# Übung: Algebra für LAK SS 15

Blatt 6

45. Zeige: Ist $R$ ein Integritätsbereich und $p \in R \setminus \big(\{0\} \cup R^\times\big)$, dann gilt: $p$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $(p)$ ist maximal als Hauptideal (d.h. $\nexists\, a \in R$ mit $(p) \subsetneq (a) \subsetneq R$).

46. Zwei Elemente $a, b$ eines Integritätsbereiches $R$ heißen assoziiert, in Zeichen $a \sim b$, falls $a \mid b$ und $b \mid a$. Zeige: $a \sim b \Leftrightarrow \exists x \in R^\times : b = xa \Leftrightarrow (a) = (b)$.

    Es sei $\mathbb{Z}[i] := \{m + in \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ der Integritätsbereich der *ganzen Gauß'schen Zahlen* mit der von $\mathbb{C}$ geerbten Addition und Multiplikation. Zeige die Aussagen der folgenden beiden Aufgaben:

47. $\mathbb{Z}[i]^\times = \{-1, 1, -i, i\}$. (Hinweis: In der Einheitenbedingung Absolutbeträge zu nehmen vereinfacht die Rechnung für den Nachweis $\mathbb{Z}[i]^\times \subseteq \{-1, 1, -i, i\}$.)

48. $1 + i \sim 1 - i$ und $2 = (1 + i)(1 - i)$ ist eine Zerlegung in Primelemente von $\mathbb{Z}[i]$. (Hinweis [korrigiert am 9.4.2015]: Um $1 \pm i$ als Primelement nachzuweisen, hilft es $|1 \pm i|^2 = 2$ zu beachten und daraus zu schließen, dass im Falle $(1 \pm i) \mid (a + bi)(r + si)$ somit obdA $2 \mid a \pm b$ gilt und daher weiters $\frac{a+bi}{1 \pm i} = \frac{(1 \mp i)(a+bi)}{2} = \ldots \in \mathbb{Z}[i]$ ist.)

49. Zeige: Ist $R$ ein Integritätsbereich und $p \in R \setminus \big(\{0\} \cup R^\times\big)$, dann gilt: $p$ ist Primelement $\Leftrightarrow$ $(p)$ ist Primideal.

50. Zeige: $X$ ist prim und $X^2 - 9$ ist reduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.

51. Ist $X^2 - 2$ reduzibel in $\mathbb{Q}[X]$? Und in $\mathbb{R}[X]$?

52. Zeige (gestützt durch Erinnerung an ein Argument aus der Analysis): Jedes Polynom vom Grad 3 ist reduzibel in $\mathbb{R}[X]$.