u(x, t) dx$$

betrachten; als Parameterintegral ist die Funktion $t \mapsto \widehat{u}(y, t)$ differenzierbar. Aus $(*)$ erhalten wir dann das äquivalente Problem

$$(**) \quad \partial_t \widehat{u}(y, t) + \|y\|^2 \widehat{u}(y, t) = 0, \quad \widehat{u}(y, 0) = \widehat{u}_0(y) \quad (y \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Das ist ein sehr einfaches gewöhnliche Differentialgleichungsproblem für die Funktion $t \mapsto \widehat{u}(y, t)$ mit dem Parameter $y \in \mathbb{R}^n$ und der Lösung

$$(7.1) \quad \widehat{u}(y, t) = \widehat{u}_0(y) e^{-t\|y\|^2}.$$

Nun wissen wir aber bereits aus (3.5), dass die Funktion $y \mapsto e^{-t\|y\|^2}$ als (rein räumliche) Fouriertransformierte einer geeignet skalierten Gauß-Funktion G_t auftritt, nämlich

$$e^{-t\|y\|^2} = \widehat{G}_t(y), \quad \text{wobei} \quad G_t(x) := \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

Wenn wir das in (7.1) einsetzen und uns an die Umwandlung von Faltungen in Multiplikationen durch die Fouriertransformation entsprechend Gleichung (3.6) erinnern, ergibt sich

$$\widehat{u}(y, t) = e^{-t\|y\|^2} \widehat{u}_0(y) = \widehat{G}_t(y) \cdot \widehat{u}_0(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\widehat{G_t * u_0})(y)$$

Wegen der Injektivität der Fouriertransformation bedeutet dies schließlich

$$(7.2) \quad u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (G_t * u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

Die Funktion

$$(7.3) \quad \Gamma(x, t) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

wird *Wärmeleitungskern* genannt und obige Lösungsformel schreibt sich damit in der Form

$$(7.2') \quad u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) u_0(y) dy.$$

Bemerkungen: (i) Es lässt sich zeigen, dass die Formel (7.2) bzw. (7.2') tatsächlich auch $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = u_0(x)$ liefert, was im Wesentlichen an der Gültigkeit von $\lim_{t \rightarrow 0+} G_t = (2\pi)^{n/2} \delta_0$ im distributionellen Sinne liegt (vgl. auch PUE).

(ii) Wir haben den Wärmeleitungskern in (7.3) nur für $t > 0$ definiert, könnten ihn aber auf den Bereich mit $t \leq 0$ ungeniert (und auch unstetig) durch $\Gamma(x, t) := 0$ fortsetzen. Es zeigt sich dann (allerdings nicht ohne Mühe), dass wir sogar eine Fundamentallösung für den Wärmeleitungsoperator auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ erhalten, d.h. es gilt (siehe [For, §17, Satz 4] oder [Fol, §4.A])

$$(\partial_t - \Delta)\Gamma = \delta_0,$$

mit anderen Worten $\langle \Gamma, -\partial_t \varphi - \Delta \varphi \rangle = \varphi(0)$ für jede Testfunktion φ auf \mathbb{R}^{n+1} . Speziell gilt (vgl. PUE)

$$\partial_t \Gamma - \Delta \Gamma = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[,$$

wofür der konkrete Nachweis wegen der Glattheit von Γ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sogar nur einer klassischen Rechnung bedarf. (Die Glattheit von Γ in den Teilbereichen $t > 0$ und $t < 0$ ist offensichtlich; beliebige häufige Differenzierbarkeit in den Punkten $(x, 0)$ mit $x \neq 0$ liegt natürlich daran, dass $\exp(-\|x\|^2/(4t))$ für $t \rightarrow 0+$ wegen $\|x\| > 0$ sehr rasch gegen 0 geht.)

(iii) Für jedes $t > 0$ ist die Funktion $x \mapsto \Gamma(x, t)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf \mathbb{R}^n , d.h. es gilt (vgl. PUE)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) dx = 1 \quad (t > 0).$$

(iv) Ist $f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ eine beschränkte Funktion und z.B. $f(x, t) = 0$ für $t \leq 0$, dann erhalten wir mit dem wie in (ii) auf \mathbb{R}^{n+1} fortgesetzten Wärmeleitungskern durch

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = (\Gamma * f)(x, t)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f.$$

(Hierfür ist eigentlich nur zu begründen, warum das Integral in der Definition von u hinreichend gut konvergent ist, weil wir obige Gleichung dann entweder mittels Parameterintegralen oder auf Basis von (ii) und $(\partial_t - \Delta)(\Gamma * f) = (\partial_t \Gamma - \Delta \Gamma) * f = \delta_0 * f = f$ erhalten; wegen $\Gamma = 0$ und $f = 0$ in $t \leq 0$ reduziert sich die Integralformel für $u(x, t)$ auf

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}} f(y, s) dy ds,$$

benötigt also de facto nur $0 < s < t$, und das räumliche Integral hat wegen der Beschränktheit von f vermöge des Faktors $e^{-\|x-y\|^2/(4(t-s))}$ hervorragende Konvergenzeigenschaften.)

7.2. Lösungssätze für AWP: Hier bezeichne weiterhin Γ den Wärmeleitungskern aus (7.3).

Homogene Gleichung: Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ und erfülle

$$(*) \quad |u_0(x)| \leq M e^{a\|x\|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

mit Konstanten $a, M \geq 0$, weiters sei $0 < T < 1/(4a)$. Dann ist durch

$$(7.4) \quad u(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) u_0(y) dy$$

die eindeutige Lösung (mit räumlich höchstens quadratisch exponentiellem Wachstum) von

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, T[$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0(x)$$

gegeben. Im Bereich $0 < t < T$ ist die Lösung u sogar glatt, d.h. eine C^∞ -Funktion.

Die Abschätzung (*) garantiert eben für $0 < t < T$ die Konvergenz des definierenden Integrals für u , sodass im Weiteren dann mit Parameterintegralen argumentiert werden kann (für Details siehe [FK2, §16, 3.1]).

Wir fügen kurze Bemerkungen an: Ist u_0 beschränkt, d.h. es kann $a = 0$ in (*) gewählt werden, dann erhalten wir durch obige Formel eine Lösung für alle positiven Zeiten $t > 0$. Weiters erhalten wir mit der Schrankenbedingung (*) durch die Integralformel (7.4) für u sogar eine Lösung auch noch im Falle $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, allerdings mit der abgeschwächten Anfangsbedingung $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ für $t \rightarrow 0+$ im Sinne der Distributionen auf \mathbb{R}^n . Ohne räumliche Wachstumsbedingungen kann die Eindeutigkeit der Lösung verloren gehen ([Fol, §4.A]).

Qualitative Aspekte: Die Lösungsformel (7.4) ist zwar in den seltensten Fällen für explizite Berechnungen direkt brauchbar (für einen Ausnahmefall vgl. PUE), dennoch können wir mit Hilfe konkreter Eigenschaften des Wärmeleitungskernes einige qualitative Züge von Lösungen unmittelbar ablesen.

- Ist $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann folgt wegen $e^{-\|x-y\|^2/(4t)} \leq 1$ durch einfache Abschätzung des Integranden in (7.4) für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ die Schranke

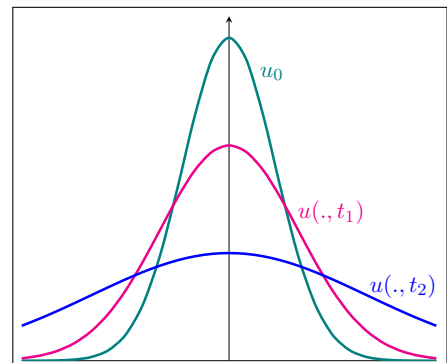
$$|u(x, t)| \leq \frac{\|u_0\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Insbesondere gilt an jeder Stelle $u(x, t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0+$.

- Ist $u_0 \geq 0$ und $u_0 \neq 0$, dann gilt $u(x, t) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$, weil auch $\Gamma(x-y, t) > 0$ ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Wenn also u_0 z.B. außerhalb einer beschränkten Menge verschwindet, gilt dies zu keiner späteren Zeit mehr. (Das zeigt eigentlich eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Anfangsdaten durch Idealisierungen in der Modellgleichung.)
- Unter den Annahmen $u_0 \geq 0$ und $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dürfen wir für $t > 0$ wie folgt rechnen

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t) u_0(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t) dx}_{1} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| dy = \|u_0\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Also muss sich in dieser Situation die konstante Fläche bzw. das konstante Volumen unterhalb des Graphen der Funktion $x \mapsto u(x, t)$ für wachsendes t immer stärker über \mathbb{R}^n verteilen, weil die maximal erreichbare Höhe ja abnimmt. In der nebenstehenden Illustration nehmen wir $0 < t_1 < t_2$ an.



- Das Glättungsvermögen des räumlichen Faltungsintegrals mit $\Gamma(\cdot, t)$ in (7.4) ist enorm, weil die Lösung selbst bei L^1_{loc} -Anfangsdaten für $t > 0$ stets C^∞ ist. Wir können das am eindimensionalen Beispiel mit der unstetigen Funktion $u_0(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, $u_0(x) = 0$

sonst, einigermaßen gut nachvollziehen. Hier ergibt sich mittels einer Substitution $z = (x - y)/\sqrt{4t}$ direkt

$$u(x, t) = \int_{-1}^1 \Gamma(x - y, t) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz$$

und das Integral hängt auf glatte Weise von den Grenzen ab.

Inhomogene Gleichung und Duhamel-Prinzip: Die grundlegende Beobachtung ist, dass wir das inhomogene AWP

$$\partial_t w - \Delta w = f, \quad w(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

lösen können, indem wir $w := u + v$ setzen, wobei v eine Lösung des homogenen AWP

$$\partial_t v - \Delta v = 0, \quad v(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

ist und u eine des inhomogenen AWP mit homogener Anfangsbedingung

$$(7.5) \quad \partial_t u - \Delta u = f, \quad u(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Diese Aufspaltung können wir auf Grund der Linearität aller Gleichungen bzw. Bedingungen machen. Das Problem für v haben wir oben schon diskutiert, daher dürfen wir uns hier nun ganz auf (7.5) konzentrieren.

Satz: Sei $T > 0$ und $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times]0, T[)$ mit der Eigenschaft, dass es Konstanten $a, M \geq 0$ mit $T < 1/(4a)$ und

$$(**) \quad |f(x, t)| \leq M e^{a\|x\|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t < T)$$

gibt. Dann ist durch

$$(7.6) \quad u(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

die eindeutige Lösung (mit räumlich höchstens quadratisch exponentiellem Wachstum) von (7.5) gegeben.

Bemerkungen hier bzgl. Bedeutung und Notwendigkeit der Schranken- und Wachstumsbedingungen an f und u sind analog zu jenen im oben diskutierten Fall des homogenen AWP.

Beweisidee: Formel (7.6) hat die Struktur

$$u(x, t) = \int_0^t u_s(x, t) ds$$

mit

$$u_s(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq s < t).$$

Wir bemerken, dass mit Blick auf (7.4)

$$\lim_{t \rightarrow s^+} u_s(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, r) f(y, s) dy = f(x, s)$$

gilt und außerdem im Bereich $t > s$ auch

$$\partial_t u_s - \Delta u_s = (\partial_t - \Delta)(\Gamma(\cdot, t - s) * f(\cdot, s)) = \underbrace{((\partial_t - \Delta)\Gamma(\cdot, t - s))}_0 * f(\cdot, s) = 0.$$

Somit ist u_s also die Lösung des folgenden homogenen AWP mit Anfangszeit $t = s$:

$$\partial_t u_s - \Delta u_s = 0, \quad u_s(x, s) = f(x, s) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nun ist nur noch für das Parameterintegral $u(x, t) = \int_0^t u_s(x, t) ds$ zu bemerken, dass wir die Relation $\Delta \int_0^t u_s(x, t) ds = \int_0^t \Delta u_s(x, t) ds$ haben sowie

$$\partial_t \int_0^t u_s(x, t) ds = \underbrace{u_t(x, t)}_{f(x, t)} + \int_0^t \partial_t u_s(x, t) ds,$$

dann kommen wir direkt zu

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \underbrace{(\partial_t u_s(x, t) - \Delta u_s(x, t))}_0 ds = f(x, t).$$

Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = 0$ folgt direkt aus der Formel (7.6). □

Interpretation der Lösungsformel mittels Punktquellen: Der Wärmeleitungskern Γ ist eine Fundamentallösung für $\partial_t - \Delta$ und Translationen vertauschen mit Differentiationen, daher gilt für jedes $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(\partial_t - \Delta)\Gamma(\cdot - y, \cdot - s) = \delta_{(0,0)}(\cdot - y, \cdot - s) = \delta_{(y,s)}.$$

D.h. die Funktion $(x, t) \mapsto \Gamma(x - y, t - s)$ ist Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung für die Punktquelle $\delta_{(y,s)}$, die bei (y, s) konzentriert ist. Wenn wir $f(y, s)$ als Gewichtungsfaktor bei (y, s) einführen, dann liest sich Formel (7.6) als „kontinuierliche Superposition“ der entsprechenden Lösungen $f(y, s)\Gamma(\cdot - y, \cdot - s)$ für die Punktquellen $f(y, s)\delta_{(y,s)}$.

7.3. Lösungssätze für ARWP auf einem beschränkten Gebiet: Nun sei also $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $T > 0$. Wir wollen zunächst das ARWP mit homogenen Randbedingungen lösen, d.h.

$$(7.7) \quad \partial_t u - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times]0, T[,$$

$$(7.8) \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(7.9) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega,$$

für gegebene Funktionen $f: \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ und $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Separationsansatz: Auf dem beschränkten Gebiet Ω besitzt der Laplace-Operator $-\Delta$ bekanntlich Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit $\lambda_j \uparrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$ und zugehörige Eigenfunktionen v_j ($j \in \mathbb{N}$), d.h. $-\Delta v_j = \lambda_j v_j$, mit der Eigenschaft $\langle v_j, v_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{jk}$.

Wir machen nun den Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) v_j(x) \quad (x \in \Omega, 0 < t < T)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizientenfunktionen $a_j:]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ ($j \in \mathbb{N}$). Unter der Annahme von hinreichend guter Konvergenz berechnen wir $\partial_t u = \sum_{j=1}^{\infty} a'_j v_j$ und

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \Delta v_j = - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j v_j,$$

weshalb (7.7) und (7.9) die folgenden Bedingungen liefern:

$$f(x, t) = (\partial_t - \Delta)u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} (a'_j(t) + \lambda_j a_j(t)) v_j(x), \quad u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(0) v_j(x).$$

Wir entwickeln die Funktionen $x \mapsto f(x, t)$ und u_0 mittels $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ auch nach den Eigenfunktionen

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v_j, f(\cdot, t) \rangle v_j(x), \quad u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v_j, u_0 \rangle v_j,$$

dann ergibt ein Koeffizientenvergleich in obigen Bedingungen also die Folge von Gleichungen

$$a'_j(t) + \lambda_j a_j(t) = \langle v_j, f(\cdot, t) \rangle, \quad a_j(0) = \langle v_j, u_0 \rangle \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Diese einfachen gewöhnlichen Differentialgleichungen werden für jedes $j \in \mathbb{N}$ gelöst durch

$$a_j(t) = \langle v_j, u_0 \rangle e^{-\lambda_j t} + \int_0^t \langle v_j, f(\cdot, s) \rangle e^{-\lambda_j(t-s)} ds.$$

Schwache Lösungen: Wir haben oben eine Reihe aus lauter nach x und t separierten Teillösungen betrachtet. Wenn wir die Anforderungen an die Konvergenzeigenschaften dieses Ansatzes nicht überstrapazieren wollen, dann werden wir nach einer Interpretation des ARWP mit schwachen Lösungen suchen. Um diese zu finden gehen wir zunächst wieder einmal von einer gegebenen Lösungsfunktion u aus und betrachten die Differentialgleichung (7.7) distributionell, also beide Seiten in ihrer Wirkung auf Testfunktionen auf $\Omega_T = \mathbb{R}^n \times]0, T[$. Der Einfachheit halber nehmen wir gleich Testfunktionen in Produktform $(x, t) \mapsto \varphi(x) \psi(t)$. (Summen von solchen sind in der Tat brauchbar, um alle Testfunktionen geeignet zu approximieren.)

Wir gehen also aus von der Gleichung

$$\int_{\Omega_T} f(x, t) \varphi(x) \psi(t) d(x, t) = \int_{\Omega_T} u(x, t) (-\partial_t - \Delta)(\varphi(x) \psi(t)) d(x, t).$$

Die linke Seite ist gleich

$$\int_0^T \psi(t) \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x) dx dt = \int_0^T \psi(t) \langle f(\cdot, t), \varphi \rangle dt.$$

Auf der rechten Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \psi'(t) \overbrace{\int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x) dx}^{\langle u(\cdot, t), \varphi \rangle} dt - \int_0^T \psi(t) \overbrace{\int_{\Omega} u(x, t) \Delta \varphi(x) dx}^{- \int_{\Omega} \langle \nabla u(\cdot, t), \nabla \varphi \rangle} dt \\ & = \int_0^T \left(- \psi'(t) \langle u(\cdot, t), \varphi \rangle + \psi(t) \langle u(\cdot, t), \varphi \rangle_1 \right) dt, \end{aligned}$$

wobei wir $\langle u(\cdot, t), \varphi \rangle_1 := \int_{\Omega} \langle \nabla u(\cdot, t), \nabla \varphi \rangle$ gesetzt und verwendet haben, dass der Integrand auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet. Wir werden unten auch noch die Notation $\|u(\cdot, t)\|_1 := \sqrt{\langle u(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_1}$ benötigen. Der Index 1 soll uns also daran erinnern, dass durch den Gradienten gerade die Ableitungen erster Ordnung involviert sind. Eigentlich arbeiten wir hier mit Funktionen, die bzgl. x im Sobolev-Raum $W_0^1(\Omega)$ aus der Bemerkung (i) in 6.4 sind.

Lesen wir nun die t -Integrale als Wirkungen von Distributionen auf dem Intervall $]0, T[$ auf die Testfunktion ψ , dann lautet die Bedingung distributionell bzgl. t einfach

$$\langle f(\cdot, t), \varphi \rangle = \frac{d}{dt} \left(\langle u(\cdot, t), \varphi \rangle \right) + \langle u(\cdot, t), v \rangle_1.$$

Wenn wir die harmlose Annahme treffen, dass wir es hier nur mit Funktionen zu tun haben, die bzgl. t integrierbar sind, dann gehen wir durch Integration zu Stammfunktionen über, beachten noch $u(\cdot, 0) = u_0$ und erhalten die Gleichung

$$(7.10) \quad \int_0^t \langle u(\cdot, s), v \rangle_1 ds + \langle u(\cdot, t), \varphi \rangle - \langle u_0, \varphi \rangle = \int_0^t \langle f(\cdot, s), \varphi \rangle ds.$$

Bei gegebenen Funktionen $f \in L^2(\Omega_T)$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$ ist dies die definierende Gleichung für schwache Lösungen u , die stetig von der Zeit abhängen sollen und räumlich mitsamt ihren ersten partiellen (distributionellen) Ableitungen auch zu L^2 gehören sollen sowie am Rand verschwinden (also Funktionen, die bzgl. x im Sobolev-Raum $W_0^1(\Omega)$ sind).

Energiegleichung: Nehmen wir an, u sei eine Lösung des ARWP (7.7), (7.8), (7.9), dann können wir die Gleichung $f = \partial_t u - \Delta u$ mit u multiplizieren und über Ω integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle &= \int_{\Omega} f(x, t) u(x, t) dx = \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) u(x, t) dx - \int_{\Omega} u(x, t) \Delta u(x, t) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x, t), \nabla u(x, t) \rangle dx = \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 + \|u(\cdot, t)\|_1^2. \end{aligned}$$

Integration über das Zeitintervall $]0, t[$ ergibt nun

$$\int_0^t \langle f(\cdot, s), u(\cdot, s) \rangle ds = \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\|u(\cdot, 0)\|^2}_{u_0} + \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_1^2 ds,$$

also zusammenfassend die sogenannte *Energiegleichung*

$$(7.11) \quad E(t) := \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_1^2 ds = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t \langle f(\cdot, s), u(\cdot, s) \rangle ds.$$

Für die homogene Gleichung, d.h. mit $f = 0$, ist also $E(t) = \|u_0\|^2/2$ konstant.

Aus den bis hierher beschriebenen Ansätzen und Konzepten lassen sich mit sorgfältiger Analyse und Normabschätzungen konkrete Lösungssätze für das ARWP (7.7), (7.8), (7.9) beweisen (vgl. [FK2, §16, Abschnitte 4.5 und 4.6]), die wir hier nur ganz kurz andeuten:

- Eine schwache Lösung im Sinne von (7.10) existiert stets und ist eindeutig.
- Die Reihenentwicklung des Separationsansatzes konvergiert quadratisch bzgl. x und gleichmäßig bzgl. $t \in]0, T[$; alternativ konvergiert sie auch bzgl. der Gradientennorm $\|\cdot\|_1$ und gleichzeitig quadratisch bzgl. t über $]0, T[$.
- Die Lösung erfüllt die Energiegleichung (7.11).
- Ist der Rand $\partial\Omega$ glatt und $f = 0$, dann ist auch u glatt und eine klassische Lösung.

Weitere Bemerkungen zur homogenen Gleichung ($f = 0$): (i) Falls wir eine Lösung mit inhomogener Randbedingung

$$u(x, t) = g(x) \quad (x \in \partial\Omega, t > 0)$$

konstruieren wollen, können wir den Ansatz $u(x, t) := v(x, t) + w(x)$ machen, wobei w das Dirichlet-Problem

$$\Delta w = 0 \text{ in } \Omega, \quad w = g \text{ auf } \partial\Omega$$

lösen soll und v das homogene ARWP mit homogener Randbedingung

$$\partial_t v - \Delta v = 0 \text{ in } \Omega \times]0, \infty[, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times]0, \infty[, \quad v(x, 0) = u_0(x) - w(x).$$

Dann erhalten wir nämlich $u(x, 0) = v(x, 0) + w(x) = u_0(x) - w(x) + w(x) = u_0(x)$, für $x \in \partial\Omega$, $t > 0$ einfach $u(x, t) = v(x, t) + w(x) = 0 + g(x) = g(x)$ und im Bereich $\Omega \times]0, \infty[$ direkt $\partial_t u - \Delta u = (\partial_t - \Delta)v + \partial_t w - \Delta w = 0 + 0 + 0 = 0$.

(ii) Die Koeffizienten der Reihenentwicklung $u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) v_j(x)$ des Separationsansatzes sind im Falle $f = 0$ ja besonders einfach durch

$$a_j(t) = \langle v_j, u_0 \rangle e^{-\lambda_j t}$$

gegeben, wobei λ_j die Eigenvektoren sind und v_j die Eigenfunktionen. Wegen der Monotonie $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots$ gibt oftmals schon allein der erste Term eine recht brauchbare Approximation

$$u(x, t) \approx e^{-\lambda_1 t} \langle v_1, u_0 \rangle v_1(x) \quad \text{für große } t > 0.$$

8. Wellengleichung

Hier sei stets $c > 0$ eine Konstante und $\square := \partial_t^2 - c^2 \Delta$ der sogenannte *d'Alembert-Operator*, ein partieller Differentialoperator zweiter Ordnung auf \mathbb{R}^{n+1} mit konstanten Koeffizienten.

Wir studieren zunächst ausführlich das *Anfangswertproblem* AWP oder *Cauchy-Problem* für den d'Alembert-Operator bzw. für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \square u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, T[, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t u(x, 0) &= u_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

8.1. Homogenes AWP in Dimension $n = 1$:

Wir gehen von der Beschreibung mittels $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ zu sogenannten *charakteristischen Koordinaten*

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

über. Dann ist die inverse Koordinatentransformation einfach

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2c},$$

und es gilt

$$\mathbb{R} \times]0, \infty[= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi > \eta\}.$$

Nun setzen wir

$$U(\xi, \eta) := u\left(\underbrace{\frac{\xi + \eta}{2}}_x, \underbrace{\frac{\xi - \eta}{2c}}_t\right)$$

und berechnen (mit Argumenten in $\partial_x u$ etc. jeweils $x = (\xi + \eta)/2$ und $t = (\xi - \eta)/(2c)$)

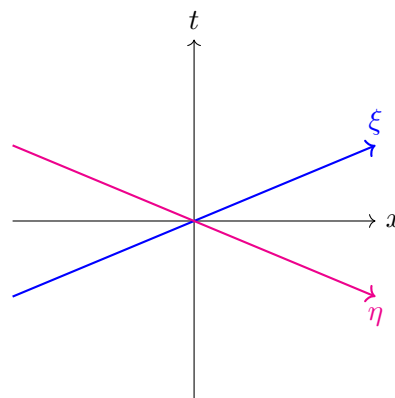
$$\partial_\xi U = \frac{1}{2} \partial_x u + \frac{1}{2c} \partial_t u;$$

weiter ergibt sich

$$\partial_\eta \partial_\xi U = \frac{1}{4} \partial_x^2 u - \frac{1}{4c} \partial_t \partial_x u + \frac{1}{4c} \partial_x \partial_t u - \frac{1}{4c^2} \partial_t^2 u = -\frac{1}{4c^2} (\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u),$$

falls u eine C^2 -Funktion ist oder die Ableitungen distributionell genommen werden, weil dann $\partial_t \partial_x u = \partial_x \partial_t u$ garantiert ist. Wir erhalten also aus $\square u = 0$ die verblüffend einfache Gleichung

$$\partial_\eta \partial_\xi U = 0,$$



woraus im ersten Schritt

$$\partial_\xi U(\xi, \eta) = h(\xi)$$

mit einer geeigneten Funktion h folgt und dann also

$$U(\xi, \eta) - U(0, \eta) = \int_0^\xi h(s) ds =: F(\xi).$$

Setzen wir noch $G(\eta) := U(0, \eta)$, dann schreibt sich das in der Form

$$u(x, t) = U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Dies beschreibt also die Überlagerung zweier Wellenprofile, wovon im Zeitverlauf und entlang der x -Achse betrachtet eines nach links und eines nach rechts wandert.

Umgekehrt ist sehr leicht nachzurechnen, dass durch obige Formel z.B. für beliebige C^2 -Funktionen (bzw. alternativ distributionell) eine Lösung von $\square u = 0$ gegeben ist, d.h.

$$\boxed{\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \iff u \text{ ist von der Gestalt } u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)}$$

Nun passen wir das noch an die Anfangsbedingungen an:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(x, 0) = F(x) + G(x), \\ u_1(x) &= \partial_t u(x, 0) = cF'(x) - cG'(x), \end{aligned}$$

besagt auf Grund der zweiten Gleichung zunächst

$$c(F(x) - G(x)) = c(F(0) + G(0)) + \int_0^x u_1(s) ds =: U_1(x),$$

woraus wir mit Hilfe der ersten Gleichung auf $u_0 + \frac{1}{c}U_1 = 2F$ und $u_0 - \frac{1}{c}U_1 = 2G$ schließen. Daher ist

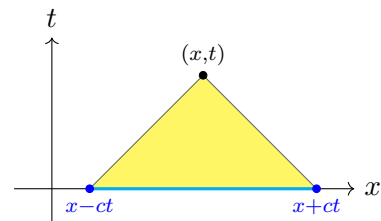
$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{2}u_0(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(s) ds, \end{aligned}$$

woraus wegen $\int_0^{x-ct} u_1(s) ds = -\int_{x-ct}^0 u_1(s) ds$ schließlich die *d'Alembert-Formel*

$$(8.1) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

wird. Bei gegebenen Funktionen u_0 und u_1 definiert diese Formel auch tatsächlich eine Lösung des homogenen AWP, wie sich sehr leicht direkt nachrechnen lässt.

Eine geometrische Betrachtung: Gemäß der d'Alembert-Formel hängt der Wert von u im Punkt (x, t) nur von den Anfangswerten im Intervall $[x - ct, x + ct]$ ab. Genauer gesagt wird u_0 sogar nur in den Randpunkten dieses Intervalls benötigt, während über alle Werte von u_1 in diesem Intervall integriert wird.



8.2. Sphärische Mittel: Als Vorbereitung für explizite Lösungsformeln in $\mathbb{R}^3 \times]0, \infty[$ betrachten wir hier Eigenschaften der Mittelung von stetigen räumlichen Funktionen $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über Sphären

$$S_r(x) := \partial K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - y\| = r\} \quad (r \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$$

gemäß

$$m(x, r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} v(y) \, do(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} v(x + r\xi) \, do(\xi),$$

wobei das zweite Parameterintegral durch die Substitution $y = x + r\xi$ mit $\xi \in S_1(0)$ entsteht. Wir setzen auch noch $m(x, -r) := m(x, r)$ für $r > 0$, sodass $r \mapsto m(x, r)$ symmetrisch wird, und spielen kurz einige einfache Eigenschaften der sphärischen Mittel durch.

(a) $m(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} v(x) \, do(\xi) = \frac{v(x)}{4\pi} 4\pi = v(x).$

(b) Ist v eine C^1 -Funktion, dann auch m und es gilt

$$\partial_j m(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} \partial_j v(x + r\xi) \, do(\xi).$$

(c) Für skalare Funktionen $(x, t) \mapsto u(x, t)$ können wir entsprechend

$$m(x, r, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} u(x + r\xi, t) \, do(\xi)$$

betrachten. Ist u eine C^1 -Funktion, so auch m und es gilt

$$\partial_t m(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} \partial_t u(x + r\xi, t) \, do(\xi).$$

(d) Wenn v eine C^2 -Funktion ist, dann behaupten wir, dass

$$\partial_r m(x, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{K_r(x)} \Delta v(y) \, dy$$

gilt. Zum Beweis bemerken wir zunächst $\partial_r(v(x + r\xi)) = \langle \nabla v(x + r\xi), \xi \rangle$, wobei wir für $y = x + r\xi$ mit $\xi \in S_1(0)$ gerade auch das äußere Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}(y) = \xi$ an die Sphäre $S_r(x)$ erhalten. Damit berechnen wir (im letzten Schritt mit dem Integralsatz von Gauß für das Vektorfeld ∇v)

$$\begin{aligned} \partial_r m(x, r) &= \frac{1}{4\pi} \partial_r \int_{S_1(0)} v(x + r\xi) \, do(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} \langle \nabla v(x + r\xi), \xi \rangle \, do(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} \langle \nabla v(y), \mathbf{n}(y) \rangle \, do(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{K_r(x)} \underbrace{\operatorname{div}(\nabla v)}_{\Delta v}(z) \, dz. \end{aligned}$$

(e) Wenn v eine C^2 -Funktion ist, dann gilt die *Darboux-Gleichung* $\partial_r^2 m + \frac{2}{r} \partial_r m = \Delta m$.

Das sehen wir aus folgender Berechnung, in der wir zunächst (d) und dann „zwiebelweise“¹ Integration“ der Vollkugel $K_r(x)$ über alle Radien $0 \leq \rho \leq r$ und Sphären $S_\rho(x)$ verwenden:

$$\begin{aligned} (\partial_r^2 m + \frac{2}{r} \partial_r m)(x, r) &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r m(x, r)) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \partial_r \int_{K_r(x)} \Delta v(z) dz = \frac{1}{4\pi r^2} \partial_r \int_0^r \int_{S_\rho(x)} \Delta v do d\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} \Delta v do \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} \Delta v(x + r\xi) do(\xi) = \frac{1}{4\pi} \Delta \int_{S_1(0)} v(x + r\xi) do(\xi) = \Delta m(x, r). \end{aligned}$$

8.3. Homogenes AWP in Dimension $n = 3$: Angenommen u ist eine C^2 -Funktion und Lösung von

$$\square u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x)$$

und $m(x, r, t)$ das sphärische Mittel von $u(\cdot, t)$. Es gilt wegen $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ und der Darboux-Gleichung dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 m(x, r, t) &= \frac{1}{4\pi r^2 c^2} \int_{S_r(x)} \partial_t^2 u(y, t) do(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} \Delta u(y, t) do(y) = \Delta m(x, r, t) \\ &= \left(\partial_r^2 m + \frac{2}{r} \partial_r m \right)(x, r, t) = \frac{1}{r} \left(r \partial_r^2 m + 2 \partial_r m \right)(x, r, t) = \frac{1}{r} \partial_r \left(r \partial_r m + m \right)(x, r, t) \\ &= \frac{1}{r} \partial_r \left(\partial_r (r m) \right)(x, r, t) = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r m(x, r, t)). \end{aligned}$$

Setzen wir also $M(x, r, t) := r m(x, r, t)$, dann ist wegen der Symmetrie von m bzgl. r nun $M(x, -r, t) = -M(x, r, t)$ und

$$\partial_t^2 M(x, r, t) = r \partial_t^2 m(x, r, t) = c^2 \partial_r^2 (r m(x, r, t)) = c^2 \partial_r^2 M(x, r, t).$$

Weiters ist

$$M(x, r, 0) = r m(x, r, 0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x)} u(y, 0) do(y) = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x)} u_0(y) do(y) =: M_0(x, r)$$

und

$$\partial_t M(x, r, 0) = r \partial_t m(x, r, 0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x)} \partial_t u(y, 0) do(y) = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x)} u_1(y) do(y) =: M_1(x, r).$$

¹Zuerst Translation um x , also von $K_r(x)$ auf $K_r(0)$; dann Kugelkoordinaten (ρ, φ, θ) für $K_r(0)$ nehmen; der Anteil $\rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta$ entspricht gerade dem Oberflächenmaß von $S_\rho(0)$; schließlich Translation um x rückgängig machen, wodurch aus $S_\rho(0)$ dann $S_\rho(x)$ wird.

Zusammengefasst ist für jedes fixe $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $w: (r, t) \mapsto M(x, r, t)$ eine Lösung des eindimensionalen homogenen AWP

$$\partial_t^2 w - c^2 \partial_r^2 w = 0, \quad w(r, 0) = M_0(x, r), \quad \partial_t w(x, 0) = M_1(x, r).$$

Nach der d'Alembert-Formel gilt also

$$(*) \quad M(x, r, t) = w(r, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(M_0(x, r+ct) + M_0(x, r-ct) \right)}_{\boxed{0}} + \underbrace{\frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} M_1(x, s) ds}_{\boxed{1}}.$$

Aus der Eigenschaft (a) der sphärischen Mittel wissen wir auch, dass wir die Funktionswerte durch $r \rightarrow 0$ zurückgewinnen, d.h.

$$(**) \quad u(x, t) = m(x, 0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} m(x, r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} M(x, r, t),$$

was uns zu dem kühnen Unterfangen verleitet, den letztgenannten Limes aus der obigen Gleichung (*) bestimmen zu wollen.

Wegen $M_0(x, r-ct) = -M_0(x, ct-r)$ ist

$$\frac{1}{r} \boxed{0} = \frac{1}{2r} \left(M_0(x, r+ct) - M_0(x, ct) \right) - \frac{1}{2r} \left(M_0(x, ct-r) - M_0(x, ct) \right),$$

was für $r \rightarrow 0$ offensichtlich gegen

$$\frac{1}{2} \partial_r M_0(x, ct) + \frac{1}{2} \partial_r M_0(x, ct) = \partial_r M_0(x, ct) = \frac{1}{c} \partial_t \left(M_0(x, ct) \right)$$

strebt. Wegen $M_1(x, -s) = -M_1(x, s)$ ist $\int_{ct-r}^{r-ct} M_1(x, s) ds = 0$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \boxed{1} &= \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} M_1(x, s) ds + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{r-ct} M_1(x, s) ds = \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{r+ct} M_1(x, s) ds \\ &= \frac{1}{2cr} \int_{ct}^{r+ct} M_1(x, s) ds + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct} M_1(x, s) ds = \frac{1}{2cr} \int_{ct}^{r+ct} M_1(x, s) ds - \frac{1}{2cr} \int_{ct}^{ct-r} M_1(x, s) ds, \end{aligned}$$

was für $r \rightarrow 0$ gegen

$$\frac{1}{2c} M_1(x, ct) + \frac{1}{2c} M_1(x, ct) = \frac{1}{c} M_1(x, ct)$$

konvergiert.

Wir erlangen nun also insgesamt im Limes $r \rightarrow 0$ mit Hilfe von (**) zunächst $u(x, t) = \frac{1}{c} \partial_t \left(M_0(x, ct) \right) + \frac{1}{c} M_1(x, ct)$ und mit den Definitionen von M_0 und M_1 dann die konkrete *Darstellungsformel von Poisson* — besser bekannt auch als *Kirchhoffsche Formel* —

$$(8.2) \quad u(x, t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u_0(y) do(y) \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u_1(y) do(y).$$

Die t -Ableitung im ersten Term der obigen Formel können wir auch noch durchführen:

$$\begin{aligned}
\partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} u_0(y) \, do(y) \right) &= \partial_t \left(\frac{t}{4\pi} \int_{S_1(0)} u_0(x + ct\xi) \, do(\xi) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} u_0(x + ct\xi) \, do(\xi) + \frac{t}{4\pi} \int_{S_1(0)} \partial_t(u_0(x + ct\xi)) \, do(\xi) \\
&= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} u_0(y) \, do(y) + \frac{t}{4\pi} \int_{S_1(0)} \langle \nabla u_0(x + ct\xi), c\xi \rangle \, do(\xi) \\
&= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} \left(u_0(y) + \langle \nabla u_0(y), y - x \rangle \right) \, do(y).
\end{aligned}$$

Damit kommen wir zu einer alternativen Darstellung der Lösung in der Form

$$(8.3) \quad u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} \left(u_0(y) + \langle \nabla u_0(y), y - x \rangle + tu_1(y) \right) \, do(y).$$

Wiederum lässt sich durch direkte Rechnung auch zeigen, dass bei gegebenem u_0 und u_1 diese Formeln tatsächlich eine Lösung des homogenen AWP liefern.

Geometrisch-physikalische Aspekte: (i) Wir sehen aus der Formel (8.3) deutlich, dass der Wert der Lösung u an der Stelle x zur Zeit t nur von den Anfangsdaten u_0 , ∇u_0 und u_1 auf der Sphäre mit Radius ct um den Punkt x abhängt.

(ii) Wenn wir einen zur Zeit 0 bei x_0 konzentrierten Signalimpuls durch Anfangsdaten modellieren, die außerhalb einer kleinen Umgebung $K_\varepsilon(x_0)$ von x_0 verschwinden, dann ist auf Grund obiger Formel $u(x, t) = 0$, falls die Sphäre $S_{ct}(x)$ die Umgebung $K_\varepsilon(x_0)$ nicht schneidet. Insbesondere kann an einer Stelle x im Abstand $d := \|x - x_0\| > 0$ von der Quelle x_0 also erst nach der Zeit $(d - \varepsilon)/c$ ein Wert ungleich 0 zu verzeichnen sein. Das bedeutet eine *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* von Signalen.

8.4. Homogenes AWP in Dimension $n = 2$: Hier kommt die sogenannte *Abstiegsmethode von Hadamard* zum Zug. Ist die Funktion $(x_1, x_2, t) \mapsto u(x_1, x_2, t)$ eine Lösung der homogenen **zwei**dimensionalen Wellengleichung mit Anfangswerten u_0 und u_1 , dann ist die Funktion $U: (x_1, x_2, \mathbf{x}_3, t) \mapsto u(x_1, x_2, t)$ eine Lösung der **drei**dimensionalen Wellengleichung, weil ja $\partial_{x_3} U = 0$ ist. Weiters ist natürlich

$$U_0(x_1, x_2, x_3) := U(x_1, x_2, x_3, 0) = u_0(x_1, x_2), U_1(x_1, x_2, x_3) := \partial_t U(x_1, x_2, x_3, 0) = u_1(x_1, x_2),$$

sodass wir auf U die Lösungsformel (8.2) anwenden können. Dort treten Integrale für U_j ($j = 1, 2$) über Sphären im \mathbb{R}^3 auf, die wir temporär zur Verdeutlichung mit $S_{ct}^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnen wollen. Weiters können wir für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ Punkte im \mathbb{R}^3 natürlich durch (x, x_3) und (y, y_3) mit $x_3, y_3 \in \mathbb{R}$ beschreiben. Dann ist

$$\begin{aligned}
S_{ct}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= S_{ct}^{(3)}(x, x_3) = \{(y, y_3) \mid y \in \overline{K_{ct}(x)}, y_3 = \underbrace{x_3 \pm \sqrt{c^2 t^2 - \|y - x\|^2}}_{=: \varphi_\pm(y)}\},
\end{aligned}$$

wobei $\overline{K_{ct}(x)}$ die abgeschlossene Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 mit Radius ct und Mittelpunkt x ist. Abgesehen vom Äquator $x_3 = 0$ lassen sich also die obere und die untere offene Hemisphäre als Teilmenge von $S_{ct}^{(3)}(x, x_3)$ mittels $y \mapsto (y, \varphi_{\pm}(y))$ durch die offene Kreisscheibe $K_{ct}(x)$ parametrisieren. Das entsprechende Flächenmaß ist jeweils

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \|\nabla\varphi_{\pm}(y)\|^2} dy &= \sqrt{1 + \left\| \frac{-(y-x)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y-x\|^2}} \right\|^2} dy = \sqrt{1 + \frac{\|y-x\|^2}{c^2t^2 - \|y-x\|^2}} dy \\ &= \sqrt{\frac{c^2t^2}{c^2t^2 - \|y-x\|^2}} dy = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \|y-x\|^2}} dy. \end{aligned}$$

Der Integrand U_j ($j = 1, 2$) hängt nicht von x_3 oder y_3 ab, also ergeben die Integrale über die untere und obere Hemisphäre denselben Ausdruck, was wir durch einen Faktor 2 berücksichtigen und zu folgender Formel gelangen:

$$\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}^{(3)}(x, x_3)} U_j do = \frac{1}{2\pi c} \int_{K_{ct}(x)} \frac{u_j(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y-x\|^2}} dy.$$

Somit erhalten wir schließlich für das homogene AWP im Falle $n = 2$ die Lösungsformel

$$(8.4) \quad u(x, t) = \partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{K_{ct}(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y-x\|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi c} \int_{K_{ct}(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y-x\|^2}} dy.$$

Wir bemerken, dass der Wert von u im Punkt (x, t) nun von den Anfangswerten jeweils auf der ganzen zweidimensionalen Kreisscheibe $K_{ct}(x)$ abhängt, während die Eigenschaft der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen analog zum Ein- und Dreidimensionalen unmittelbar einsichtig ist.

8.5. Inhomogenes AWP und Duhamel-Prinzip: Wir lösen das inhomogene AWP

$$\begin{aligned} \square w &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[, \\ w(x, 0) &= u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t w(x, 0) &= u_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

wieder mittels Superposition $w := u + v$, wobei v die Lösung des homogenen AWP

$$(*) \quad \begin{aligned} \square v &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[, \\ v(x, 0) &= u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t v(x, 0) &= u_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

ist und u die Lösung des folgenden inhomogenen AWP mit homogenen Anfangsbedingungen:

$$(**) \quad \begin{aligned} \square u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t u(x, 0) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Wie schon bei der Wärmeleitungsgleichung ist das *Duhamel-Prinzip* anwendbar, das Lösungen von (**) erzeugen kann, sofern Lösungen von Problemen der Klasse (*) bekannt sind. Wir skizzieren die Vorgangsweise, ohne auf alle technischen Details einzugehen.

Für $s \geq 0$ sei u_s die Lösung des folgenden homogenen AWP mit Anfangszeit $t = s$:

$$\begin{aligned} \square u_s &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times]s, \infty[, \\ u_s(x, s) &= 0 && (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t u_s(x, s) &= f(x, s) && (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Ist zum Beispiel \tilde{u} eine Lösung des homogenen AWP mit $\tilde{u}(x, 0) = 0$ und $\partial_t \tilde{u}(x, 0) = f(x, s)$, dann können wir $u_s(x, t) := \tilde{u}(x, t - s)$ setzen, denn $\square u_s(\cdot, t) = \square \tilde{u}(\cdot, t - s) = 0$, $u_s(x, s) = \tilde{u}(x, 0) = 0$ und $\partial_t u_s(x, s) = \partial_t \tilde{u}(x, 0) = f(x, s)$.

Nun betrachten wir

$$u(x, t) := \int_0^t u_s(x, t) ds$$

und beginnen mit den Berechnungen. Zunächst ist

$$\partial_t u(x, t) = \underbrace{u_t(x, t)}_0 + \int_0^t \partial_t u_s(x, t) ds = \int_0^t \partial_t u_s(x, t) ds$$

und daher

$$\partial_t^2 u(x, t) = \underbrace{\partial_t u_t(x, t)}_{f(x, t)} + \int_0^t \underbrace{\partial_t^2 u_s(x, t)}_{c^2 \Delta u_s(x, t)} ds = f(x, t) + c^2 \Delta \int_0^t u_s(x, t) ds = f(x, t) + c^2 \Delta u(x, t).$$

Außerdem ist $u(x, 0) = \int_0^0 u_s = 0$ und $\partial_t u(x, 0) = \int_0^0 \partial_t u_s = 0$, also löst u das Problem (**).

Für die Raumdimensionen $n = 1, 2, 3$ können wir aus dem Duhamel-Ansatz und den bisher gewonnenen Formeln sogar konkrete Darstellungen für u entwickeln.

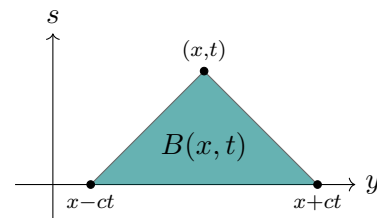
n = 1 Aus der d'Alembert-Formel (8.1) erhalten wir nach kurzer Rechnung (vgl. PUE)

$$(8.5) \quad u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{B(x, t)} f(y, s) d(y, s),$$

wobei über das Abhängigkeitsgebiet

$$B(x, t) := \{(y, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < s < t, |y - x| < c(t - s)\}$$

integriert wird.



n = 2: Aus (8.4) angewandt auf die Lösung \tilde{u} von

$$\square \tilde{u} = 0, \tilde{u}(x, 0) = 0, \partial_t \tilde{u}(x, 0) = f(x, s)$$

erhalten wir zunächst für $u_s(x, t) := \tilde{u}(x, t - s)$ den konkreten Ausdruck

$$u_s(x, t) = \tilde{u}(x, t - s) = \frac{1}{2\pi c} \int_{K_{c(t-s)}(x)} \frac{f(y, s) dy}{\sqrt{c^2(t-s)^2 - \|y-x\|^2}}$$

und daraus mit dem Duhamel-Prinzip

$$u(x, t) := \int_0^t u_s(x, t) ds = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{K_{c(t-s)}(x)} \frac{f(y, s) dy}{\sqrt{c^2(t-s)^2 - \|y-x\|^2}} ds.$$

Also ergibt sich mit dem Bereich $B(x, t) := \{(y, s) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < s < t, \|y-x\| < c(t-s)\}$ insgesamt die Formel

$$(8.6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{B(x, t)} \frac{f(y, s)}{\sqrt{c^2(t-s)^2 - \|y-x\|^2}} d(y, s).$$

n = 3: In diesem Fall entsteht im Zusammenspiel mit der Poisson-Darstellungsformel (bzw. Kirchhoffschen Formel) (8.2) der Lösungsbestandteil $u_s(x, t) := \tilde{u}(x, t - s)$, wobei wieder $\square \tilde{u} = 0, \tilde{u}(x, 0) = 0, \partial_t \tilde{u}(x, 0) = f(x, s)$ gelten soll, in der Form

$$u_s(x, t) = \tilde{u}(x, t - s) = \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \int_{S_{c(t-s)}(x)} f(y, s) do(y)$$

und weiters dann mittels Substitution $\rho = c(t-s)$ und anschließender zwiebelweiser Integration

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t u_s(x, t) ds = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \int_{S_{c(t-s)}(x)} \frac{f(y, s)}{t-s} do(y) ds \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{ct} \int_{S_\rho(x)} \frac{f(y, t - \frac{\rho}{c})}{\rho/c} do(y) \frac{1}{c} d\rho = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{ct} \int_{S_\rho(x)} \frac{f(y, t - \frac{\rho}{c})}{\rho} do(y) d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{K_{ct}(x)} \frac{f(z, t - \frac{\|z-x\|}{c})}{\|z-x\|} dz. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Darstellung

$$(8.7) \quad u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{K_{ct}(x)} \frac{f(y, t - \frac{1}{c}\|y-x\|)}{\|y-x\|} dy.$$

Es ist gut zu erkennen, dass für fixes $x \in \mathbb{R}^3$ im Laufe der Zeit das Gebiet $\bigcup_{t>0} K_{ct}(x)$ von den Integrationen überstrichen wird und wegen

$$\bigcup_{t>0} K_{ct}(x) = \{(y, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t > 0, \|y-x\|^2 < c^2 t^2\} =: B(x)$$

ist der Rand $\partial B(x)$ dieser Menge gerade der *Vorwärtslichtkegel* $\mathcal{C}^+(x, 0)$ im \mathbb{R}^4 ausgehend von $(x, 0)$, d.h.

$$\partial B(x) = \mathcal{C}^+(x, 0) := \{(y, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t > 0, \|y - x\|^2 = c^2 t^2\}.$$

8.6. Anfangsrandwertproblem ARWP und schwache Lösungen: Wir diskutieren nun in ganz groben Zügen die folgende Problemstellung für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \square u &= f && \text{in } \Omega_T := \Omega \times]0, T[, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && (x \in \Omega), \\ \partial_t u(x, 0) &= u_1(x) && (x \in \Omega). \end{aligned}$$

Separationsansatz: Ganz ähnlich wie schon bei der Wärmeleitungsgleichung versuchen wir es mit

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) v_j(x),$$

wobei die v_j ($j \in \mathbb{N}$) ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen zu $-\Delta$ sind mit zugehörigen Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \uparrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). Die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f$ zusammen mit den Eigenwertgleichungen $\Delta v_j = -\lambda_j v_j$ führt nun wieder durch Koeffizientenvergleich auf eine Folge von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$a_j''(t) + c^2 \lambda_j a_j(t) = \langle v_j, f(\cdot, t) \rangle \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Die Anfangsbedingungen ergeben entsprechend

$$a_j(0) = \langle v_j, u_0 \rangle, \quad a_j'(0) = \langle v_j, u_1 \rangle \quad (j \in \mathbb{N})$$

und machen obige Differentialgleichung auf elementare Art eindeutig lösbar (basierend auf den Funktionen $\cos(tc\sqrt{\lambda_j})$ und $\sin(tc\sqrt{\lambda_j})$). Schließlich bleiben im Wesentlichen Konvergenzfragen zu klären (\rightsquigarrow schwache Lösungen) und Randwert 0 ist allein schon durch die Eigenfunktionen v_j gemäß Dirichlet-Problem für Δ garantiert.

Schwache Lösungen: Wir gehen wieder grundsätzlich davon aus, die Differentialgleichung $\square u = f$ distributionell zu betrachten und die Anfangsbedingungen nur als Limes $t \rightarrow 0$ im Sinne von L^2 -basierten Normen. Wie schon bei der Herleitung von (7.10) für die Wärmeleitungsgleichung empfiehlt sich die Distributionswirkung auf Testfunktionen von Produktform $(x, t) \mapsto \varphi(x)\psi(t)$, woraufhin wir zum folgenden Konzept der schwachen Lösungen für das ARWP gelangen könn(t)en (wieder mit der Notation $\langle v, w \rangle_1 = \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla w \rangle$): Für alle Testfunktionen φ auf \mathbb{R}^n verlangen wir

$$(8.8) \quad \langle \partial_t u(\cdot, t), \varphi \rangle - \langle \partial_t u(\cdot, 0), \varphi \rangle + c^2 \int_0^t \langle u(\cdot, s), \varphi \rangle_1 ds = \int_0^t \langle f(\cdot, s), \varphi \rangle ds,$$

wobei u zumindest stetig bzgl. t mit Werten im Sobolevraum $W_0^1(\Omega)$ sein soll und die distributionelle Zeitableitung $\partial_t u$ stetig bzgl. t mit Werten in $L^2(\Omega)$. Mehr Details dazu und auch Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit finden sich in [FK2, §17, Abschnitte 4.2-4].

Energiegleichung: Angenommen u erfüllt die Wellengleichung

$$f = \partial_t^2 u - c^2 \Delta u$$

und f sowie u bzw. für u auch die ersten und zweiten partiellen Ableitungen sind quadratisch integrierbar. Wir multiplizieren die Gleichung mit $\partial_t u$, integrieren räumlich über Ω und erhalten

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot, t), \partial_t u(\cdot, t) \rangle &= \int_{\Omega} \partial_t^2 u(\cdot, t) \partial_t u(\cdot, t) - c^2 \int_{\Omega} \Delta u(\cdot, t) \partial_t u(\cdot, t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\partial_t u(\cdot, t))^2 + c^2 \int_{\Omega} \underbrace{\langle \nabla u(\cdot, t), \nabla \partial_t u(\cdot, t) \rangle}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \nabla u(\cdot, t), \nabla u(\cdot, t) \rangle} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u(\cdot, t)\|^2 + \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_1^2. \end{aligned}$$

Weitere Integration bzgl. t führt nun zu

$$\underbrace{\frac{1}{2} \left(\|\partial_t u(\cdot, t)\|^2 + c^2 \|u(\cdot, t)\|_1^2 \right)}_{=: E(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\|\partial_t u(\cdot, 0)\|^2 + c^2 \|u(\cdot, 0)\|_1^2 \right)}_{E(0) = (\|u_1\|^2 + c^2 \|u_0\|_1^2) / 2} + \int_0^t \langle f(\cdot, s), \partial_t u(\cdot, s) \rangle ds$$

und somit zur *Energiegleichung*

$$(8.9) \quad E(t) = E(0) + \int_0^t \langle f(\cdot, s), \partial_t u(\cdot, s) \rangle ds, \quad \text{wobei } E(t) := \frac{1}{2} \left(\|\partial_t u(\cdot, t)\|^2 + c^2 \|u(\cdot, t)\|_1^2 \right).$$

Als Spezialfall gilt für die homogene Gleichung, also $f = 0$, die Energieerhaltung $E(t) = E(0)$.

Darüberhinaus folgt aus (8.9) auch die Eindeutigkeit der Lösung des ARWP: Angenommen u und v erfüllen beide dasselbe ARWP, dann löst die Differenz $w := u - v$ das ARWP mit homogenen Daten $f = 0$, $u_0 = u_1 = 0$ und nach der Energiegleichung ist dann $0 = E(t) = (\|\partial_t w(\cdot, t)\|^2 + c^2 \|w(\cdot, t)\|_1^2) / 2$ für alle $t > 0$, was $w = 0$ impliziert.

8.7. Geometrische Aspekte des d'Alembert-Operators: Wir streifen hier nur manche dieser Eigenschaften und Konzepte und dies auch nur ganz oberflächlich, mehr Details und Hinweise dazu finden sich in [FK2, §17, Abschnitte 2.1-5].

Invarianz unter Lorentz-Transformationen im Falle $n = 3$: Die Minkowski-Metrik auf \mathbb{R}^4 entspricht (je nach Konvention) der symmetrischen Bilinearform η auf \mathbb{R}^4 , gegeben durch $\eta(x, y) := x^T \cdot J \cdot y$ mit der Diagonalmatrix $J := \text{diag}(1, 1, 1, -c^2)$ (oder deren Negative). Eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ heißt bekanntlich *Lorentz-Transformation*, falls $LJL^T = J$ gilt, was gleichbedeutend mit der Bedingung $\eta(Lx, Ly) = \eta(x, y)$ ist. Der d'Alembert-Operator auf dem Minkowskiraum \mathbb{R}^4 ist im folgenden Sinne invariant unter Lorentz-Transformationen:

$$\square (u(L \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix})) = (\square u)(L \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}),$$

d.h. es ist nicht wesentlich, ob wir eine Lorentz-Koordinatentransformation vor oder nach der Anwendung von \square durchführen.

Charakteristische Hyperflächen: Dies sind Hyperflächen $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für ein (und daher jedes) Normalenfeld $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu_0 \end{pmatrix}$ auf M die Bedingung

$$\nu_0^2 - c^2 \|\nu\|^2 = 0$$

gilt. Die Bedeutung dieser Bedingung können wir quasi ein wenig physikalisch-geometrisch erörtern: Betrachten wir $w := \begin{pmatrix} -c^2\nu \\ \nu_0 \end{pmatrix}$, dann ist unter obiger Bedingung w wegen $\langle \begin{pmatrix} \nu \\ \nu_0 \end{pmatrix}, w \rangle = -c^2 \|\nu\|^2 + \nu_0^2 = 0$ stets normal zu \mathbf{n} , also tangential zu M . Mit dem $(n+1)$ -dimensionalen Analogon der Minkowski-Metrik $\eta((x, t), (y, s)) := \langle x, y \rangle - c^2 ts$ gilt aber zusätzlich $\eta(w, w) = c^4 \|\nu\|^2 - c^2 \nu_0^2 = c^2(c^2 \|\nu\|^2 - \nu_0^2) = 0$, d.h. w ist auch stets *lichtartig*. Somit besitzt eine charakteristische Hyperfläche also an jedem Punkt einen lichtartigen Tangentialvektor.

Ist die Hyperfläche als Nullstellenmenge $M = \{(x, t) \mid \Phi(x, t)\}$ einer C^1 -Funktion Φ mit auf M nichtverschwindendem Gradienten gegeben, dann ist bekanntlich $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \nabla_x \Phi \\ \partial_t \Phi \end{pmatrix}$ ein Normalenfeld und die Bedingung an M , charakteristisch zu sein, lautet

$$(\partial_t \Phi)^2 - c^2 \|\nabla_x \Phi\|^2 = 0,$$

was als *charakteristische Differentialgleichung* oder *Eikonalgleichung* bezeichnet wird.

Zum Beispiel ist für jeden Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ der Vorwärtslichtkegel $M = \mathcal{C}^+(x_0, t_0) := \{(y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t > t_0, \|y - x_0\|^2 = c^2(t - t_0)^2\}$ eine charakteristische Hyperfläche (vgl. PUE, auch für weitere Beispiele).

Wellenfronten: Im speziellen Fall einer Hyperfläche mit Darstellung $M = \{(x, t) \mid t = \varphi(x)\}$ mittels einer C^1 -Funktion φ (also $\Phi(x, t) = t - \varphi(x)$) lautet die charakteristische Differentialgleichung ganz einfach

$$c \|\nabla \varphi\| = 1.$$

Für jedes feste t heißt dann die projizierte Hyperfläche

$$M_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in M\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid t = \varphi(x)\}$$

des \mathbb{R}^n eine *Wellenfront* (zur Zeit t). Solche Konstrukte sind u.a. in der *geometrischen Optik* von Bedeutung.

Schwache Stoßwellen: Dies sind distributionelle Lösungen u der homogenen Wellengleichung $\square u = 0$, die global C^1 sind, aber nirgendwo C^2 auf einer Hyperfläche M , der sogenannten *Singularitätenfläche*, und außerhalb M glatt sind. Es lässt sich zeigen, dass in so einem Fall M zwingend eine charakteristische Hyperfläche sein muss.

Teil D

**Lineare Operatoren auf
Hilberträumen**

In diesem VO-Teil betrachten wir Vektorräume grundsätzlich mit den komplexen Zahlen als Skalarenbereich. Ein großer Vorzug des komplexen Skalarenkörpers \mathbb{C} gegenüber \mathbb{R} in der Linearen Algebra ist Ihnen sicher noch geläufig: Quadratische komplexe Matrizen besitzen stets (komplexe) Eigenwerte, während für reelle quadratische Matrizen eben keinesfalls garantiert ist, dass es *reelle* Eigenwerte gibt.

D.h. wir haben es hier immer mit *komplexen Vektorräumen* zu tun und somit sollen auch alle auftretenden Funktionen komplexwertig sein, wenn es nicht explizit anders gesagt wird.

Wir umreißen in diesem Teil nur die allerersten Anfangsgründe eines enorm umfangreichen Themenkreises im Schnittbereich von Funktionalanalysis und Mathematischer Physik, oftmals ohne überhaupt sporadische Argumentationsskizzen oder Beweise anbieten zu können. Wer ein bisschen mehr zum Hintergrund der Begriffe und Konzepte oder über hier „unterschlagnene“ Begründungen nachschauen will, kann z.B. die Bücher [FK2] und [Wer] konsultieren.

9. Hilberträume und einige Begriffe aus der Quantenmechanik

Wir erinnern an die Lineare Algebra: Ein *Skalarprodukt* auf einem *komplexen Vektorraum* \mathcal{H} ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$, mit den folgenden Eigenschaften für beliebige $v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

- (i) Linear im zweiten Argument, d.h. $\langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle$ und konjugiert linear¹ im ersten² Argument, d.h. $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \overline{\lambda_1} \langle v_1, w \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_2, w \rangle$;
- (ii) Hermitesche Symmetrie $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$;
- (iii) positiv definit, d.h. $\langle v, v \rangle \geq 0$ gilt immer; und $\langle v, v \rangle = 0$ nur, falls $v = 0$.

Das Standardbeispiel mit n Dimensionen ist natürlich $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ mit

$$(9.1) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k \quad (x, y \in \mathbb{C}^n, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)).$$

Weiters erinnern wir daran, dass aus einem Skalarprodukt stets die Norm

$$(SN) \quad \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (v \in \mathcal{H})$$

entspringt und für diese die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* gilt:

$$(CSU) \quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad (v, w \in \mathcal{H}).$$

9.1. Hilberträume: Ein komplexer Vektorraum \mathcal{H} mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, falls er bzgl. der Norm (SN) *vollständig* ist, d.h. dass jede Cauchyfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} auch in \mathcal{H} konvergiert, es also ein $u \in \mathcal{H}$ gibt mit $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Wir wiederholen kurz, was es heißt, dass (u_n) eine Cauchyfolge ist: Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$ finden, sodass $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq k_0$ gilt.

Äquivalent zur Bedingung der Vollständigkeit ist übrigens auch folgende praktisch relevante Eigenschaft (siehe [Wer, Lemma I.1.8]): Ist $v_k \in \mathcal{H}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ in \mathcal{H} . *D.h. absolut konvergente Reihen sind stets konvergent in \mathcal{H} .*

Beispiele: (Wir überspringen hier die teilweise etwas langwierigeren Nachweise der einzelnen behaupteten Eigenschaften; wir verweisen dafür z.B. auf [FK2] oder [Wer].)

¹oft auch antilinear genannt

²Achtung: Die Konvention bzgl. konjugiert linear im zweiten oder ersten Argument ist nicht einheitlich in der Literatur; im Rahmen der Quantenphysik dürfte die hier verwendete Version am gebräuchlichsten sein.

1) Jeder *endlichdimensionale* komplexe Vektorraum mit Skalarprodukt ist auch vollständig und daher ein Hilbertraum.

2) Der komplexe Vektorraum l^2 aller komplexen Zahlenfolgen $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$ wird mit dem Skalarprodukt

$$(9.2) \quad \langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$$

zum Hilbertraum. Dies ist die unmittelbarste unendlichdimensionale Erweiterung des Standardbeispiels \mathbb{C}^n , den wir hier als Teilraum der Folgen (x_k) mit $x_k = 0$ für $k > n$ auffassen könnten.

3) Die quadratisch (Lebesgue-)integrierbaren Funktionen(klassen) $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(z)} g(z) dz$$

ergeben ein wichtiges Standardbeispiel für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum.

Es bezeichne ab nun \mathcal{H} stets einen Hilbertraum.

9.2. Orthogonalität: Aus der Linearen Algebra sind die beiden folgenden Begriffe bekannt: Zwei Vektoren $v, w \in \mathcal{H}$ stehen *orthogonal* aufeinander, in Zeichen $v \perp w$, falls $\langle v, w \rangle = 0$ gilt. Für eine nichtleere Teilmenge M von \mathcal{H} heißt

$$M^\perp := \{v \in \mathcal{H} \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in M\}$$

das *orthogonale Komplement* von M und M^\perp ist stets ein Teil(vektor)raum von \mathcal{H} . Natürlich ist $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$.

Aus den Skalarprodukteigenschaften folgt für $v, w \in \mathcal{H}$ mit $v \perp w$ der *Satz von Pythagoras*

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \underbrace{\langle v, w \rangle}_0 + \underbrace{\langle w, v \rangle}_0 + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Ist V ein abgeschlossener³ Teilraum von \mathcal{H} , dann zeigt sich, dass für jedes $u \in \mathcal{H}$ die Minimierungsaufgabe

$$\|u - w\| \stackrel{!}{=} \text{dist}(u, V) := \inf\{\|u - v\| \mid v \in V\}$$

eine eindeutige Lösung $w \in V$ hat, die wir mit Pu bezeichnen. Die Abbildung $P: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist linear mit $P(\mathcal{H}) = V$ und heißt *Orthogonalprojektion* oder *orthogonaler Projektor* auf V . Weiters gilt für alle $u \in \mathcal{H}$ stets

$$u - Pu \in V^\perp \quad (\text{bzw. } u - Pu \perp V) \quad \text{und} \quad P^2u = Pu \quad (\text{also } P^2 = P)$$

sowie für beliebiges $w \in \mathcal{H}$ auch die Symmetrieeigenschaft

$$\langle Pu, w \rangle = \langle u, Pw \rangle.$$

³D.h. ist (v_n) eine Folge in V und gilt $v_n \rightarrow v$ in \mathcal{H} , dann muss $v \in V$ sein.

Mit Hilfe von $u = Pu + (u - Pu)$ lässt sich somit die folgende direkte Summeneigenschaft nachweisen:

$$\mathcal{H} = V \oplus V^\perp.$$

Zur Wiederholung: Diese Gleichung besagt gerade, dass es zu jedem $u \in \mathcal{H}$ eindeutige Vektoren $v \in V$ und $w \in V^\perp$ mit der Eigenschaft $u = v + w$ gibt. Weiters folgern wir daraus wegen $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \geq \|v\|^2$ und $v = Pu$ auch sofort

$$\|Pu\| \leq \|u\|.$$

Übrigens ist V^\perp auch ein abgeschlossener Teilraum und $I - P$ der orthogonale Projektor darauf. Wir erhalten auch $(V^\perp)^\perp = V$.

Ist $U \subseteq \mathcal{H}$ ein Teilraum, der nicht unbedingt abgeschlossen zu sein braucht, dann gilt $(U^\perp)^\perp = \overline{U}$ (Abschluss). Der Teilraum U heißt *dicht*, falls $\overline{U} = \mathcal{H}$ gilt, d.h. jeder Vektor $v \in \mathcal{H}$ ist approximierbar durch eine Folge (u_k) von Vektoren $u_k \in U$. Es gilt

$$(9.3) \quad U \text{ dicht in } \mathcal{H} \iff U^\perp = \{0\}.$$

9.3. Orthonormalsysteme: In der Linearen Algebra der n -dimensionalen Vektorräume mit Skalarprodukt \mathcal{H} spielen Orthonormalbasen $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{H}$ eine der Hauptrollen, weil sie als Basis von \mathcal{H} mit der Zusatzeigenschaft $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$ ($1 \leq j, k \leq n$) insbesondere für jedes $u \in \mathcal{H}$ die folgende orthogonale Entwicklung mit eindeutigen und sehr rasch berechenbaren Koeffizienten erlauben:

$$u = \sum_{j=1}^n \langle v_j, u \rangle v_j.$$

Im Falle eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes müssen wir nur den Begriff ein wenig vorsichtiger angehen, dann stellt sich dennoch ein vergleichbarer Erfolg ein. Wir nennen eine Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren in \mathcal{H} ein *Orthonormalsystem* (Abkürzung ONS), falls

$$\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk} \quad (j, k \in \mathbb{N})$$

gilt. Also ist ebenso wie im endlichdimensionalen Fall stets $\|v_j\| = 1$ und $\langle v_j, v_k \rangle = 0$ für $j \neq k$, woraus übrigens auch folgt, dass die Menge $\{v_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig ist.

Ein Orthonormalsystem $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wird nun als *vollständig* bezeichnet (Abkürzung vONS), falls für jedes $u \in \mathcal{H}$ die Entwicklung

$$(9.4) \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v_j, u \rangle v_j$$

im Sinne der Norm-Konvergenz in \mathcal{H} gilt. Analog zum Endlichdimensionalen ist leicht zu sehen, dass die Koeffizienten einer solchen konvergenten Entwicklung $u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j v_j$ eindeutig sind: Betrachte einfach $\langle v_k, u \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_k$. (Hier haben wir wegen Vertauschung eines Grenzwertes mit dem Skalarprodukt stillschweigend verwendet, dass die Abbildung $z \mapsto \langle w, z \rangle$ stetig $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist für jedes $w \in \mathcal{H}$, was unmittelbar aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU) folgt.)

Beispiel: 1) Im l^2 ist durch $v_k := e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit einem Einser an der k . Stelle und sonst Nullen klarer Weise ein ONS gegeben, das auch vollständig ist, weil wir jedes $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$ in der Form

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$$

schreiben können; die Konvergenz der Reihe trifft zu, weil für jedes $N \in \mathbb{N}$ der Ausdruck

$$\|x - \sum_{j=1}^N x_j e_j\|^2 = \|(0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)\|^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2$$

ein Reihenrest der nach Definition von l^2 konvergenten Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$ ist.

2) Im Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

bilden die Funktionen v_k ($k \in \mathbb{Z}$) mit $v_k(t) := e^{ikt}$ ein ONS, wie eigentlich schon im ersten Semester bei den Grundbegriffen zu Fourierreihen festgestellt. Außerdem entsprechen die Skalarprodukte

$$\langle v_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt$$

gerade den Fourierkoeffizienten. Die Eigenschaft der sogenannten quadratischen Konvergenz von Fourierreihen, also die L^2 -konvergente Entwicklung

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle v_j, f \rangle v_j,$$

besagt nun wiederum, dass die v_k ($k \in \mathbb{Z}$) ein vONS in $L^2([-\pi, \pi])$ bilden.

Bemerkungen: (i) Auf Grund des obigen Beispiels 2) wird die Entwicklung (9.4) im abstrakten Hilbertraumfall oft auch als Fourierentwicklung bezeichnet. In jedem Fall handelt es sich um eine direkte Verallgemeinerung.

(ii) Wir hatten das Orthonormalsystem im Beispiel 2) bequemer Weise mit der Indexmenge \mathbb{Z} statt \mathbb{N} versehen, was natürlich keinen qualitativen Unterschied macht und durch eine geeignete Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, also eine Abzählung der ganzen Zahlen, technisch umgeschrieben werden könnte. Entscheidend ist in diesen Beispielen nur, dass wir jeweils *abzählbare* ONS haben, die also mittels Folgen von Vektoren angeschrieben werden können.

Wir werden nun stets die Existenz eines *abzählbaren vollständigen* ONS im Hilbertraum \mathcal{H} voraussetzen, was übrigens äquivalent dazu ist, dass \mathcal{H} *separabel* ist, was wiederum bedeutet, dass es eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathcal{H}$ mit $\overline{A} = \mathcal{H}$ gibt, d.h. jeder Vektor $v \in \mathcal{H}$ kann durch Folgen aus A approximiert werden.

9.4. Weitere Eigenschaften: Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum mit vONS $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$. (a) Sind $u, w \in \mathcal{H}$, dann gilt ja gemäß (9.4) $u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v_j, u \rangle v_j$ sowie $w = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, w \rangle v_k$ und daher (wegen der Stetigkeit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

$$\langle u, w \rangle = \sum_{j,k} \overline{\langle v_j, u \rangle} \langle v_k, w \rangle \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_k, w \rangle.$$

Insbesondere folgt mit $w = u$ die *Parseval-Gleichung*

$$(9.5) \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v_k, u \rangle|^2$$

und zeigt, wie aus den „abstrakten Fourierkoeffizienten“ die Hilbertraum-Norm berechnet werden kann. Noch spezieller sehen wir

$$u \perp v_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \implies u = 0.$$

(b) Ist $V \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum, dann ist V selbst ein separabler Hilbertraum. Falls V die endliche Dimension $n \in \mathbb{N}$ hat, dann besitzt V eine Orthonormalbasis w_1, \dots, w_n , die auch ein vONS von V ist, und

$$Pu := \sum_{k=1}^n \langle w_k, u \rangle w_k \quad (u \in \mathcal{H})$$

ist eine Formel für die Orthogonalprojektion P auf V . Der eindimensionale Spezialfall wäre $V = \text{span}\{v\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ mit einem Einheitsvektor v , in welchem Fall wir für den eindimensionalen Projektor P auf V die einfache Formel

$$Pu = \langle v, u \rangle v$$

erhalten, was bereits recht nahe der physikalischen *ket-bra-Notation*

$$P = |v\rangle\langle v|$$

kommt. (Es steht also einfach $|v\rangle$ für den Vektor v und $\langle v|$ für das lineare Funktional $u \mapsto \langle v, u \rangle$.)

Ist V unendlichdimensional, dann besitzt V ein vONS $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und die Orthogonalprojektion P auf V ist gegeben durch

$$Pu := \sum_{k=1}^{\infty} \langle w_k, u \rangle w_k \quad (u \in \mathcal{H}).$$

In jedem Fall kann das ONS (w_k) durch Vektoren $z_j \in V^\perp$ zu einem vONS von \mathcal{H} ergänzt werden und wir erhalten für jedes $u \in \mathcal{H}$ die Zerlegung gemäß $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$ in der Form

$$u = \underbrace{\sum_k \langle w_k, u \rangle w_k}_{Pu \in V} + \underbrace{\sum_j \langle z_j, u \rangle z_j}_{u - Pu \in V^\perp}.$$

(c) Jeder Vektor $v \in \mathcal{H}$ definiert vermöge des Skalarproduktes das lineare (bra-)Funktional $l_v = \langle v | : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Zuordnung $l_v(u) := \langle v, u \rangle$ ($u \in \mathcal{H}$). Dieses Funktional genügt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auch der Abschätzung

$$|l_v(u)| \leq \|v\| \|u\| \quad \text{für alle } u \in \mathcal{H}.$$

Eine ganz besondere Eigenschaft von Hilberträumen ist nun, dass gemäß des *Satzes von Fréchet-Riesz* jedes lineare Funktional $\mu: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, das mit einer gewissen Konstanten $c \geq 0$ die Ungleichung

$$(SLF) \quad |\mu(u)| \leq c \|u\| \quad \text{für alle } u \in \mathcal{H}$$

erfüllt, von der Form l_v ist, d.h. es gibt ein (eindeutiges) $v \in \mathcal{H}$ mit $\mu = \langle v | = l_v$. Wie sich gar nicht schwer zeigen lässt, ist die Ungleichung (SLF) einfach charakterisierend für die Stetigkeit des linearen Funktionals μ (die ihrerseits wegen der Linearität von μ äquivalent zur Stetigkeit bei 0 ist). In diesem Sinne lässt sich durch die Beziehung $\mu \leftrightarrow v$ der Dualraum eines Hilbertraumes mit dem Hilbertraum selbst identifizieren. (Die Abbildung $\mu \mapsto v$ ist dabei konjugiert linear.)

(d) Rein mathematisch strukturell gesehen sind normierte Vektorräume „ununterscheidbar“, falls es einen isometrischen Isomorphismus zwischen ihnen gibt, das ist eine bijektive lineare Abbildung, die auch die Normen erhält. Bei Hilberträumen gibt es verstärkend noch die Eigenschaft, dass durch den Isomorphismus die Skalarprodukte ineinander übergeführt werden und wir sprechen dann von einem unitären Isomorphismus. Unter solchen Gesichtspunkten gilt nun:

(i) Jeder n -dimensionale Hilbertraum ist unitär isomorph zu \mathbb{C}^n mit dem Standardskalarprodukt (9.1) (einfach durch Wahl einer Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n und lineare Ausdehnung der Zuordnung $v_k \mapsto e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ [Einsler an der k . Stelle]);

(ii) (*Satz von Fischer-Riesz*) jeder unendlichdimensionale *separable* Hilbertraum ist unitär isomorph zu l^2 mit dem Skalarprodukt (9.2) (einfach durch Wahl eines vONS $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und lineare Ausdehnung der Zuordnung $v_k \mapsto e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [Einsler an der k . Stelle]).

9.5. Warum Hilberträume? Bedarf aus der Quantenmechanik:

(A) Die *Schrödinger-Gleichung* für ein Teilchen (ohne Spin) mit Masse m hat grundsätzlich die Gestalt

$$i\hbar \partial_t \psi = H\psi,$$

wobei $\psi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes fixe $t \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $x \mapsto \psi(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ haben soll (und für $\psi(\cdot, t) \neq 0$ somit $x \mapsto |\psi(x, t)|^2 / \|\psi(\cdot, t)\|_{L^2}^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte dienen kann) und

$$(H\psi)(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t)$$

mit einer Potentialfunktion $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. In der Wirkung von H spielt t eigentlich eher die Rolle eines „externen Parameters“, ansonsten ist H eine *lineare* Abbildung $L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$, ..., na ja, wegen der Differentiationen eigentlich nicht ganz so, daher korrigieren wir das mal z.B. zu

$$H: \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3), \quad H\varphi := -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + V\varphi$$

(was zumindest dann funktioniert, falls V nicht zu starkes Wachstum im Unendlichen oder extreme lokale Unbeschränktheiten aufweist).

- Weil V reellwertig ist, können wir für beliebige $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}\langle H\varphi_1, \varphi_2 \rangle &= -\frac{\hbar}{2m} \langle \Delta\varphi_1, \varphi_2 \rangle + \langle V\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \frac{\hbar}{2m} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_k\varphi_1, \partial_k\varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1, V\varphi_2 \rangle \\ &= -\frac{\hbar}{2m} \langle \varphi_1, \Delta\varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1, V\varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, H\varphi_2 \rangle.\end{aligned}$$

Dies zeigt also, dass H *symmetrisch* bezgl. des L^2 -Skalarproduktes ist.

- Falls φ eine Eigenfunktion von H zum Eigenwert λ ist, also $H\varphi = \lambda\varphi$, dann muss λ wegen der Symmetrie von H *reell* sein: Das übliche Argument dazu ist $\lambda\langle\varphi, \varphi\rangle = \langle\varphi, \lambda\varphi\rangle = \langle\varphi, H\varphi\rangle = \langle H\varphi, \varphi\rangle = \langle\lambda\varphi, \varphi\rangle = \bar{\lambda}\langle\varphi, \varphi\rangle$ und $\langle\varphi, \varphi\rangle = \|\varphi\|^2 \neq 0$, weil φ eine Eigenfunktion ist. (Eigenvektoren sind per definitionem keine Nullvektoren!)
- Ist nun φ eine Eigenfunktion von H zum Eigenwert λ , somit $\lambda \in \mathbb{R}$, dann können wir die zeitabhängige Funktion

$$\psi(x, t) := e^{-\frac{i\lambda t}{\hbar}} \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R})$$

betrachten. Wir erhalten auf diese Weise eine Lösung der Schrödinger-Gleichung, denn

$$i\hbar \partial_t \psi = i\hbar \left(-\frac{i\lambda}{\hbar}\right) e^{-\frac{i\lambda t}{\hbar}} \varphi = e^{-\frac{i\lambda t}{\hbar}} \lambda \varphi = e^{-\frac{i\lambda t}{\hbar}} H\varphi = H \left(e^{-\frac{i\lambda t}{\hbar}} \varphi\right) = H\psi.$$

(B) *Abstrakter Formalismus im separablen Hilbertraum* \mathcal{H} : Jedes Element $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\| = 1$ definiert einen sogenannten *Vektorzustand*. Genauer gesagt legt der von φ aufgespannte (komplex) eindimensionale Teilraum $\text{span}\{\varphi\} = \{\lambda\varphi \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ den Zustand fest, d.h. für jedes $c \in \mathbb{R}$ wird eigentlich $e^{ic}\varphi$ als derselbe (Vektor-)Zustand angesehen.

Observable, die klassisch-physikalisch z.B. durch Funktionen am Phasenraum eines mechanischen Modells gegeben sind, werden in der Quantenmechanik durch dicht definierte symmetrische lineare Operatoren auf \mathcal{H} dargestellt. Das sind lineare Abbildungen $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$, wobei der Bereich $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum ist und $\langle A\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, A\varphi_2 \rangle$ gelten soll für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in D(A)$.

Ein Beispiel ist wie oben der Operator H der Gesamtenergie im Schrödinger-Modell. Wie wir dort auch gesehen haben, garantiert die Symmetriebedingung, dass *Eigenwerte von A stets reell* sind.

Weitere prominente Beispiele für Observablen auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ sind der *Ortsoperator*

$$(Q\varphi)(x) := x\varphi(x)$$

und der *Impulsoperator*

$$(P\varphi)(x) = \frac{\hbar}{i} \varphi'(x),$$

die beide auf dem Bereich $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert sind.

Der *Erwartungswert* einer Observable im (Vektor-)Zustand $\varphi \in D(A)$ ist definiert als

$$E_\varphi(A) := \langle \varphi, A\varphi \rangle.$$

Wegen der Symmetrie von A ist $E_\varphi(A)$ reell, denn

$$\overline{E_\varphi(A)} = \overline{\langle \varphi, A\varphi \rangle} = \langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, A\varphi \rangle = E_\varphi(A).$$

In dem Spezialfall, dass φ ein Eigenvektor von A zum (reellen) Eigenwert λ ist, also $A\varphi = \lambda\varphi$ gilt, erhalten wir

$$E_\varphi(A) = \langle \varphi, A\varphi \rangle = \langle \varphi, \lambda\varphi \rangle = \lambda \underbrace{\langle \varphi, \varphi \rangle}_1 = \lambda.$$

Die Bezeichnung Erwartungswert für $E_\varphi(A)$ lässt sich im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ am Beispiel eines Multiplikationsoperators $(A\varphi)(x) := a(x)\varphi(x)$ mit der polynomial beschränkten Funktion $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi \in D(A) := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ganz gut nachvollziehen: Ist φ ein (Vektor-)Zustand, dann ist wegen $\|\varphi\|^2 = 1$ also die Funktion $x \mapsto |\varphi(x)|^2$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte und die Größe

$$\int_{\mathbb{R}} a(x)|\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}a(x)\varphi(x) dx = \langle \varphi, A\varphi \rangle = E_\varphi(A)$$

in der Tat gerade der zugehörige Erwartungswert für die Zufallsvariable a .

Interessant ist hier auch der ganz spezielle Fall, wo a die charakteristische Funktion eines Intervalls $J \subseteq \mathbb{R}$ ist, also $a(x) = 1$ für $x \in J$ und $a(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus J$. Dann interpretieren wir nämlich die Größe

$$E_\varphi(A) = \int_J |\varphi(x)|^2 dx$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen im Zustand φ im Intervall J anzutreffen.

10. Spektrum und Diagonalisierung

Wir führen hier einige grundlegende funktionalanalytische Begriffe zunächst für den Fall von beschränkten Operatoren ein, damit uns die zusätzlichen technischen Mätzchen der unbeschränkten Operatoren nicht den Blick zu sehr verstellen. In diesem Kapitel ist weiterhin \mathcal{H} ein komplexer separabler Hilbertraum.

10.1. Beschränkte Operatoren: Eine lineare Abbildung $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt *stetig* oder *beschränkt*, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass für alle $u \in \mathcal{H}$ die Abschätzung

$$(10.1) \quad \|Tu\| \leq C\|u\|$$

gültig ist. In diesem Fall heißt die Größe

$$(10.2) \quad \|T\| := \sup\{\|Tu\| \mid \|u\| \leq 1\}$$

Operatornorm von T . (Das entspricht der kleinstmöglichen Konstanten C in obiger Ungleichung.)

In der Tat führt (10.1) wegen $\|Tu - Tv\| = \|T(u - v)\| \leq C\|u - v\|$ offensichtlich auf die (Lipschitz-)Stetigkeit von T ; auch umgekehrt folgt aus der Stetigkeit von T eine Beschränktheitsbedingung wie (10.1), was nicht schwierig zu zeigen wäre.

Wir bezeichnen die Menge aller beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} mit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und halten fest, dass dies ein Vektorraum ist und (10.2) eine Norm darauf. Darüberhinaus gilt für $R, S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auch stets

$$TS \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad R(T + S) = RT + RS, \quad \|TS\| \leq \|T\|\|S\|.$$

Beispiele: 1) Auf $\mathcal{H} = l^2$ betrachten wir den *Rechtsshift* $R: l^2 \rightarrow l^2$,

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots),$$

sowie den *Linksshift* $L: l^2 \rightarrow l^2$,

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, \dots).$$

Beide sind linear und wegen $\|Rx\| = \|x\|$ sowie $\|Lx\| \leq \|x\|$ also beschränkte Operatoren.

2) Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, dann definieren wir $A: l^2 \rightarrow l^2$ durch

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) := (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \dots)$$

eine lineare Abbildung. Es gilt

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 |x_k|^2 \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \right)^2 \|x\|^2,$$

also $\|Ax\| \leq C\|x\|$ mit $C := \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| =: \|a\|_\infty$ und A ist als beschränkter Operator erkannt.

3) Ein „kontinuierliches Analogon“ zum vorigen Beispiel erhalten wir auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ durch den Multiplikationsoperator

$$(M_v f)(x) := v(x)f(x) \quad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

mit der beschränkten Funktion $v \in L^\infty(\mathbb{R})$. Linearität ist klar und

$$\begin{aligned} \|M_v f\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |v(x)f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 |f(x)|^2 dx \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}} |v(z)|^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \left(\sup_{z \in \mathbb{R}} |v(z)| \right)^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

zeigt $\|M_v f\| \leq C\|f\|$ mit $C := \|v\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{R}} |v(z)|$.

4) Ein Integraloperator: Für die stetige Funktion $G: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und $f \in L^2([0, 1])$ betrachten wir

$$(Tf)(x) := \int_0^1 G(x, y)f(y) dy \quad (x \in [0, 1]).$$

Dann lässt sich recht mühelos zeigen, dass $Tf \in L^2([0, 1])$ und $\|Tf\| \leq \|G\|_\infty \|f\|$ gilt (mit $\|G\|_\infty := \sup\{|G(x, y)| \mid (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$). Linearität von T ist offensichtlich, also haben wir ein weiteres Beispiel eines beschränkten Operators.

5) Auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}u = \hat{u}$ ($u \in L^2(\mathbb{R}^n)$) linear und gemäß Plancherel-Formel (siehe 3.6)

$$\|\mathcal{F}u\|^2 = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}u \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$$

auch ein beschränkter Operator mit Operatornorm $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Wir bezeichnen mit I den Identitäts- oder Einheitsoperator, d.h. $Ix := x$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt (stetig) *invertierbar*, falls es einen Operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der Eigenschaft

$$SA = I = AS$$

(anders als im Endlichdimensionalen sind hier wirklich beide Gleichungen relevant!) gibt und den wir in diesem Falle mit A^{-1} bezeichnen.

Adjungierter Operator: Zu $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gibt es einen eindeutigen Operator $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, der durch die Bedingung

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle \quad \text{für alle } u, v \in \mathcal{H}$$

festgelegt ist. Es gilt $(A^*)^* = A$, $\|A^*\| = \|A\|$ und für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ stets

$$(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *symmetrisch* oder *hermitesch*, falls $A^* = A$ gilt, d.h.

$$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle \quad \text{für alle } u, v \in \mathcal{H}.$$

Kern und Bild (image, range) eines Operators: Wir erinnern aus der Linearen Algebra an die speziellen Teilräume $\ker A = \{u \in \mathcal{H} \mid Au = 0\}$ und $\operatorname{ran} A = \{Au \mid u \in \mathcal{H}\}$ für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Es gelten die nützlichen Relationen

$$(10.3) \quad \ker A^* = (\operatorname{ran} A)^\perp, \quad (\ker A^*)^\perp = \overline{\operatorname{ran} A}.$$

Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *positiv*, wir schreiben $A \geq 0$, falls gilt:

$$\langle u, Au \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{H}.$$

Bemerkung: In diesem Fall ist übrigens A automatisch auch symmetrisch, was sich mit Hilfe sogenannter Polarisierungsidentitäten zeigen lässt. (Vorsicht: Dies hängt auch stark am Skalarenkörper \mathbb{C} , denn z.B. auf \mathbb{R}^2 definiert die nichtsymmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung A mit $\langle x, Ax \rangle = 0 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, aber $\langle Ae_1, e_2 \rangle = -1 \neq 1 = \langle e_1, Ae_2 \rangle$. Also müssten wir im reellen Fall bei positiven Operatoren die Symmetrie zusätzlich verlangen.)

Ein invertierbarer Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *unitär*, falls gilt

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{für alle } v, w \in \mathcal{H}.$$

Es folgt insbesondere auch $\|Uv\|^2 = \langle Uv, Uv \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$, also $\|Uv\| = \|v\|$, somit ist U in dem Fall auch isometrisch. Die Unitarität von U ist gleichbedeutend mit der Bedingung

$$U^* = U^{-1}.$$

10.2. Spektrum: Zunächst vereinbaren wir eine vereinfachte Notation, indem wir für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ statt $T - \lambda I$ meistens nur $T - \lambda$ schreiben wollen. Wir nennen dann

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ ist (stetig) invertierbar}\}$$

die *Resolventenmenge* von T , während ihr Komplement

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ ist nicht (stetig) invertierbar}\}$$

das *Spektrum* von T heißt. Für $\lambda \in \rho(T)$ ist der beschränkte Operator

$$R(\lambda, T) := (T - \lambda)^{-1}$$

die sogenannte *Resolvente*. Es lässt sich zeigen, dass $\rho(T)$ stets eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist und für beliebige $u, v \in \mathcal{H}$ die Abbildung $\lambda \mapsto \langle u, R(\lambda, T)v \rangle$ holomorph $\rho(T) \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Für einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $L: V \rightarrow V$ bekanntlich genau dann nicht invertierbar, wenn sie nicht injektiv ist. (Das liegt an $\dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{ran} L$.) Daher kann in diesem Fall $T - \lambda$ nur dann nicht invertierbar sein, somit $\lambda \in \sigma(T)$, falls $\ker(T - \lambda) \neq \{0\}$ ist, d.h. es gibt einen Vektor $v \neq 0$ mit $Tv = \lambda v$, mit anderen Worten:

Im Endlichdimensionalen besteht das Spektrum von T gerade aus den Eigenwerten.

Im allgemeinen Fall nennen wir den Anteil der Eigenwerte von T das *Punktspektrum*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ ist nicht injektiv}\}.$$

Somit gibt es zu jedem $\lambda \in \sigma_p(T)$ immer einen Vektor $u \in \mathcal{H}$, $u \neq 0$, sodass $Tu = \lambda u$ gilt — also einen Eigenvektor. Quantenphysikalisch entsprechen diese den gebundenen Zuständen.

Im unendlichdimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} kann es tatsächlich vorkommen (s.u.), dass ein Wert λ zum Spektrum eines Operators $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gehört, ohne ein Eigenwert zu sein, d.h. $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. Quantenphysikalisch ist das oft ein Indiz für sogenannte Streuzustände, die dem folgenden *kontinuierlichen (stetigen) Spektrum* zugeordnet werden:

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ ist injektiv, aber nicht surjektiv und } \text{ran}(T - \lambda) \text{ ist dicht}\}.$$

Darüberhinaus gibt es noch das sogenannte *Residualspektrum* $\sigma_r(T) := \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T))$, das aber physikalisch nicht wichtig ist und z.B. bei beschränkten symmetrischen Operatoren nicht vorkommen kann.

Beispiele: 0) $\sigma(0) = \{0\} = \sigma_p(0)$ und $\sigma(I) = \{1\} = \sigma_p(I)$.

1) Für den Operator A aus Beispiel 2) in 10.1, also $A(x_1, x_2, x_3, \dots) := (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \dots)$ auf l^2 mit einer beschränkten Folge (a_k) ergibt sich zunächst

$$\sigma_p(A) = \{a_j \mid j \in \mathbb{N}\},$$

denn offensichtlich gilt $Ae_j = a_j e_j$ und die Gleichung $Ax = \lambda x$ bedeutet $a_k x_k = \lambda x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was für $x \neq 0$ nur mit $\lambda = a_j$ für ein gewisses j (sowie $x = x_j e_j$) erfüllbar ist. Weiters lässt sich zeigen, dass $\sigma_r(A) = \emptyset$ gilt und

$$\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)}.$$

Ist z.B. (a_k) eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$, d.h. $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{a_j \mid j \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(A)$, dann erhalten wir in dem Fall $\sigma(A) = [0, 1]$.

2) Wir betrachten $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ und $(T\varphi)(x) := x\varphi(x)$ für $\varphi \in L^2([0, 1])$ und $x \in [0, 1]$. Dann ist

$$\sigma_p(T) = \emptyset,$$

d.h. T hat keine Eigenwerte, denn die Gleichung $A\varphi = \lambda\varphi$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\varphi \neq 0$ impliziert

$$(x - \lambda)\varphi(x) = 0 \quad \text{f.ü.},$$

was auf die unsinnige Bedingung $x = \lambda$ für (fast) alle x mit $\varphi(x) \neq 0$ führt. Weiters ist $\sigma_r(T) = \emptyset$, weil T symmetrisch ist.

Wir behaupten schließlich

$$\sigma(T) = [0, 1] = \sigma_c(T).$$

Die Gleichung $\sigma(T) = \sigma_c(T)$ ist wegen $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_r(T)$ klar, also bleibt zu überlegen, warum $\sigma(T) = [0, 1]$ gilt.

Zunächst kann für $0 \leq \lambda \leq 1$ der Operator $T - \lambda$ nicht surjektiv sein: Für $1 \in L^2([0, 1])$ führt nämlich die Gleichung

$$(T - \lambda)\varphi = 1 \quad \text{für } \varphi \in L^2([0, 1])$$

punktweise zwingend auf $\varphi(x) = \frac{1}{x-\lambda}$ f.ü., aber $\int_0^1 dx/|x-\lambda|^2 = \infty$ sagt $\varphi \notin L^2([0, 1])$ — ein Widerspruch, also ist $[0, 1] \subseteq \sigma(T)$.

Andererseits können wir für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ durch $g(x) := 1/(x - \lambda)$ eine beschränkte Funktion bzgl. $x \in [0, 1]$ angeben mit der Eigenschaft $(T - \lambda)^{-1}\varphi = g\varphi$, sodass $T - \lambda$ invertierbar ist als stetiger Operator auf $L^2([0, 1])$; wir haben also gezeigt, dass auch $\sigma(T) \subseteq [0, 1]$ gelten muss.

Eigenschaften: Hier sei stets $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

- $\sigma(T)$ ist eine nichtleere kompakte Teilmenge von \mathbb{C} und $|\lambda| \leq \|T\|$ für jedes $\lambda \in \sigma(T)$;

(Beschränktheit der Spektralwerte durch $\|T\|$ können wir so nachweisen: Zunächst bemerken wir, dass im Falle $\|T\| < 1$ das Analogon der geometrischen Reihe¹ $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = 1/(1 - \|T\|)$ absolut konvergent ist und direkte Rechnung $(1 - T) \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k - \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} = I = (\sum_{k=0}^{\infty} T^k)(1 - T)$ zeigt

$$(1 - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k;$$

nun ist für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > \|T\|$ sicherlich $\|T/\mu\| < 1$ und daher

$$(T - \mu)^{-1} = -\frac{1}{\mu}(1 - T/\mu)^{-1} = -\frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^k} T^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{k+1}} T^k,$$

also $\mu \in \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

- $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$;
- der *Spektralradius* ist $r(T) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ und erfüllt stets $r(T) \leq \|T\|$, wobei für einen symmetrischen Operator sogar $r(T) = \|T\|$ gilt;
- das *approximative Punktspektrum* $\sigma_{\text{app}}(T)$ besteht aus jenen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die es eine Folge (u_k) von Vektoren in \mathcal{H} mit $\|u_k\| = 1$ gibt, sodass

$$Tu_k - \lambda u_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

gilt. Für große k gilt also zumindest $Tu_k \approx \lambda u_k$. Es gilt stets $\sigma_{\text{app}}(T) \supseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$.

- Wenn T *symmetrisch* ist, dann gilt $\sigma_{\text{app}}(T) = \sigma(T)$ und

$$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R},$$

d.h. *jeder Spektralwert* von T ist *reell* und ein *approximativer Eigenwert*. Das ist physikalisch sehr brauchbar, weil symmetrische Operatoren ja Observablen darstellen sollen.

- Für positives T gilt, dass die Spektralwerte nichtnegativ sind, also $\sigma(T) \subseteq [0, \infty[$.

10.3. Funktionalkalkül (Funktionen von Operatoren): Eine Polynomfunktion $p(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_mz^m$ kann ganz leicht auf Operatoren $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ an Stelle von z angewendet werden, nämlich

$$p(T) := c_0 + c_1T + c_2T^2 \dots + c_mT^m \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

¹genannt *Neumann-Reihe*

Wenn T symmetrisch ist, also $T^* = T$ gilt, dann folgt natürlich $p(T)^* = \overline{c_0} + \overline{c_1}T^* + \overline{c_2}(T^*)^2 \dots + \overline{c_m}(T^*)^m = \overline{p}(T)$, wobei wir $\overline{p}(z) := \overline{p(z)}$ gesetzt haben; ist q eine weitere Polynomfunktion und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann erhalten wir durch direkte Rechnung auch

$$(\alpha p + \beta q)(T) = \alpha p(T) + \beta q(T) \quad \text{und} \quad (pq)(T) = p(T)q(T).$$

Nun sei weiterhin T *symmetrisch* und $\sigma(T) \subseteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ kann jede stetige Funktion f gleichmäßig durch eine Folge (p_n) von Polynomfunktionen approximiert werden (ein klassischer Satz von Weierstraß). Sorgfältige Analyse zeigt, dass sich die gleichmäßige Konvergenz $p_n \rightarrow f$ in eine Operatornormkonvergenz

$$f(T) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T)$$

überträgt und insgesamt dazu führt, dass wir für jede Funktion $f \in C(\sigma(T))$ einen Operator $f(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definieren können. Es gilt $f(T)^* = \overline{f}(T)$, für $g \in C(\sigma(T))$ auch

$$f(T)g(T) = (fg)(T) \quad \text{sowie} \quad \|f(T)\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \sigma(T)} |f(x)|$$

und der sogenannte *Spektralabbildungssatz*

$$(10.4) \quad \sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Beispiele: 1) Ist (a_k) eine reelle beschränkte Folge und T auf l^2 gegeben durch

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots),$$

dann ist zunächst klar, dass wir für eine Polynomfunktion p direkt $p(T)(x_1, x_2, x_3, \dots) = (p(a_1)x_1, p(a_2)x_2, p(a_3)x_3, \dots)$ erhalten und für $f \in C(\sigma(T))$ folgt im Limes weiters

$$f(T)(x_1, x_2, x_3, \dots) = (f(a_1)x_1, f(a_2)x_2, f(a_3)x_3, \dots).$$

2) Mit den t -parametrisierten Funktionen $f_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_t(x) := e^{-itx}$ erhalten wir durch

$$U(t) := e^{-itT} := f_t(T)$$

aus dem symmetrischen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ einen unitären Operator — und zwar lässt sich $U(t)^* = U(-t) = U(t)^{-1}$ nachrechnen — und die Familie $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ erfüllt

$$U(0) = I, \quad U(s+t) = U(s)U(t) \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

bildet also eine sogenannte *unitäre Gruppe von Operatoren* auf \mathcal{H} .

3) Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ positiv hatten wir ja $\sigma(T) \subseteq [0, \infty[$ notiert. Daher definiert $f(t) := \sqrt{t}$ eine stetige (positive) Funktion f auf $\sigma(T)$ mit $f^2(t) = t$ und wir können $S := f(T)$ wegen $S^2 = f(T)f(T) = f^2(T) = T$ als *Quadratwurzel* \sqrt{T} von T auffassen.

4) Ist $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ beliebig, dann ist $A^*A \geq 0$, weil natürlich $\langle u, A^*Au \rangle = \langle Au, Au \rangle = \|Au\|^2 \geq 0$ für alle $u \in \mathcal{H}$ gilt. Wir können daher mittels 3) den *Absolutbetrag* $|A| := \sqrt{A^*A} \geq 0$ definieren.

10.4. Spektralsatz für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch: Zu jedem Vektorzustand $u \in \mathcal{H}$ (somit $\|u\| = 1$) gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_u auf \mathbb{R} mit $\mu_u(\sigma(T)) = 1$, sodass für jedes $f \in C(\sigma(T))$ gilt

$$E_u(f(T)) = \langle u, f(T)u \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_u.$$

Kurzer Einschub: Hier ist μ_u eine Abbildung, die gewissen Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}$, zumindest den sogenannten Borelmengen, die jedenfalls alle Intervalle, offene und abgeschlossene Mengen umfassen, jeweils eine Maßzahl $\mu_u(B) \in [0, \infty[$ zuordnet dergestalt, dass $\mu_u(\emptyset) = 0$, $\mu_u(\mathbb{R}) = 1$ und $\mu_u(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_u(B_k)$ für paarweise disjunkte Borelmengen B_k gilt. Ein besonders einfaches Beispiel ist für $x_0 \in \mathbb{R}$ das Dirac-Maß δ_{x_0} mit

$$\delta_{x_0}(B) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 \in B, \\ 0 & \text{für } x_0 \notin B. \end{cases}$$

Andere Beispiele ergeben sich mittels Dichtefunktionen $g \in L^1(\mathbb{R})$, $g \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$ durch $\mu(B) := \int_B g(x) dx$. In diesem zweiten konkreten Fall ist der Integralbegriff bzgl. $\mu = g dx$ bereits gegeben, für ein allgemeines Maß wird der Begriff schrittweise zuerst mit Integralen über Treppenfunktionen begonnen und dann mittels Approximationen daraus weiter aufgebaut.

Weitere Eigenschaften von μ_u sind wie folgt:

- Ist u ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T)$, dann ergibt sich $\mu_u = \delta_\lambda$, was einem scharfen Messwert λ entspricht.
- Für jedes $\lambda \in \sigma(T)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es einen Zustandsvektor $u \in \mathcal{H}$, sodass

$$\mu_u([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) = 1,$$

d.h. die Beobachtungswerte für T im Zustand u liegen in ε -Nähe zu λ .

- Ist $\lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für jeden Zustandsvektor $u \in \mathcal{H}$ zwingend $\mu_u([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) = 0$ gilt. Zusammen mit der obigen Eigenschaft gelangen wir also zu der Vorstellung, dass *das Spektrum $\sigma(T)$ die Menge der möglichen Messwerte für die Observable T repräsentiert.*
- Ist P eine Orthogonalprojektion mit $P \neq 0$ und $P \neq I$, dann gilt $\sigma(P) = \{0, 1\}$ und

$$\mu_u = \|u - Pu\|^2 \delta_0 + \|Pu\|^2 \delta_1,$$

was dem Charakter von Ja/Nein-Experimenten entspricht. (Wegen $(u - Pu) \perp Pu$ gilt $1 = \|u\|^2 = \|u - Pu\|^2 + \|Pu\|^2$ und wir haben Wahrscheinlichkeit $\|u - Pu\|^2$ für Nein und Wahrscheinlichkeit $\|Pu\|^2$ für Ja.)

10.5. Diagonalisierung für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch: Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf \mathbb{R} und eine stetige beschränkte Funktion $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie eine unitäre lineare Abbildung $U: \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$, sodass für alle $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ die Gleichung

$$UTU^{-1}\varphi = v\varphi =: M_v\varphi$$

gilt. D.h. die „Koordinatentransformation“ U führt T über in den Multiplikationsoperator M_v auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, was eben als Verallgemeinerung der Wirkung einer Diagonalmatrix angesehen

werden kann. (Denn $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ wirkt auf $z = (z_1, \dots, z_n)$ durch $Az = (a_1 z_1, \dots, a_n z_n)$ und wir können das mit Funktionen $a, z: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $a(j) := a_j$ bzw. $z(j) := z_j$ immer als Multiplikationsoperatorwirkung interpretieren.)

Darüberhinaus gilt: Ist $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ebenfalls symmetrisch und vertauscht mit T , d.h. $ST = TS$, dann sind S und T simultan diagonalisierbar, also mit derselben Transformation U ist dann $UTU^{-1} = M_v$ und $USU^{-1} = M_w$.

10.6. Unschärferelation: Für $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definieren wir den *Kommutator* durch

$$[S, T] := ST - TS \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Nun seien T und S beide symmetrisch, sodass wir die Erwartungswerte $E_u(S) = \langle u, Su \rangle$, $E_u(T) = \langle u, Tu \rangle$ in einem Vektorzustand $u \in \mathcal{H}$ betrachten können. Wir definieren dazu jeweils passend die *Varianz* durch

$$V_u(S) := \|Su - E_u(S)u\|^2, \quad V_u(T) := \|Tu - E_u(T)u\|^2.$$

Satz: Es gilt $V_u(S) \cdot V_u(T) \geq \frac{1}{4} |\langle u, [S, T]u \rangle|^2$.

Beweis: Wir setzen zur Abkürzung $A := S - E_u(S)$ und $B := T - E_u(T)$, dann ist

$$E_u(A) = 0 = E_u(B), \quad \text{somit} \quad V_u(A) = \|Au\|^2 = V_u(S), \quad V_u(B) = \|Bu\|^2 = V_u(T)$$

und außerdem auch $[A, B] = [S, T]$ (weil skalare Vielfache von I mit jedem Operator vertauschen). Wir berechnen nun schrittweise unter Beachtung der Symmetrie von A und B (weil $E_u(S), E_u(T)$ reell sind) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |\langle u, [S, T]u \rangle|^2 &= |\langle u, [A, B]u \rangle|^2 = |\langle u, ABu \rangle - \langle u, BAu \rangle|^2 \\ &= |\langle Au, Bu \rangle - \langle Bu, Au \rangle|^2 = |\langle Au, Bu \rangle - \overline{\langle Au, Bu \rangle}|^2 = |2 \text{Im} \langle Au, Bu \rangle|^2 \\ &\leq 4 |\langle Au, Bu \rangle|^2 \leq 4 \|Au\|^2 \|Bu\|^2 = 4 V_u(S) V_u(T). \end{aligned}$$

□

10.7. Spezialfall der kompakten symmetrischen Operatoren: Wir nennen einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *kompakt*, falls er die Eigenschaft hat, dass zu jeder beschränkten Folge von Vektoren $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass die Bildfolge $(Tu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Wie sich herausstellt, ist dies äquivalent² zu folgender Bedingung: Es gibt eine Folge $(T_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von Operatoren T_l mit $\dim(\text{ran } T_l) < \infty$ (also mit endlichdimensionalen Bildraum) für alle $l \in \mathbb{N}$, sodass $T = \lim_{l \rightarrow \infty} T_l$ bzgl. der Operatornorm gilt.

Spektralsatz: Ist T kompakt und symmetrisch mit unendlichdimensionalem Bild $\text{ran } T$, dann gibt es ein Orthonormalsystem $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bestehend aus Eigenvektoren v_k zu T mit Eigenwerten $\lambda_k \in \mathbb{R}$, geordnet in der Form $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ und mit $\lambda_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), sodass für alle $u \in \mathcal{H}$ gilt:

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle v_k, u \rangle v_k.$$

²Achtung: Das ist wirklich nur auf Hilberträumen äquivalent, nicht mehr auf allgemeineren Banachräumen.

Weiters ist jedenfalls $0 \in \sigma(T)$ (muss aber nicht Eigenwert sein) und $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Also ist in dem Fall jeder Spektralwert $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\lambda \neq 0$ sicherlich ein Eigenwert. Mit den eindimensionalen Projektoren $P_k := |v_k\rangle\langle v_k|$ können wir obige Gleichung auch in dieser Form anschreiben:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |v_k\rangle\langle v_k|.$$

Bemerkungen: (i) Weil sich die Resolventen von $-\Delta$ auf beschränkten Gebieten Ω als kompakte Operatoren erweisen, findet obiger Spektralsatz oft Anwendungen auf solche Problemstellungen (vgl. auch 6.5).

(ii) Die (Absolutbeträge der) Eigenwerte können vielfach konkret mittels *Rayleigh-(Ritz)-Prinzip* aufgespürt werden, das auf folgende Optimierungsaufgaben hinausläuft:

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \max\{|\langle u, Tu \rangle| \mid \|u\| = 1\} = |\langle v_1, Tv_1 \rangle|, \\ |\lambda_{n+1}| &= \max\{|\langle u, Tu \rangle| \mid \|u\| = 1, u \perp v_1, v_2, \dots, v_n\} = |\langle v_{n+1}, Tv_{n+1} \rangle| \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

10.8. Dichteoperatoren: Wir sagen, ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gehöre zur *Spurklasse*, falls es ein vONS (φ_k) in \mathcal{H} gibt, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\langle \varphi_k, |T| \varphi_k \rangle}_{\geq 0} < \infty$$

gilt. In diesem Fall heißt

$$\operatorname{tr}(T) := \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, T \varphi_k \rangle \in \mathbb{C}$$

die *Spur* von T und dieser ist Wert unabhängig von der Wahl des vONS.

Spurklasse-Operatoren T sind übrigens automatisch kompakt und für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind sogar sowohl AT als auch TA ebenfalls in der Spurklasse und es gilt

$$\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(TA).$$

Beispiel: Wenn $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ positiv und kompakt ist, können wir den Spektralsatz 10.7 anwenden und wissen zusätzlich $\lambda_k \geq 0$ für alle Eigenwerte. Das ONS (v_k) aus Eigenvektoren ist ein vONS für $\overline{\operatorname{ran} T}$ und wir können es allenfalls durch ein vONS von $\ker T = (\operatorname{ran} T)^\perp$ zu einem vONS von \mathcal{H} ergänzen. Dann zeigt sich: T Spurklasse $\iff \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$.

In diesem Fall gilt nun

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$$

in Analogie zum Endlichdimensionalen.

Ein *Dichteoperator* ist ein positiver Spurklasse-Operator W mit $\operatorname{tr}(W) = 1$. Ist seine Spektralzerlegung

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |v_k\rangle\langle v_k|$$

mit den Eigenwerten $p_k \geq p_{k+1} \geq \dots \geq 0$, dann gilt wegen $\text{tr}(W) = 1$ auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

ganz wie bei einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Im Spezialfall $p_1 = 1, p_k = 0$ für $k \geq 2$ ist $W = |v_1\rangle\langle v_1|$ gerade die Projektion auf den Zustandsvektor v_1 und daher für jedes symmetrische $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dann

$$\text{tr}(AW) = \text{tr}(|Av_1\rangle\langle v_1|) = \langle v_1, Av_1 \rangle = E_{v_1}(A).$$

Ein beliebiger Dichteoperator W heißt daher *allgemeiner oder gemischter Zustand* und für symmetrisches $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nennen wir die Größe

$$E_W(A) := \text{tr}(AW)$$

einen *allgemeinen Erwartungswert*.

Bemerkung: Für eine Anwendung des Funktionalkalküls können wir die stetige Funktion $h: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) := x \log(x)$ für $x > 0$ und $h(0) := 0$ betrachten. Dann ist für einen Dichteoperator wegen $\sigma(W) \subseteq [0, \infty[$ auch der Operator $W \log W := h(W)$ definiert und mittels Spektralzerlegung einfach durch

$$W \log(W) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log(p_k) |v_k\rangle\langle v_k|$$

gegeben. Die Größe

$$S(W) := -\text{tr}(W \log W) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k \in [0, \infty]$$

heißt *von Neumann-Entropie* des gemischten Zustandes W . Wegen der Monotonie $p_k \geq p_{k+1}$ ist leicht zu sehen, dass

$$S(W) = 0 \iff p_1 = 1, p_k = 0 \ (k \geq 2)$$

gilt. Somit ist in diesem Fall also $W = |v_1\rangle\langle v_1|$ gerade der Projektor auf v_1 , entspricht also einem Vektorzustand und ist kein echtes Gemisch. (Mehr dazu z.B. in [Th4, Abschnitt 2.2].)

11. Unbeschränkte Operatoren

11.1. Ein konkretes Beispiel für die Unbeschränktheit: Wir betrachten

$$A: C^1([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), \quad Au := u',$$

also eine lineare Abbildung, die auf dem *dichten* Teilraum $C^1([0, 1]) \subseteq L^2([0, 1])$ definiert ist, und behaupten, dass A *unbeschränkt* (daher auch *unstetig*) ist: Angenommen, es gäbe eine Konstante $C \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\|Au\| \leq C\|u\| \quad \text{für alle } u \in C^1([0, 1]);$$

dann studieren wir die Folge von Funktionen $u_n \in C^1([0, 1])$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $u_n(x) := e^{inx}$ für $x \in [0, 1]$; es ist

$$\|u_n\|^2 = \int_0^1 \underbrace{|e^{inx}|^2}_1 dx = 1,$$

während sich

$$\|Au_n\|^2 = \|u_n'\|^2 = \int_0^1 |ine^{inx}|^2 dx = n^2 \int_0^1 dx = n^2$$

ergibt; dies führt nun auf den Widerspruch

$$n = \|Au_n\| \leq C\|u_n\| = C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Im Falle von Beschränktheit, somit Stetigkeit, könnten wir A eindeutig und stetig auf ganz $L^2([0, 1])$ fortsetzen. Wir müssten uns also gar nicht mit Definitionsbereichen von linearen Operatoren befassen, die nicht der ganze Hilbertraum sind, falls alle relevanten Operatoren beschränkt wären.

11.2. Erste Begriffe und Eigenschaften: Ein *linearer Operator* „auf“ dem Hilbertraum \mathcal{H} ist eine lineare Abbildung $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$, definiert auf einem dichten Teilraum $D(A) \subseteq \mathcal{H}$.

Sind A_1 und A_2 lineare Operatoren auf \mathcal{H} , dann schreiben wir

$$A_1 \subseteq A_2,$$

falls $D(A_1) \subseteq D(A_2)$ und $A_1u = A_2u$ gilt für alle $u \in D(A_1)$. Speziell soll die Operatorgleichung $A_1 = A_2$ nun $A_1 \subseteq A_2$ und $A_2 \subseteq A_1$ bedeuten, also

$$A_1 = A_2 \iff D(A_1) = D(A_2) \text{ und } A_1u = A_2u \text{ für alle } u \in D(A_1).$$

Der Graph eines Operators A ist die Menge

$$\mathcal{G}(A) := \{(u, Au) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid u \in D(A)\} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

und es gilt für (lineare) Operatoren A und B auf \mathcal{H} natürlich

$$A = B \iff \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B),$$

d.h. der Graph charakterisiert einen Operator.

In obigem Beispiel 11.1 ist $D(A) = C^1([0, 1])$ und

$$\mathcal{G}(A) = \{(u, u') \mid u \in C^1([0, 1])\} \subseteq L^2([0, 1]) \times L^2([0, 1]).$$

Ein linearer Operator $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ heißt *abgeschlossen* oder *graphenabgeschlossen*, falls gilt: Für jede Folge (u_n) in $D(A)$ mit $u_n \rightarrow u$ und $Au_n \rightarrow v$ in \mathcal{H} muss $u \in D(A)$ und $Au = v$ gelten. Dies bedeutet eben genau, dass der Graph $\mathcal{G}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist. Es ist unmittelbar klar, dass ein beschränkter (also stetiger) Operator $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ immer abgeschlossen ist (wegen $D(A) = \mathcal{H}$ und $Au_n \rightarrow Au$).

Ein Operator heißt *abschließbar*, falls es einen abgeschlossenen Operator \bar{A} gibt mit $A \subseteq \bar{A}$. Symmetrische Operatoren sind stets abschließbar, wobei ein linearer Operator $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ *symmetrisch* heißt, falls gilt

$$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle \quad \text{für alle } u, v \in D(A).$$

Nach dem *Satz von Hellinger-Toeplitz* ist ein symmetrischer Operator A mit $D(A) = \mathcal{H}$ automatisch stetig, also beschränkt.

Beispiele: 1) In $L^2([0, 1])$ betrachten wir $Au := -iu'$ für

$$u \in D(A) := C_0^1([0, 1]) := \{u \in C^1([0, 1]) \mid u(0) = 0 = u(1)\}.$$

Dieser Operator ist symmetrisch, denn für $u, v \in C_0^1([0, 1])$ berechnen wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \langle u, Av \rangle &= \int_0^1 \overline{u(x)}(-iv'(x)) dx = -i \int_0^1 \overline{u(x)}v'(x) dx \\ &= -i\overline{u(x)v(x)}\Big|_0^1 + i \int_0^1 \overline{u'(x)}v(x) dx = 0 + \int_0^1 \overline{-iu'(x)}v(x) dx = \langle Au, v \rangle. \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Operator A ist zwar selbst nicht abgeschlossen, aber abschließbar mit $D(\bar{A}) = \{u \in L^2([0, 1]) \mid (\text{distr.}) u' \in L^2([0, 1]), u(0) = 0 = u(1)\} = W_0^1([0, 1])$.

2) Der Impulsoperator $Pu = -iu'$ auf $L^2(\mathbb{R})$ (bei $\hbar = 1$) mit dem Bereich

$$D(P) := W^1(\mathbb{R}) := \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid (\text{distr.}) u' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

ist abgeschlossen und symmetrisch. Es lässt sich zeigen, dass für $u \in W^1(\mathbb{R})$ stets $u(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$), weshalb der Nachweis der Symmetrie analog zu 1) verläuft. Für die Abgeschlossenheit nehmen wir an, dass $u_n \in W^1(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}$) die Konvergenzeigenschaften $u_n \rightarrow u$ und

$Pu_n = -iu'_n \rightarrow v$ in $L^2(\mathbb{R})$ hat. Dann gelten beide auch im Sinne der Distributionen, weshalb sich die Gleichung

$$v = -iu'$$

zunächst in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ergibt. Wegen $v \in L^2(\mathbb{R})$ ist dann aber auch $u' \in L^2(\mathbb{R})$, also $u \in W^1(\mathbb{R})$.

11.3. Adjungierter Operator: Den zu einem linearen Operator $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ adjungierten Operator A^* wollen wir natürlich wieder durch die Bedingung $\langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle$ festnageln. Dabei können wir sicher $u \in D(A)$ einsetzen, aber wir müssen vorab noch abklären, welche $v \in \mathcal{H}$ als Definitionsbereich für A^* in Frage kommen. Daher definieren wir

$$D(A^*) := \{v \in \mathcal{H} \mid \text{es gibt ein } w \in \mathcal{H}, \text{ sodass } \langle v, Au \rangle = \langle w, u \rangle \text{ für alle } u \in D(A) \text{ gilt}\}$$

und bemerken, dass zu jedem $v \in D(A^*)$ der zugehörige Vektor w eindeutig ist: Falls nämlich $\langle w_1, u \rangle = \langle v, Au \rangle = \langle w_2, u \rangle$ für alle $u \in D(A)$ gilt, dann ist also $\langle w_1 - w_2, u \rangle = 0$ für alle u aus einem dichten Teilraum und wegen (9.3) somit $w_1 - w_2 = 0$, also $w_1 = w_2$.

Nun setzen wir $A^*v := w$ und erhalten in der Tat die Gleichung

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle \quad \text{für alle } u \in D(A), v \in D(A^*).$$

Es lässt sich zeigen, dass für abschließbares A der Bereich $D(A^*)$ stets dicht in \mathcal{H} ist und dann A^* selbst abgeschlossen ist. Für $B \subseteq A$ gilt $A^* \subseteq B^*$ und direkt aus der Definition folgt:

$$A \text{ symmetrisch} \iff A \subseteq A^*.$$

Definition: Ein Operator $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $A^* = A$ gilt; d.h. es gilt in diesem Fall $D(A^*) = D(A)$ und $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ für alle $u, v \in D(A) = D(A^*)$.

Ein beschränkter symmetrischer Operator ist selbstadjungiert im Sinne dieser Definition.

11.4. Spektrum: Für einen Operator $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ definieren wir wieder zunächst die *Resolventenmenge* durch

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda: D(A) \rightarrow \mathcal{H} \text{ hat eine stetige Inverse}\}$$

und nennen $R(\lambda, A) := (A - \lambda)^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow D(A) \subseteq \mathcal{H}$ für $\lambda \in \rho(A)$ die *Resolvente*.

Das *Spektrum* von A ist nun wieder als Komplement $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ gegeben.

Bemerkungen: (i) Wenn A nicht abgeschlossen ist, folgt zwingend $\rho(A) = \emptyset$, also $\sigma(A) = \mathbb{C}$ und hat wenig Informationsgehalt. (Das Argument dafür basiert auf der Graphenabgeschlossenheit einer stetigen Inversen, die wiederum Abgeschlossenheit des ursprünglichen Operators impliziert.)

(ii) Im Allgemeinen ist nun $\sigma(A)$ nicht mehr beschränkt und es kann auch $\sigma(A) = \emptyset$ passieren.

Beispiel (Multiplikationsoperatoren): Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, insbesondere offene oder abgeschlossene Teilmengen Ω und stetige Funktionen f kommen in Frage. Wir betrachten den Operator M_f auf $L^2(\Omega)$ mit dem maximalen Bereich

$$D(M_f) := \{u \in L^2(\Omega) \mid fu \in L^2(\Omega)\}$$

und der Wirkung

$$(M_f u)(x) := f(x)u(x) \quad (u \in L^2(\Omega), x \in \Omega).$$

Es lässt sich zeigen, dass M_f abgeschlossen ist und: M_f selbstadjungiert $\iff f$ reellwertig.

Weiters gilt im Falle einer *stetigen* Funktion f nun

$$\sigma(M_f) = \overline{f(\Omega)} = \overline{\{f(x) \mid x \in \Omega\}} \quad (\text{Abschluss der Teilmenge } f(\Omega) \text{ in } \mathbb{C}).$$

Als Spezialfall betrachten wir zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$, dann entsteht so gerade der Ortsoperator Q mit $(Qu)(x) = xu(x)$ und $D(Q) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid x \mapsto xu(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$. Mit diesem Bereich ist Q selbstadjungiert und es gilt

$$\sigma(Q) = \mathbb{R}.$$

Ist $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unitär mit der Eigenschaft $U(D(A)) = D(B)$ und $UA = BU$ für die Operatoren A, B auf \mathcal{H} , dann folgt ganz einfach $\sigma(A) = \sigma(B)$ (denn $B - \lambda = U(A - \lambda)U^*$). Also lässt sich mit obigem Beispiel das Spektrum eines Operators gut bestimmen, falls wir ihn „diagonalisieren“ können, also als unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator darstellen können.

Zwei Anwendungen: 1) Für den Impulsoperator aus Beispiel 2) in 11.2 gilt ja mittels der (unitären) Fouriertransformation $\mathcal{F}P = Q\mathcal{F}$ und es ist auch leicht zu sehen, dass $\mathcal{F}W^1(\mathbb{R}) = D(Q)$ gilt. Daher ist

$$\sigma(P) = \sigma(Q) = \mathbb{R}.$$

2) Wir betrachten $A = -\Delta$ auf \mathbb{R}^n bzw. im $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit dem Bereich

$$D(A) := W^2(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2 \mid 1 \leq j, k \leq n: \partial_k u \in L^2 \text{ und } \partial_j \partial_k u \in L^2\}.$$

Vermöge der (unitären) Fouriertransformation \mathcal{F} erhalten wir

$$(\mathcal{F}Au)(y) = \|y\|^2 \hat{u}(y) =: (B\hat{u})(y),$$

wobei B also der Multiplikationsoperator zur Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ mit $f(y) = \|y\|^2$ ist. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D(A)) &= \mathcal{F}(W^2(\mathbb{R}^n)) \\ &= \{\hat{u} \in L^2 \mid 1 \leq j, k \leq n: y \mapsto y_k \hat{u}(y) \in L^2 \text{ und } y \mapsto y_j y_k \hat{u}(y) \in L^2\} \\ &= \{v \in L^2 \mid y \mapsto \|y\|^2 v(y) \in L^2\} = D(B) \end{aligned}$$

gilt. Daher folgt

$$\sigma(-\Delta) = \sigma(A) = \sigma(B) = \{\|y\|^2 \mid y \in \mathbb{R}^n\} = [0, \infty[.$$

Abschließend berichten wir noch von einer theoretisch wichtigen Charakterisierung für unbeschränkte Observablen der Quantenmechanik als selbstadjungierte Operatoren.

Satz: Für einen abgeschlossenen symmetrischen Operator haben wir folgende Äquivalenz:

$$A \text{ selbstadjungiert} \iff \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}.$$

Als unmittelbare Anwendung schließen wir also aus dem obigen Beispiel 2), dass $-\Delta$ auf dem Bereich $W^2(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert ist. Weiters wissen wir bereits um die Selbstadjungiertheit des Ortsoperators Q auf $D(Q)$ und erhalten nun auch die Selbstadjungiertheit des Impulsoperators P auf dem Bereich $W^1(\mathbb{R})$.

11.5. Bemerkungen und Beispiele zu selbstadjungierten Operatoren:

(A) Nachdem wir schon die zentrale Rolle selbstadjungierter Operatoren zumindest andeuten haben können, stellt sich die Frage nach praktisch brauchbaren Kriterien dafür.

Meistens ist zwar die Symmetrie eines Operators A recht direkt nachprüfbar, doch wird ein anfangs gewählter Bereich $D(A)$ oftmals z.B. zu klein sein, um auch $D(A^*) = D(A)$ zu liefern. In solchen Fällen werden Erweiterungen $A \subseteq B$ mit $B^* = B$ gesucht und es stellt sich wiederum die Frage, ob es solche gibt, und, wenn ja, wieviele.

Wir kratzen nichtmal richtig an der Oberfläche dieser Fragen, erwähnen aber exemplarisch folgende zwei Bedingungen, die für einen *dicht definierten symmetrischen* Operator A äquivalent zur Selbstadjungiertheit sind:

- (i) Beide Abbildungen $A + i$ und $A - i$ sind surjektiv $D(A) \rightarrow \mathcal{H}$,
- (ii) A ist abgeschlossen und es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\ker(A^* - \lambda) = \{0\} = \ker(A - \bar{\lambda})$.

Außerdem gibt es einen „Zwischenbegriff“, der z.B. sogar garantiert, dass A eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung besitzt: Ein symmetrischer Operator A heißt *wesentlich selbstadjungiert*, falls sein Abschluss \bar{A} selbstadjungiert ist. Dies ist übrigens äquivalent zur Bedingung, dass sowohl $A + i$ als auch $A - i$ dichtes Bild in \mathcal{H} haben.

Beispiele (A): 1) In l^2 ist für jede reelle Folge (a_k) der Operator $A(x_1, x_2, x_3, \dots) := (a_1x_1, a_2, x_2, a_3x_3, \dots)$ auf dem maximalen Bereich

$$D(A) := \{x \in l^2 \mid (a_1x_1, a_2, x_2, a_3x_3, \dots) \in l^2\}$$

selbstadjungiert, wie sich relativ mühelos aus obigen Kriterien ergibt.

2) Durch $Hu := -u''/2$ wird ein Operator in $L^2(]0, 1[)$ auf dem Bereich $D(H) := W_0^2(]0, 1[) := \{u \in W^2(]0, 1[) \mid u(0) = 0 = u(1)\}$ definiert, der selbstadjungiert ist, wie sich z.B. durch Analyse der inhomogenen Differentialgleichungen $Hu \pm iu = v \in L^2(]0, 1[)$ ergibt.

Bei Skalierung mit $\hbar/m = 1$ entspricht dies dem Modell für die kinetische Energie eines in $]0, 1[$ eingesperrten Teilchens.

(B) Der Operator H im obigen Beispiel 2) entsteht durch Erweiterung des wesentlich selbstadjungierten Operators $H_0u := -u''/2$ mit Bereich $D(H_0) := C_0^2([0, 1]) = \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(0) = 0 = u(1)\}$. Er besitzt das Spektrum

$$\sigma(H) = \sigma_p(H) = \left\{ \frac{\pi^2 k^2}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

mit dem vONS aus Eigenfunktionen $v_k(x) = \sqrt{2} \sin(\pi kx)$.

Dahinter steckt folgender abstrakter *Satz über symmetrische Operatoren H mit diskretem Spektrum*: Wenn es ein vONS (v_k) aus Eigenvektoren für H gibt mit zugehörigen reellen

Eigenwerten $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$, sodass $\lambda_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), dann ist H wesentlich selbstadjungiert, $H - \lambda_1$ positiv und für die (eindeutige) selbstadjungierte Erweiterung von H durch den Abschluss \bar{H} gilt: $D(\bar{H}) = \{u \in \mathcal{H} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\langle v_k, u \rangle|^2\}$ und

$$\bar{H}u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle v_k, u \rangle v_k \quad (u \in D(\bar{H})), \quad \sigma(\bar{H}) = \sigma_p(\bar{H}) = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

In dieser Situation können wir für beliebiges $u_0 \in \mathcal{H}$ den Ansatz

$$u(t) := U(t)u_0 := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-it\lambda_k} \langle v_k, u_0 \rangle v_k \quad (t \in \mathbb{R})$$

machen. Wir erhalten wegen $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, u_0 \rangle v_k$ direkt $U(0) = I$ und weiters $U(t+s) = U(t)U(s)$ sowie $U(-t)U(t) = I = U(t)U(-t)$, also ist $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe auf \mathcal{H} .

Wenn $u_0 \in D(\bar{H})$ ist, dann ergibt sich neben $u(0) = u_0$ wegen $\langle v_l, u(t) \rangle = e^{-it\lambda_l} \langle v_l, u_0 \rangle$ zunächst $u(t) \in D(\bar{H})$ sowie

$$Hu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle v_k, u(t) \rangle v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-it\lambda_k} \langle v_k, u_0 \rangle v_k$$

und somit auch noch

$$\frac{d}{dt}u(t) = -i \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-it\lambda_k} \langle v_k, u_0 \rangle v_k = -iHu(t).$$

Also erhalten wir mittels $u(t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung (bei Skalierung mit $\hbar = 1$):

$$i\partial_t u(t) = Hu(t), \quad u(0) = u_0,$$

und wir schreiben $e^{-iHt}u_0 := u(t)$, was auch mit dem Funktionalkalkül für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren konsistent ist.

Ein weiteres Beispiel für H mit solch diskretem Spektrum ist der *quantenmechanische harmonische Oszillator* (mit Masse $m = 1$ und $\hbar = 1$)

$$H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2, \quad \text{d.h. } Hu(x) = -\frac{u''(x)}{2} + \frac{x^2}{2}u(x)$$

mit dem Bereich $D(H) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im $L^2(\mathbb{R})$. In diesem Fall besteht das vONS aus Eigenvektoren aus den Hermite-Funktionen und die Eigenwerte sind $\lambda_k = k + \frac{1}{2}$.

(C) Potentiale als Störungen: Der Operator für die Energie des Elektrons (ohne Spin) im Wasserstoffatom ist

$$Hu(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x) - \frac{e^2}{\|x\|}u(x), \quad u \in D(H) := \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \text{ (Testfunktionen).}$$

Dies ist von der Form

$$H = A + B$$

mit $A := -\hbar^2 \Delta / (2m)$ und $Bu := M_v u = vu$, $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $v(0) := 0$, $v(x) := e^2 / \|x\|$ sonst. Wir wissen, dass A selbstadjungiert auf dem Bereich $W^2(\mathbb{R}^3)$ ist und betrachten B als *Störung*. Dies ist Teil einer allgemeineren Strategie, selbstadjungierte Erweiterungen für Operatoren $H = A + B$ zu finden, wobei A gut bekannt und selbstadjungiert ist und B in Relation zu A „unter Kontrolle“ bleibt, z.B. *relativ beschränkt* ist in der Form $\|Bu\| \leq a\|Au\| + b\|u\|$ mit $0 \leq a < 1$ und $b \geq 0$.

In der obigen Situation mit dem Coulomb-Potential als Störung kann der folgende *Satz von Kato* verwendet werden: Ist $H = -\Delta + M_v$ mit Bereich $D(H) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und die messbare Funktion $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $v_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, dann ist H wesentlich selbstadjungiert.

In der Tat können wir $v(x) = 1/\|x\|$ mittels der Funktion χ mit $\chi(x) := 1$ ($\|x\| \leq 1$), $\chi(x) := 0$ ($\|x\| > 1$) aufspalten in

$$v(x) = \underbrace{\frac{\chi(x)}{\|x\|}}_{v_1(x)} + \underbrace{\frac{1 - \chi(x)}{\|x\|}}_{v_2(x)} \quad \text{mit } v_1 \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ und } v_2 \text{ beschränkt.}$$

11.6. Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren: Hier sei nun $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator. Ganz ähnlich wie bereits für beschränkte symmetrische Operatoren zunächst haben wir ein *Diagonalisierungsergebnis*: Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf \mathbb{R} , eine messbare Funktion $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung $U: \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$ mit der Eigenschaft

$$A = U M_v U^{-1}.$$

Insbesondere erhalten wir $\sigma(A) = \sigma(M_v) \neq \emptyset$ und, dass $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ genau dann unbeschränkt ist, wenn (v und somit) A unbeschränkt ist.

Aus der Diagonalisierung lässt sich direkt ein *Funktionalkalkül* aufbauen: Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann definieren wir einfach

$$f(A) := U^{-1} M_{f \circ v} U, \text{ d.h. } (U f(A) U^{-1} \varphi)(x) = f(v(x)) \varphi(x) \quad (\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \mu)).$$

Ist speziell f stetig und beschränkt, dann folgt $f(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Schließlich erhält der *Spektralsatz* nun folgende Gestalt: Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $u \in \mathcal{H}$ ein Zustand, dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_u auf \mathbb{R} mit folgenden Eigenschaften:

(i) $u \in D(f(A)) \iff \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_u < \infty$,

(ii) in diesem Fall gilt $E_u(f(A)) = \langle u, f(A)u \rangle = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_u$.

11.7. Heisenbergsche Unschärferelation: (A) Sind A und B selbstadjungierte Operatoren auf \mathcal{H} und $u \in D(A) \cap D(B)$ mit $\|u\| = 1$, also insbesondere u ein Vektorzustand, dann können wir die Erwartungswerte $E_u(A) := \langle u, Au \rangle$, $E_u(B) := \langle u, Bu \rangle$ und die Varianzen $V_u(A) := \|(A - E_u(A))u\|^2$, $V_u(B) := \|(B - E_u(B))u\|^2$ definieren und erhalten mit einer analogen Rechnung wie in 10.6 die Ungleichung

$$V_u(A) \cdot V_u(B) \geq \frac{1}{4} |\langle Au, Bu \rangle - \langle Bu, Au \rangle|^2.$$

Für Vektoren $v \in D := \{w \in D(A) \cap D(B) \mid Aw \in D(B), Bw \in D(A)\}$ ist auch der Kommutator $[A, B]v = ABv - BAv$ definiert. Falls also auch $u \in D$ gilt, kann obige Ungleichung wieder in der eleganteren Form

$$V_u(A) \cdot V_u(B) \geq \frac{1}{4} |\langle u, [A, B]u \rangle|^2$$

geschrieben werden und eröffnet wegen des Kontextes der unbeschränkten Operatoren nun neue Möglichkeiten. Erfüllen nämlich A und B die *kanonische Vertauschungsrelation*

$$[A, B]v = -i\hbar v \quad (v \in D),$$

dann folgt aus obiger Ungleichung noch konkreter die *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$\boxed{V_u(A) \cdot V_u(B) \geq \frac{\hbar^2}{4}}.$$

Die kanonische Vertauschungsrelation wird z.B. vom Operatorpaar P und Q erfüllt (vgl. auch PUE). Es kann übrigens gezeigt werden, dass so eine Relation grundsätzlich gar nicht mit beschränkten Operatoren implementiert werden kann.

(B) Für allgemeinere Zustände, die durch positive Dichteoperatoren W mit Spektralzerlegung $W = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |v_k\rangle\langle v_k|$ und $\text{tr}(W) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ beschrieben werden, nennen wir zunächst W *zulässig* für die Observable A , falls $v_k \in D(A)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

In diesem Fall ist der Erwartungswert

$$E_W(A) := \text{tr}(AW) := \sum_{k=1}^{\infty} p_k \langle v_k, Av_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} p_k E_{v_k}(A)$$

sowie die Varianz

$$V_W(A) := E_W((A - E_W(A))^2) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \langle v_k, (A - E_W(A))^2 v_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \|(A - E_W(A))v_k\|^2$$

definiert. Falls W auch zulässig für die Observable B ist und darüberhinaus $Av_k \in D(B)$ und $Bv_k \in D(A)$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt auch eine analoge Unschärferelation

$$V_W(A) \cdot V_W(B) \geq \frac{1}{4} |E_W([A, B])|^2.$$

(Für einen Beweis siehe etwa [Lu1, (8.3.17) in Chapter IV].)

Insbesondere für Observable, die der kanonischen Vertauschungsrelation $[A, B]v_k = -i\hbar v_k$ ($k \in \mathbb{N}$) genügen, folgt somit die Heisenbergsche Unschärferelation

$$V_W(A) \cdot V_W(B) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

auch für gemischte Zustände.

11.8. Zeitentwicklung und unitäre Gruppen: Wir hatten in 10.3, Beispiel 2), bereits den Funktionalkalkül für die Funktionenschar $f_t(x) := e^{-itx}$ eingesetzt, um aus einem beschränkten symmetrischen Operator eine unitäre Gruppe $U(t)$ von Operatoren zu erzeugen. Das funktioniert nun analog für einen selbstadjungierten Operator $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$, indem wir

$$U(t) := e^{-itA} := f_t(A) \quad (t \in \mathbb{R})$$

setzen. Wir erhalten auf diese Art eine *stark-stetige unitäre Gruppe* $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ auf \mathcal{H} , d.h. für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $U(t)$ unitär mit $U(t)^* = U(t)^{-1} = U(-t)$, $U(0) = I$ sowie

$$U(s+t) = U(s)U(t) \quad (s, t \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad U(t)v = \lim_{h \rightarrow 0} U(t+h)v \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H}.$$

Für Anfangswerte $u_0 \in D(A)$, daher $U(0)u_0 = u_0$ lässt sich dann zeigen, dass wir durch

$$u(t) := U(t)u_0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

eine Lösung des Cauchy-Problems

$$u'(t) = -iAu(t), \quad u(0) = u_0,$$

erhalten. Hier ist $u'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} (u(t+h) - u(t))/h$ in \mathcal{H} definiert.

Beispiele: 1) Ist $A = H$ der Energie- oder Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Modells, $U(t) = e^{-itH}$ und $u(t) := U(t)u_0$ mit $u_0 \in D(H)$, dann entspricht

$$i\partial_t u(t) = iu'(t) = Hu(t)$$

gerade der Schrödinger-Gleichung und die unitäre Gruppe $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ beschreibt also die Dynamik bzw. Zeitentwicklung in diesem Modell.

2) Für $A = Q$ in $L^2(\mathbb{R})$, $U(t) = e^{-itQ}$ erhalten wir einfach $(U(t)\varphi)(x) = e^{-itx}\varphi(x)$ für jedes $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, weil ja Q bereits als Multiplikationsoperator mit $v(x) = x$ gegeben ist.

3) Für $A = P$ in $L^2(\mathbb{R})$, $V(t) = e^{-itP}$ erhalten wir aus 2) mittels Fouriertransformation einfach $(V(t)\psi)(x) = \psi(x-t)$ für jedes $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Selbstadjungierte Operatoren erzeugen also unitäre Gruppen. Aber auch umgekehrt legen gegebene unitäre Gruppen fest gewisse selbstadjungierte Operatoren fest, wie wir im folgenden Resultat sehen.

Satz von Stone: Wenn $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine stark-stetige unitäre Gruppe auf \mathcal{H} ist, dann gibt es genau einen selbstadjungierten Operator A , sodass

$$U(t) = e^{-iAt}$$

gilt. In diesem Fall ist

$$D(A) = \{v \in \mathcal{H} \mid \text{es existiert } Av := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i}{t}(U(t)v - v)\}.$$

Der eindeutige selbstadjungierte Operator A heißt der *Erzeuger* von $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

In der Quantenmechanik ist also der Energie- oder Hamilton-Operator gerade der Erzeuger der Zeitentwicklung.

11.9. Zum Schluss ein kleiner Ausblick: (Literatur hierfür z.B. [Tri, Kapitel VII].)

Wie bereits unter (C) in 11.5 erwähnt wird das Modell eines Elektrons (ohne Spin) im Wasserstoffatom vom Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{\|x\|}$$

mit dem Bereich $D(H) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ geprägt und die selbstadjungierte Erweiterung (gleich dem Operator-Abschluss) \overline{H} hat den Bereich $D(\overline{H}) = W^2(\mathbb{R}^3)$. Die Analyse des Spektrums ergibt in diesem Fall die Anteile

$$\sigma_c(\overline{H}) = [0, \infty[$$

entsprechend den Energien des freien Elektrons und

$$\sigma_p(\overline{H}) = \{\lambda_k := -\frac{me^4}{2\hbar k^2} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

als Energieniveaus der gebundenen Zustände. Der Eigenraum zum Eigenwert λ_k hat Dimension k^2 und die Eigenfunktionen lassen sich mittels sogenannter Laguerre-Funktionen und Kugelfunktionen beschreiben.

Gehen wir weiter zur (nichrelativistischen) Behandlung des Elektrons mit Spin: Der bisherige Hilbertraum \mathcal{H} wird dabei ersetzt durch

$$\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$

wobei der \mathbb{C}^2 -Anteil für die Spin-Komponenten zuständig ist. Zum Beispiel realisieren wir dann $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ in der Form

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2 \cong \{(u_\uparrow, u_\downarrow) \mid u_\uparrow, u_\downarrow \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

einfach als Paare von L^2 -Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_\uparrow \\ u_\downarrow \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_\uparrow \\ v_\downarrow \end{pmatrix} \right\rangle = \langle u_\uparrow, v_\uparrow \rangle_{L^2} + \langle u_\downarrow, v_\downarrow \rangle_{L^2}.$$

Die Wirkung des Laplace-Operators wird als

$$-\Delta \begin{pmatrix} u_\uparrow \\ u_\downarrow \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\Delta u_\uparrow \\ -\Delta u_\downarrow \end{pmatrix}$$

definiert und ähnlich „verdoppelt“ auch für den Multiplikationsoperator mit dem Coulomb-Potential. Die entsprechende Gleichung der Dynamik wird z.B. *Schrödinger-Pauli-Gleichung* genannt.

Haben wir es mit N Teilchen mit Spin zu tun, also $u_1 = \begin{pmatrix} u_{1\uparrow} \\ u_{1\downarrow} \end{pmatrix}, \dots, u_N = \begin{pmatrix} u_{N\uparrow} \\ u_{N\downarrow} \end{pmatrix}$, dann verwenden wir die Isomorphie

$$L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes (\mathbb{C}^2)^N \cong L^2(\mathbb{R}^{3N}, \mathbb{C}^{2^N}),$$

wobei wir zusätzlich das *Pauli-Prinzip* durch Antisymmetrie der beteiligten Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_{2N} \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ bzgl. der Argumente $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \in (\mathbb{R}^3)^N \cong \mathbb{R}^{3N}$ einbauen müssen, wobei $\vec{x}_j \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten des j -ten Teilchen repräsentiert: Es soll für $j \neq k$ stets $f_l(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_N) = -f_l(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_N)$ gelten.

Ein relativistisches Modell für das Elektron inklusive Spin im Wasserstoffatom verwendet den Hilbertraum

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^4 \cong L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) = L^2(\mathbb{R}^3)^4,$$

wobei der \mathbb{C}^4 -Faktor für die Dirac-Spinoren vorgesehen ist. Die entsprechende Dirac-Version des Hamilton-Operators H ist auf dem Bereich $D(H) := \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^4$ definiert durch

$$Hu = -i\hbar \sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot \partial_k u + mc^2 \alpha_4 \cdot u - \frac{e^2}{\|x\|} u$$

und wesentlich selbstadjungiert. Hier ist jedes α_k eine (4×4) -Matrix, und zwar als (2×2) -Blockmatrizen geschrieben die *Dirac-Matrizen*

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die *Pauli-Matrizen* sind.

Die eindeutige selbstadjungierte Erweiterung \bar{H} von H hat den Bereich $D(\bar{H}) = W^1(\mathbb{R}^3)^4$ und für die spektralen Anteile erhalten wir

$$\sigma_c(\bar{H}) =] -\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty[$$

sowie unendlich viele Eigenwerte in

$$\sigma_p(\bar{H}) \subseteq] -mc^2, mc^2[,$$

die auch die sogenannte Feinstruktur des Wasserstoffspektrums erklären können, wobei die Korrekturen sich systematisch in Termen der *Feinstrukturkonstanten*

$$\frac{e^2}{\hbar c}$$

beschreiben lassen.

Direkte Rechnung liefert bei Anwendung von H auf Hu für jedes $u = (u_j)_{1 \leq j \leq 4} \in D(\bar{H})$ die Relation

$$H^2 u = (m^2 c^4 u_j - c^2 \hbar^2 \Delta u_j)_{1 \leq j \leq 4} := (m^2 c^4 - c^2 \hbar^2 \Delta) u.$$

Mit $\psi(x, t) := (U(t)u)(x)$ lautet die dynamische Gleichung wie üblich

$$i\hbar \partial_t \psi = H \psi$$

und ergibt nun mit obiger Relation zunächst

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (i\hbar \partial_t)^2 \psi = H^2 \psi = (m^2 c^4 - c^2 \hbar^2 \Delta) \psi,$$

was uns schließlich zur *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\hbar^2 \square \psi + m^2 c^4 \psi = 0$$

führt.

Literaturverzeichnis

- [App] W. Appel: *Mathematics for Physics and Physicists*
Princeton University Press 2007. 52
- [BB] P. Blanchard und E. Brüning: *Mathematical Methods in Physics*
Birkäuser, Second Edition 2015. 52
- [Eva] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*
American Mathematical Society, 2nd Edition 2010. 59, 78
- [Fol] G. B. Folland: *Introduction to Partial Differential Equations*
Princeton Uni Press, 2nd Edition 1995. 59, 78, 82, 84, 86
- [For] O. Forster: *Analysis 3*
Springer Spektrum, 8. Auflage 2017. 84
- [FK1] H. Fischer und H. Kaul: *Mathematik für Physiker. Band 1*
Springer Spektrum, 8. Auflage 2018. 3, 14, 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27
- [FK2] H. Fischer und H. Kaul: *Mathematik für Physiker. Band 2*
Springer Spektrum, 4. Auflage 2014. 3, 35, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 49, 50, 59, 70, 71,
74, 75, 76, 77, 79, 85, 91, 102, 103, 107, 109
- [KvW] H. Kerner und W. von Wahl: *Mathematik für Physiker*
Springer Spektrum, 3. Auflage 2013. 15, 29, 73
- [Lu1] G. Ludwig: *Foundations of Quantum Mechanics I*
Springer-Verlag 1983. 134
- [RS1] R. Remmert und G. Schumacher: *Funktionentheorie 1*
Springer-Verlag, 5. Auflage 2002. 5, 15, 30, 31
- [RS2] R. Remmert und G. Schumacher: *Funktionentheorie 2*
Springer-Verlag, 3. Auflage 2007. 15
- [Th4] W. Thirring: *Lehrbuch der Mathematischen Physik.*
Band 4: Quantenmechanik großer Systeme.
Springer Verlag 1980. 126
- [Tri] H. Triebel: *Höhere Analysis*
Verlag Harri Deutsch, 2. Auflage 1980. 136
- [Wer] D. Werner: *Funktionalanalysis*
Springer-Verlag, 8. Auflage 2018. 107, 109

Index

- abgeschlossener Operator, 128
- abschließbarer Operator, 128
- Absolutbetrag eines Operators, 122
- absolute Konvergenz, 4
- Abstiegsmethode von Hadamard, 98
- adjungierter Differentialoperator, 51
- adjungierter Operator, 118, 129
- allgemeiner Erwartungswert, 126
- allgemeiner Zustand, 126
- analytische Funktion, 14
- Anfangsrandwertproblem (Wärmeleitung), 83
- Anfangsrandwertproblem (Wellengleichung), 102
- Anfangswertproblem (Wärmeleitung), 83
- Anfangswertproblem (Wellengleichung), 93
- approximatives Punktspektrum, 121
- Austauschformeln, 39
- Außenraumproblem, 73

- beschränkter Operator, 117
- Bessel-Differentialgleichung, 70
- Bessel-Funktionen, 70
- Bewegung des \mathbb{R}^n , 74
- Bild eines Operators, 119

- Cauchy-Formeln, 18
- Cauchy-Problem für die Wellengleichung, 93
- Cauchy-Riemann-Gleichungen, 7
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 109
- Cauchysche Integralformel, 17
- Cauchyscher Hauptwert eines Integrals, 31
- charakteristische Differentialgleichung, 104
- charakteristische Koordinaten, 93

- d'Alembert-Formel, 94
- d'Alembert-Operator, 93
- Darboux-Gleichung, 96

- Darstellungsformel von Poisson (Wellengleichung), 97
- Delta-Distribution, 49
- dicht im Hilbertraum, 111
- Dichteoperator, 125
- Dirac-Distribution, 49
- Dirichlet-Funktional, 79
- Dirichlet-Problem, 73
- Distribution, 49
- Duhamel-Prinzip, 87, 100

- Eikonalgleichung, 104
- einfach gelagerte Kurve, 15
- einfach positives Umlaufen eines Punktes, 16
- Energiegleichung (Wärmeleitung), 91
- Energiegleichung (Wellengleichung), 103
- Erwartungswert, 115
- Erzeuger, 135

- Faltung von Funktionen, 41
- fast überall, 35
- Fouriertransformation für temperierte Distributionen, 54
- frei homotope geschlossene Kurven, 16
- Fundamentallösung, 53

- ganz (analytisch), 19
- Gebiet, 3
- gemischter Zustand, 126
- gleichmäßige Konvergenz, 4
- graphenabgeschlossen, 128
- Greensche Darstellungsformel, 76
- Grenzwert einer komplexen Funktion, 5

- Hadamard-Formel, 4
- harmonische Funktion, 73
- harmonischer Oszillator, 132
- Hauptteil einer Laurent-Reihe, 23

Hauptzweig des Logarithmus, 12
 Heaviside-Distribution, 49
 Heaviside-Funktion, 49
 hebbare Singularität, 21
 Heisenbergsche Unschärferelation, 134
 Helmholtz-Gleichung, 82
 Hermite-Funktionen, 45
 hermitescher Operator, 118
 Hilbertraum, 109
 holomorph, 7
 homologe Wege, 16
 homotope Kurven, 16
 Homotopie von Kurven, 16

 Image eines Operators, 119
 Impulsoperator, 38, 115
 Index einer Kurve bzgl. eines Punktes, 15
 Innenraumproblem, 73
 invertierbar
 stetig invertierbarer Operator, 118
 isolierte Singularität, 21

 kanonische Vertauschungsrelation, 134
 Kelvin-Transformation, 78
 Kern eines Operators, 119
 Kirchhoffsche Formel, 97
 Kommutator, 124
 kompakt konvergent, 13
 kompakter Operator, 124
 komplex differenzierbar, 6
 komplexes Kurvenintegral, 9
 kontinuierliches Spektrum, 120
 konvergente Folge von Distributionen, 50
 Konvergenz für rasch fallende Funktionen,
 54
 Konvergenz von Testfunktionen, 49
 Konvergenzradius, 4
 Konvergenzsatz von Weierstraß, 20
 Kugel(flächen)funktionen, 71

 Laplace-Beltrami-Operator für die Sphäre,
 70
 Laplace-Gleichung, 73
 Laplace-Operator, 73
 Laurent-Reihe, 23
 Legendre-Differentialgleichung, 71
 Legendre-Funktionen, 71
 Lemma von Riemann-Lebesgue, 39

 lichtartig, 104
 linearer Operator, 127
 Linksshift, 117
 lokalintegabel, 48
 lokalintegable Funktionen, 49
 Lorentz-Transformation, 103

 messbare Funktion, 35
 Multiindexschreibweise, 39

 Neumann-Problem, 73
 Neumann-Reihe, 121
 Newton-Potential, 75
 nullhomotope Kurve, 16

 Observable, 115
 Operatornorm, 117
 Ordnung einer Nullstelle, 15
 Ordnung eines Pols, 26
 orthogonal, 110
 orthogonaler Projektor, 110
 orthogonales Komplement, 110
 Orthogonalprojektion, 110
 Orthonormalsystem, 111
 Ortsoperator, 38, 115

 Parseval-Gleichung, 113
 Poisson-Gleichung, 73
 Poisson-Integral, 68
 Poisson-Integralformel, 78
 Poisson-Kern, 68
 Poisson-Kern in n Dimensionen, 78
 Poissonsche Darstellungsformel (Wellenglei-
 chung), 97
 Pol, 21
 polynomial beschränkte Funktion, 42
 positiver Operator, 119
 Potenzreihe, 4
 Punktspektrum, 119

 Quadratwurzel eines positiven Operators,
 122

 Range eines Operators, 119
 rasch fallende glatte Funktion, 42
 Rayleigh-(Ritz)-Prinzip, 125
 Rechtsshift, 117
 reguläre Distribution, 49

relativ beschränkt, 133
 Residualspektrum, 120
 Residuum, 27
 Resolvente, 119, 129
 Resolventenmenge, 119, 129
 Ringgebiete, 23

 Satz von Fischer-Riesz, 114
 Satz von Fréchet-Riesz, 114
 Satz von Hellinger-Toeplitz, 128
 Satz von Kato, 133
 Satz von Liouville, 19
 Satz von Morera, 19
 Satz von Plancherel, 45
 Satz von Pythagoras, 110
 Schrödinger-Gleichung, 114
 schwache Lösung, 48
 schwache Lösung (Dirichlet-Problem), 80
 selbstadjungiert, 129
 singulärer Teil einer Laurent-Reihe, 23
 Singularitätenfläche, 104
 Sinus Cardinalis, 21
 Skalarprodukt (im Komplexen), 109
 Sobolev-Raum, 80
 Spektralabbildungssatz, 122
 Spektralradius, 121
 Spektrum, 129
 Spektrum eines Operators, 119
 sphärische Mittel, 95
 Spur, 125
 Spurklasse, 125
 Stammfunktion, 11
 stark-stetige unitäre Gruppe, 135
 stetiger Operator, 117
 stetiges Spektrum, 120
 Stetigkeit einer komplexen Funktion, 5
 symmetrischer Operator, 118, 128

 temperierte Distribution, 54
 Testfunktionen, 49

 Umlaufzahl, 15
 unitär, 119
 unitäre Gruppe von Operatoren, 122

 Varianz, 124
 Vektorzustand, 115
 vollständig, 109
 vollständiger normierter Vektorraum, 35
 vollständiges Orthonormalsystem, 45, 111
 von Neumann-Entropie, 126
 Vorwärtslichtkegel, 102

 Wärmeleitungskern, 84
 Wellenfront, 104
 wesentlich selbstadjungiert, 131
 wesentliche Singularität, 21

 zulässiger allgemeiner Zustand, 134
 Zweig des Logarithmus, 12
 Zweige der komplexen Quadratwurzel, 12