Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

(nach einer Zusammenstellung von Michael Grosser)

ÜbungsleiterInnenteam: Ilse Fischer, Michael Grosser, Clemens Sämann

Wintersemester 2012/13

Lösen Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Gauß die folgenden Gleichungssysteme:

$\boxed{\mathbf{1}}$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z_1 & + & iz_2 & + & (2-i)z_3 & = & 2 & + & i \\ (1+i)z_1 & & & + & 3iz_3 & = & 1 & + & 4i \\ -2z_1 & + & (1-i)z_2 & + & (1+2i)z_3 & = & & & i \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & -5 & -10 & 5 \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Berechnen Sie unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ die allgemeine Form der Lösung des Systems

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= e \\ cx_1 + dx_2 &= f \end{aligned} \quad .$$

7 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a) $x_1 + 4x_2 = 0$ b) $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$ c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$.

Wie lautet jeweils die Aufgabenstellung im Rahmen des Schulstoffes zur analytischen Geometrie oder Vektorrechnung, für deren Lösung Sie genau die bei der Lösung der obigen drei „Systeme" erforderlichen Schritte durchführen müssen?

8

(a) Lösen Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Gauß das Gleichungssystem

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

(der freie Parameter sei t) und dann dasselbe System in der Gestalt

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_3 + x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

(der freie Parameter sei hier u). Halten Sie sich dabei beide Male haargenau an den Formalismus für das Eliminationsverfahren, wie er in der Vorlesung am ersten Beispiel demonstriert worden ist.

(b) Zeigen Sie, daß man eine Lösung (x_1, x_2, x_3), die man aus (1) mit dem Parameterwert t erhält, aus (2) mit dem Parameterwert $u := 3 - \frac{t}{2}$ erhält, sowie die analoge Umkehraussage mit der Transformation $t := 6 - 2u$.

(c) Rechnen Sie das System in einer Variante (3), in der x_1 als freier Parameter s auftritt, und ermitteln Sie die Transformationen, die für eine bestimmte Lösung (x_1, x_2, x_3) s durch t bzw. s durch u bzw. t durch s bzw. u durch s ausdrücken.

9 Berechnen Sie für die folgenden Matrizen A, B das Produkt $A \cdot B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10 Berechnen Sie für die folgenden Matrizen A jeweils alle Potenzen A^n $(n = 1, 2, \ldots)$:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{11}}$ Besorgen Sie sich die Formeln des sogenannten „Ersten Additionstheorems für Winkelfunktionen“ und berechnen Sie das folgende Matrixprodukt, wobei α, β beliebig aus $\mathbb{R}$ sind:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{12}}$ Geben Sie eine Regel für die Multiplikation zweier „Diagonalmatrizen“ an (so bezeichnet man quadratische Matrizen, in denen alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonale 0 sind), das heißt, berechnen Sie folgendes Matrixprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{13}}$ Was können Sie über das Produkt zweier Matrizen der folgenden Gestalt sagen ($*$ bezeichnet hier beliebige möglicherweise verschiedene Einträge):

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} ?$$

$\boxed{\textbf{14}}$ Zeigen Sie für entsprechende Matrizen A, B, C mit Eintragungen aus einem Körper $\mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

(b) $A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$.

Was soll hier das Wort „entsprechend“ besagen?

$\boxed{\textbf{15}}$ Beweisen Sie unter Verwendung des Kroneckerschen Deltasymbols $A \cdot I_n = A$, wo A eine $m \times n$-Matrix und I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet.

$\boxed{\textbf{16}}$ Für $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ sei die $m \times n$-Matrix $E^{(k,l)}$ definiert durch ${E^{(k,l)}}_{ij} := \delta_{ik}\delta_{jl}$. Wie sieht $E^{(k,l)}$ konkret aus? Berechnen Sie $E^{(k,l)} \cdot E^{(p,q)}$ sowie $E^{(k,l)} \cdot A$ und $A \cdot E^{(k,l)}$ für passendes A.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien U, W Teilräume von V. Zeigen Sie, daß die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $U \cap W = \{0\}$

(b) Jedes $v \in U + W$ hat nur eine einzige Darstellung als $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$.

[Zur Erinnerung: Jede der Bedingungen a) beziehungsweise b) besagt gerade, daß die Summe $U + W$ als *direkte* Summe $U \oplus W$ bezeichnet wird.]

$\boxed{\mathbf{18}}$ Sei V der reelle Vektorraum $\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und G beziehungsweise U dessen Teilräume aller *geraden* beziehungsweise *ungeraden* Funktionen:

$$G := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(-x) = \quad f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$U := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, daß $V = G \oplus U$ gilt. Die dazu erforderliche Zerlegung einer beliebigen Funktion aus V ergibt sich aus folgender Identität:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Wie sieht diese Zerlegung für den Fall aus, daß f ein Polynom ist? Wie für den Fall, daß f ein trigonometrisches Polynom, das heißt von folgender Gestalt ist:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \ ? \qquad (a_n, b_n \in \mathbb{R})$$

$\boxed{\mathbf{19}}$ Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ beziehungsweise des $\mathbb{R}^3$ sind Teilräume? Begründen Sie Ihre Antworten und skizzieren Sie für die Aufgaben a) – f) die betreffenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

(a) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$

(b) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$

(c) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0,\ x_2 \geq 0\}$

(d) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 - x_2 = 0\}$

(e) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + {x_2}^2 = 0\}$

(f) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 3\lambda,\ x_2 = -2\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

(g) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\}$

(h) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_3 = 0 \text{ und } {x_2}^4 = 0\}$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Welche der folgenden Teilmengen des Raumes P($\mathbb{R}$) der reellen Polynome sind Teilräume? Begründen Sie wiederum ihre Antworten.

(a) $\{p \,|\, p(1) = p(2)\}$

(b) $\{p \,|\, p(1) = p(2) + 1\}$

(c) $\{p \,|\, p(0) = 1\}$

(d) $\{p \,|\, p(1) \leq 0\}$

(e) $\{p \,|\, p \text{ ist vom Grad } 3\}$

(f) $\{p \,|\, p''(1) = 0\}$

(g) $\{p \,|\, p''(1) = -1\}$

(h) $\{p \,|\, \int\limits_0^1 p(t)\,dt = 0\}$

(i) $\{p \,|\, \int\limits_0^1 p(t)\,dt = 7\}$.

Ein Hinweis: Jeder Teilraum muß das Nullelement (in diesem Fall das Nullpolynom) enthalten.

$\boxed{\mathbf{21}}$ Das *Produkt* zweier $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W ist definiert als die Menge

$$V \times W := \{(v, w) \,|\, v \in V,\ w \in W\}$$

zusammen mit den Operationen

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad (v_1, v_2 \in V,\ w_1, w_2 \in W)$$

$$\lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w) \qquad (v \in V,\ w \in W,\ \lambda \in \mathbb{K}).$$

Zeigen Sie, daß damit tatsächlich ein Vektorraum definiert ist, das heißt, daß die betreffenden Axiome (V1) bis (V8) erfüllt sind.

Wenn Ihnen während des Beweisens aller dieser Axiome langweilig wird, ist das wahrscheinlich ein Zeichen dafür, daß Sie die Sache verstanden haben und aufhören können. Arbeiten Sie sich aber auf jeden Fall bis (V3) vor.

Welcher Vektorraum entsteht gemäß der obigen Definition, wenn man $\mathbb{K} = V = W = \mathbb{R}$ setzt?

Übrigens — ganz analog wird das Produkt mehrerer Vektorräume definiert: $V_1 \times \cdots \times V_n$ beziehungsweise sogar $\prod\limits_{i \in I} V_i$, wo I eine beliebige, also auch unendliche Indexmenge sein darf. Bedarf für derartige Konstruktionen besteht beispielsweise in der Physik, wenn der Zustandsraum eines klassischen Teilchens (Ort, Impuls etc.) durch einen Vektorraum V (zum Beispiel $\mathbb{R}^6$) gegeben ist. Der Zustandsraum für N unabhängige derartige Teilchen ist dann $V^N = V \times \cdots \times V$ (N-faches Produkt).

$\boxed{\textbf{22}}$ Sind die Systeme der Vektoren

$$a)\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\27\end{pmatrix}$$

jeweils linear unabhängig? Falls ja: Stellen sie eine Basis für den $\mathbb{R}^3$ dar?

$\boxed{\textbf{23}}$ Geben Sie vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ an, die (notwendigerweise) linear abhängig sind, aber so, daß je drei von ihnen linear unabhängig sind. Ein Tip: Nehmen Sie zunächst auf möglichst primitive Weise drei linear unabhängige Vektoren her und suchen Sie dann (auf möglichst ebenso primitive Weise) einen passenden vierten dazu.

$\boxed{\textbf{24}}$ Läßt sich das System

$$v_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\1\\4\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}4\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, wie?

$\boxed{\textbf{25}}$

(a) Ergänzen Sie $v_1 = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$.

(b) Ergänzen Sie

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Sollten Sie bei Teil b) der Aufgabe nicht das Glück haben, zufällig oder per Genieblitz auf einen passenden Vektor w_3 zu stoßen, vergegenwärtigen Sie sich den Austauschsatz von Steinitz: w_1 zusammen mit den Einheitsvektoren e_2 und e_3 bildet sicher ein linear unabhängiges System (Adlerauge anstelle des Gaußschen Verfahrens!) und somit eine Basis; jetzt brauchen Sie nur noch den Vektor w_2 anstelle eines der Einheitsvektoren einzuschleusen, und wie Sie das bewerkstelligen können, sagt Ihnen der Induktionsanfang des Beweises des Austauschsatzes.

$\boxed{\mathbf{26}}$ Zeigen Sie: Die Funktionen $f : x \mapsto \cos x$ und $g : x \mapsto x^2$ sind linear unabhängig im reellen Vektorraum $C(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Hier ist es wichtig, daß Sie sich den Gleichheitsbegriff für Funktionen vor Augen halten: In der Relation $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$, mit der Sie den Beweis der linearen Unabhängigkeit ja beginnen müssen, bedeutet das Gleichheitszeichen, daß die links davon und die rechts davon stehende Funktion (das ist hier die Nullfunktion, harmlos mit „0“ bezeichnet!) für jedes Argument des gerade in Rede stehenden Definitionsbereiches (das heißt hier also für jedes $x \in \mathbb{R}$) denselben Wert ergeben. Die besagte Relation bedeutet also: $\lambda_1 \cos x + \lambda_2 x^2 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nützen Sie das „für alle“ und setzen Sie raffiniert gewählte Werte von x ein, um die ersehnten Beziehungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ zu erhalten.

$\boxed{\mathbf{27}}$ Stellen Sie den Vektor v als Linearkombination der drei eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildenden Vektoren b_1, b_2, b_3 dar:

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{28}}$

(a) Geben Sie zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ an, sodaß in keinem der verwendeten Vektoren die Zahl null als Komponente auftritt.

(b) Geben Sie zwei Basen für den Vektorraum $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich zwei an, sodaß in jedem der verwendeten Polynome alle drei Potenzen 1, x, x^2 mit einem von null verschiedenen Koeffizienten vorkommen.

$\boxed{\mathbf{29}}$ Geben Sie eine Basis des Teilraumes $W = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\}$ von $\mathbb{R}^2$ sowie eine Basis des Teilraumes $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ von $\mathbb{R}^3$ an. Welche geometrische Gestalt haben W bzw. U und wie lauten die Aufgabenstellungen für dieselben Probleme in der Schule?

$\boxed{\mathbf{30}}$

(a) Geben Sie ein verkürzbares Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$ an. Verkürzen Sie es.

(b) Geben Sie ein verlängerbares linear unabhängiges System im $\mathbb{R}^4$ an. Verlängern Sie es.

$\boxed{\textbf{31}}$ Ist das folgende System Erzeugendensystem für den $\mathbb{R}^4$? Ist es Erzeugendensystem für einen dreidimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$? Ist es überhaupt eine Erzeugendensystem für *irgendeinen* Teilraum des $\mathbb{R}^4$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{32}}$ Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0, 3x_1 - 2x_2)$

(b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0, 3x_1 - 2)$

(c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, {x_2}^2, x_2)$

(d) $\varphi_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (e^{x_1}, x_2 x_3, \cos x_4)$

(e) $\varphi_5 : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}) \qquad p \mapsto p'' + 7p' + p$

(f) $\varphi_6 : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}) \qquad p \mapsto p''' - p^2$

(g) $\varphi_7 : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}) \qquad p \mapsto p' - p + 2$

(h) $\varphi_8 : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}) \qquad p(x) \mapsto p(x+1)$

(i) $\varphi_9 : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}) \qquad p(x) \mapsto p(3x)$.

$\boxed{\textbf{33}}$ Ist der Übergang zur komplex konjugierten Zahl, das heißt also die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$, linear von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$?

$\boxed{\textbf{34}}$ Die Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien wie folgt definiert: φ projiziere jeden Punkt des $\mathbb{R}^3$ parallel zur 3-Achse auf die 1-2-Ebene; ψ spiegle jeden Punkt des $\mathbb{R}^2$ an der ersten Mediane.

(a) Beschreiben Sie φ und ψ in Koordinaten (also in der Gestalt $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \dots$, $(x_1, x_2) \mapsto \dots$) und versuchen Sie dann, geeignete Matrizen A, B zu finden sodaß $\varphi(x) = A \cdot x$ ($x \in \mathbb{R}^3$) und $\psi(y) = B \cdot y$ ($y \in \mathbb{R}^2$) gelten.

(b) Sind φ und ψ linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Falls auch $\psi \circ \varphi$ durch Multiplikation mit einer Matrix gegeben ist, bestimmen Sie diese Matrix.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Beschreiben Sie die jeweilige Wirkung der Matrizen aus Aufgabe 10 a)–d) auf den $\mathbb{R}^2$ geometrisch. Denken Sie daran: Die Spalten einer Matrix A sind die Bilder der Vektoren der Standardbasis unter der entsprechenden Abbildung $x \mapsto A \cdot x$.

$\boxed{\mathbf{36}}$ Wie lautet die Matrix derjenigen linearen Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$, die einer Drehung der Ebene um den Ursprung um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entspricht? Beachten Sie auch hier den bei der vorhergehenden Aufgabe gegebenen Hinweis und aktivieren Sie gedanklich das Stichwort „Vektoren auf dem Einheitskreis“.

$\boxed{\mathbf{37}}$ Dieselbe Aufgabe für die Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung, die mit der positiven 1-Achse den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt. Wenn Sie die Aufgabe fertiggerechnet haben, beantworten Sie noch die Frage: Warum $\frac{\alpha}{2}$ und nicht α?

$\boxed{\mathbf{38}}$ Sei V der reelle Vektorraum der Funktionen der Gestalt

$$f(t) := \lambda e^{2t} \sin 3t + \mu e^{2t} \cos 3t \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie zunächst, daß die beiden Funktionen $g_1(t) := e^{2t} \sin 3t$ und $g_2(t) := e^{2t} \cos 3t$ linear unabhängig sind (und damit eine Basis B von V darstellen) und bestimmen Sie dann die Matrix $[\varphi]_{B,B}$ der folgenden linearen Abbildung $\varphi : V \to V$:

$$\varphi(f) := f'' - 2f.$$

$\boxed{\mathbf{39}}$ Bestimmen Sie Bild und Kern der folgenden linearen Abbildungen:

(a) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(x) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$

(b) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(x) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot x\ .$

Bei dieser Aufgabe müssen Sie Teilräume von $\mathbb{R}^4$ beziehungsweise $\mathbb{R}^3$ „angeben“; tun Sie das jeweils durch Angabe einer Basis des betreffenden Teilaums. Bedenken Sie, daß das Bild von linearen Abbildungen der obigen Art der von den Spalten der Abbildungsmatrix aufgespannte Raum ist. Bei Teil b) empfehle ich, der Reihenfolge nach $\ker \psi$, die Dimension von $\operatorname{im} \psi$ und schließlich $\operatorname{im} \psi$ zu bestimmen.

$\boxed{\mathbf{40}}$ Sei $V = \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 und $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(p) := p - p'$.

(a) Zeigen Sie auf die Ochsentour, daß φ injektiv und surjektiv ist, das heißt daß aus $p - p' = q - q'$ die Beziehung $p = q$ folgt und daß für jedes gegebene Polynom $r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ die Gleichung $p - p' = r$ ein Polynom p als Lösung hat $(p, q, r \in V)$.

(b) Wie kann man die Injektivität und Surjektivität von φ viel einfacher mit Sätzen aus der Vorlesung beweisen?

$\boxed{\textbf{41}}$ Seien V, W Vektorräume und $\varphi : V \to W$ linear. Zeigen Sie, daß $\ker\varphi$ ein Teilraum von V und $\operatorname{im}\varphi$ ein Teilraum von W ist.

$\boxed{\textbf{42}}$ Berechnen Sie die Inverse und die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{43}}$

(a) Bestimmen Sie die Matrix $S = [E \to B]$ des Basiswechsels von der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$ zur Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist. Drücken Sie explizit die Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3 eines Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ bezüglich B durch seine Koordinaten bezüglich E aus, d.h. konkretisieren Sie

$$x' := [x]_B = S^{-1}[x]_E = S^{-1}x.$$

(b) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_{A,B}$ der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$$

bezüglich der Basen $A = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ des $\mathbb{R}^2$ und B wie in Aufgabe (a).

Die beiden folgenden Aufgaben gehören thematisch eigentlich noch zu Kapitel 3, sie verwenden aber den Begriff des linearen Erzeugnisses einer Teilmenge eines Vektorraums, den wir erst im Zusammenhang mit dem Rangbegriff im Kapitel 4 eingeführt haben.

$\boxed{\textbf{44}}$ Sei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie möglichst prägnant und explizit, aus welchen Vektoren $[a, b]$ besteht.

$\boxed{\mathbf{45}}$ Geben Sie eine Basis des Raumes $W := [f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, i = 1, \ldots, 8]$ an, wo $f_1, \ldots, f_8$ der Reihe nach durch die folgenden Funktionsterme gegeben sind:

$$\sin t,\ \cos t,\ \sin t \cos t,\ 1,\ \sin(t + \frac{1}{3}),\ \sin^2 t,\ \cos(t - \frac{1}{2}),\ \cos^2 t.$$

Die angeführten Funktionen bilden ja nach Definition der „eckigen Klammer“ ein Erzeugendensystem für W. Die Aufgabe besteht nun darin, dieses Erzeugendensystem sachgerecht möglichst weitgehend zu verkürzen, das heißt, „überflüssige“ Funktionen herauszufinden und sie wegzulassen. Wie schon in Aufgabe 11 werden Sie nicht ohne die Additionstheoreme für Winkelfunktionen auskommen.

$\boxed{\mathbf{46}}$ Berechnen Sie die zur Basis B aus Aufgabe 43 duale Basis B^* des $(\mathbb{R}^3)^*$.

$\boxed{\mathbf{47}}$ Rechnen Sie nach, daß (f_0, f_1, f_2, f_3) mit $f_k(p) := \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ die Dualbasis zur Basis $(1, x, x^2, x^3)$ des Raumes $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 ist.

$\boxed{\mathbf{48}}$ Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

durch Entwicklung nach der zweiten Spalte.

$\boxed{\mathbf{49}}$ Berechnen Sie die sogenannte VANDERMONDEsche Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ein klassisches Tüftel- und Trickbeispiel. Eine Möglichkeit, es zu knacken, sieht so aus: Subtrahieren Sie — mit der letzten Spalte beginnend — von jeder Spalte das x_1-fache der linken Nachbarspalte (dadurch ändert sich der Wert der Determinante ja nicht). Heben Sie heraus was geht, entwickeln Sie nach der Ihrer Bequemlichkeit am meisten entgegenkommenden Zeile und benutzen Sie dann die Tatsache, daß sich aus jeder Zeile ein passender gemeinsamer Faktor herausziehen läßt. Nun können Sie . . . na sehen Sie, so schwierig ist es auch wieder nicht.

Für welche n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ hat diese Determinante den Wert Null? Geben Sie mit Hilfe des Ergebnisses einen blitzartigen Lösungsweg für Aufgabe 22b) an. [Mit diesem Hintergrundwissen habe ich auch die Zahlenwerte in 22b) ausgewählt.]

$\boxed{\mathbf{50}}$ Berechnen Sie die Determinante der linearen Abbildung φ aus Aufgabe 40.

$\boxed{\mathbf{51}}$ Zeigen Sie, daß das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$ tatsächlich positiv definit ist.

$\boxed{\mathbf{52}}$ Zeigen Sie, daß

$$\langle\, x |\, y\rangle := x_1y_1 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 5x_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert. (Bei der Bilinearität und der Symmetrie werden Sie wahrscheinlich keine Schwierigkeiten haben, bei der Positivdefinitheit ergänzen Sie auf ein vollständiges Quadrat: $\langle\, x|\, x\rangle = (x_1 - 2x_2)^2 + \ldots .$)

$\boxed{\mathbf{53}}$ Beweisen Sie für eine Norm, die mittels $\|v\| := \sqrt{\langle v \,|\, v\rangle}$ von einem Skalarprodukt stammt, die Parallelogrammgleichung

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

$\boxed{\mathbf{54}}$ Zeigen Sie: Die Funktionen 1, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\ldots$; $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\ldots$ bilden ein Orthogonalsystem im Vektorraum $\mathrm{C}[0, 2\pi]$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle f \,|\, g\rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt$. Normieren Sie anschließend die „Vektoren" dieses Systems, um ein Orthonormalsystem zu erhalten.

$\boxed{\mathbf{55}}$ Konstruieren Sie aus der Basis B aus Aufgabe 43 mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{56}}$ Wenden Sie auf das System $1, x, x^2, x^3, \ldots$ im Raum $\mathrm{C}[-1, +1]$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle f \,|\, g\rangle := \int_{-1}^{+1} \overline{f(t)} g(t)\, dt$ das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an. Sie erhalten dadurch die Folge der sogenannten Legendre-Polynome $L_0(x), L_1(x), L_2(x), \ldots$. Berechnen Sie zunächst „auf Vorrat" $\int_{-1}^{+1} t^n\, dt$, Sie werden es brauchen. Halten Sie bis L_3 durch. — Den Legendre-Polynomen werden Sie unter anderem in der Quantenmechanik bei der Diskussion der Drehimpulsoperatoren begegnen (Stichwort „Kugelfunktionen").

$\boxed{\mathbf{57}}$ Leiten Sie eine Formel für die Spiegelung an einer durch den Ursprung gehenden Ebene W im $\mathbb{R}^3$ her. Projizieren Sie dazu einen gegebenen Punkt P (bzw. Vektor v) zunächst orthogonal auf W; bezeichnet P_1 diese Projektion von P, dann erhalten Sie den an W gespiegelten Punkt P^*, indem Sie von P_1 aus nocheinmal den Vektor $\vec{PP_1}$ abtragen. Machen Sie sich diese Anleitung mit Hilfe einer Skizze klar und bestimmen Sie auch die Matrix der in Rede stehenden Spiegelung.

$\boxed{\mathbf{58}}$ Geben Sie eine orthogonale 3×3-Matrix an, deren erste Zeile $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ lautet.

$\boxed{\textbf{59}}$ Sei V ein raffiniert gewählter Teilraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums aller Funktionen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodaß die beiden folgenden „Operatoren“ (=linearen Abbildungen) q, p tatsächlich von V nach V führen:

$$
\begin{aligned}
at2(q(\psi))(t) &:= t\psi(t) && \text{(Ortsoperator eines 1-dim. quantenmechanischen Systems)} \\
(p(\psi))(t) &:= -i\psi'(t) && \text{(Impulsoperator eines 1-dim. quantenmechanischen Systems).}
\end{aligned}
\quad at
$$

Dabei haben wir die in der Quantenmechanik übliche Bezeichnungsweise verwendet und überdies $\hbar = 1$ gesetzt.

Zeigen Sie, daß diese beiden Operatoren bezüglich des Skalarprodukts $\langle \phi \,|\, \psi \rangle := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi(t)}\psi(t)\,dt$ selbstadjungiert sind, das heißt, daß $\langle q(\phi) \,|\, \psi \rangle = \langle \phi \,|\, q(\psi) \rangle$ und die analoge Beziehung für p gilt. Für den Beweis der Selbstadjungiertheit von p verwenden Sie partielle Integration und beachten, daß alle $\psi \in V$ für $t \to \pm\infty$ gegen Null gehen.

Es ist übrigens gar nicht so einfach, auf elementare Weise einen entsprechenden Raum V hinzuschreiben: Differenzieren und Multiplikation mit t darf nicht aus V hinausführen und alle erforderlichen Integrale müssen definiert sein. (Um das brauchen Sie sich aber nicht zu kümmern, Sie sollen einfach drauflosrechnen.) Eine mögliche Wahl wäre

$$V = \{\psi(t) = p(t)e^{-t^2} \,|\, p(t) \text{ ist ein Polynom mit Koeffizienten aus } \mathbb{C}\}.$$

$\boxed{\textbf{60}}$ Zeigen Sie, daß auf dem Raum V der vorigen Aufgabe die Rechtsverschiebung $R_a : V \to V$, $(R_a(\psi))(t) := \psi(t-a)$ $(a \in \mathbb{R})$, unitär ist, das heißt, daß ihre Adjungierte ihre Inverse ist. — Klingt schwierig, ist es aber nicht: Um die konkrete Gestalt von V und um die Legitimität aller Rechenoperationen brauchen Sie sich wiederum nicht zu kümmern, und überdies ist die Inverse von R_a offenbar die Linksverschiebung $L_a : V \to V$, $(L_a(\psi))(t) := \psi(t+a)$ $(a \in \mathbb{R})$. Sie brauchen jetzt also nur mit Hilfe der definierenden Formel für die Adjungierte nachzurechnen, daß $R_a^\dagger = L_a$ ist.

$\boxed{\textbf{61}}$ Ermitteln Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{62}}$ Ermitteln Sie ebenso Eigenwerte und Eigenvektoren von $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Nützen Sie dabei aus, daß sich die Determinante einer Kästchenmatrix wie der gegebenen sofort als das Produkt der Determinanten zweier entsprechender 2×2-Matrizen berechnen läßt.

$\boxed{\mathbf{63}}$ Falls erforderlich, sorgen Sie durch einen Zeilentausch bei der in Aufgabe 58 erhaltenen Matrix dafür, daß ihre Determinante 1 wird (daß sie zunächst jedenfalls ± 1 ist, garantiert die Orthogonalität). Als Element von SO(3) stellt die allenfalls modifizierte Matrix nun eine Drehung des $\mathbb{R}^3$ dar. Ermitteln Sie einen Vektor in Richtung der Drehachse.

$\boxed{\mathbf{64}}$ Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & -1 & 2+i \\ 1 & 0 & -3 \\ -2+i & 3 & 3i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 17 & 21 \\ 0 & 4 & 33 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha \in [0, 2\pi),\ \beta \in [0, \pi)).$$

Die Frage ist bewußt unvollständig formuliert. Es ist Teil der Aufgabe, die Frage zu präzisieren. — Bitte keine Fleißaufgaben! Trachten Sie danach, mit dem geringstmöglichen Aufwand jeweils zu einem begründeten „ja“ beziehungsweise „nein“ zu gelangen.

$\boxed{\mathbf{65}}$ Geben Sie eine reelle Matrix an, deren charakteristisches Polynom die Gestalt $p(t) = (2-t)^3(4-t)^5$ hat. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 soll die Dimension 2, der zum Eigenwert 4 die Dimension 3 haben. Unter welchen Umständen ist eine derartige Matrix diagonalisierbar?

$\boxed{\mathbf{66}}$ Zeigen Sie, daß die Ähnlichkeitsbeziehung

$$A \sim B \rightleftharpoons \exists S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) :\ B = S^{-1}AS$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M(n, n; \mathbb{K})$ aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ darstellt.

$\boxed{\mathbf{67}}$ Zeigen Sie daß der reelle Tensor t zweiter Stufe mit den Komponenten $t_{11} = 1$, $t_{12} = 0$, $t_{21} = 0$, $t_{22} = 1$ (das heißt $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, falls der Tensor als 2×2-Matrix geschrieben wird) nicht zerfallend, also nicht von der Gestalt $x \otimes y$ mit $x, y \in \mathbb{R}^2$ ist.