Übungen Stochastik für LAK

F. Hofbauer und G. Greschonig, Sommersemester 2017

1. Man gebe alle geordneten Stichproben vom Umfang 4 mit Zurücklegen aus der Menge $\{a, b\}$ an.

2. Man gebe alle möglichen Anordnungen der Ziffern 1, 2, 3 und 4 an.

3. Seien $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ und $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wie viele Funktionen mit der Definitionsmenge A und der Zielmenge B gibt es?

4. Man berechne, wie viele Fahnen aus den Farben weiß, rot, gold, grün und blau zusammengestellt werden können, wenn eine Fahne aus drei verschiedenfarbigen Streifen (oben, mitte, unten) besteht? Wie viele gibt es, wenn man nur verlangt, dass nebeneinanderliegende Streifen verschiedenfarbig sind?

5. Man berechne, auf wie viele Arten vier Personen in einem PKW mit insgesamt 4 Sitzen eine Fahrt unternehmen können, wenn
   (i) alle 4 einen Führerschein haben. (ii) nur 2 einen Führerschein haben.

6. Folgen, die aus 6 Zeichen bestehen, sollen aus den Zeichen a, b, c, d, 2, 3, 4, 5, 6 gebildet werden, sodass jedes dieser Zeichen höchstens einmal verwendet wird. Wie viele gibt es? Wie viele gibt es, wenn an dritter und vierter Stelle Ziffern stehen müssen, und an den anderen Stellen Buchstaben? Wie viele gibt es, die an den ersten drei Stellen Ziffern und an den anderen Stellen Buchstaben enthalten, wenn die Ziffern der Größe nach geordnet auftreten?

7. Vier Personen A, B, C und D sollen bei einer Veranstaltung sprechen. Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn B nach A reden muss? Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn B unmittelbar nach A reden muss?

8. In einer Urne sind 7 rote, 5 blaue und 4 gelbe Kugeln. Wie viele 8-elementige Teilmengen aus dieser Menge von 16 Kugeln gibt es, die genau 3 rote, 3 blaue und 2 gelbe Kugeln enthalten?

9. Beim Lotto werden zufällig sechs Zahlen aus den Zahlen 1 bis 45 gezogen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es? Jemand hat die Zahlen 3, 9, 26, 37, 39, 43 getippt. Wie viele mögliche Ziehungsergebnisse gibt es, die fünf dieser Zahlen enthalten, aber nicht alle sechs? Wie viele Ziehungsergebnisse gibt es, die vier dieser Zahlen enthalten, aber nicht fünf oder sechs?

10. Wie viele nichtleere Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ gibt es, die gleich viele gerade und ungerade Zahlen enthalten?

11. In einer Fußballliga spielen 15 Mannschaften. Wie viele Spiele gibt es, wenn jede Mannschaft gegen jede andere spielt? In einer Ebene sind 15 Gerade gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. Wie viele Schnittpunkte gibt es?

12. In einer Stadt ist das Straßennetz rechtwinkelig angelegt mit Straßen in ost-westlicher und nord-südlicher Richtung. Jemand steht an einer Straßenkreuzung und will zur Straßenkreuzung, die 3 Straßen in nördlicher und 5 Straßen in westlicher Richtung liegt. Auf wie viele Arten ist es möglich, ohne Umweg dorthin zu kommen?

13. Folgen, die aus drei Ziffern und drei Buchstaben bestehen, sollen aus den Zeichen a, b, c, d, 2, 3, 4, 5, 6 gebildet werden. Wie viele gibt es, wenn jedes dieser Zeichen nur einmal verwendet

wird? Wie viele gibt es, wenn jedes dieser Zeichen beliebig oft verwendet werden darf?

14. Wie viele Anordnungen der Buchstaben a, e, i, o, u, x, x, x, x, x, x, x gibt es, wenn keine zwei Vokale nebeneinander stehen dürfen? Hinweis: Zwei Fälle unterscheiden: Vokal am Ende und kein Vokal am Ende.

15. Man gebe alle 6-stelligen Zahlen an, die sich aus den Ziffern 1, 1, 2, 2, 2, 2 bilden lassen.

16. Wie viele 7-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 3, 3, 3, 5, 5, 8, 8 bilden?
Wie viele 7-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 0, 0, 3, 5, 5, 8, 8 bilden?

17. Wie viele 7-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 2, 2, 5, 5, 8, 8 bilden, die durch 2 teilbar sind?

18. Wie viele 9-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 0, 0, 0, 5, 5, 8, 8, 8, 8 bilden, die durch 2 teilbar sind?

19. Seien E, F und G Ereignisse, das sind Teilmengen einer Ausfallsmenge Ω. Mit Hilfe von E, F, G und $\cap$, $\cup$, $'$ beschreibe man:
(i) wenigstens eines tritt ein (ii) keines tritt ein
(iii) alle drei treten ein (iv) genau eines tritt ein

20. Eine Münze wird 4 Mal geworfen. Die Menge Ω hat 16 Elemente. Man gebe folgende Ereignisse als Teilmengen von Ω an:
(i) „Wappen“ kommt nicht zweimal hintereinander
(ii) weder „Wappen“ noch „Zahl“ kommen zweimal hintereinander

21. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2014/15, Teil 1, Aufgabe 22 (Augensumme beim Würfeln);
SRP Mathematik AHS, Nebentermin 2 2013/14, Teil 1, Aufgabe 24 (Würfeln).

22. SRP Mathematik AHS, Haupttermin 2013/14, Teil 1, Aufgabe 22 (Hausübungskontrolle);
SRP Mathematik AHS, Haupttermin 2014/15, Teil 1, Aufgabe 24 (Tennisspiel).

23. Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
(i) sich die Augenzahlen um 1 unterscheiden? (ii) die Augenzahlen gleich sind?
(iii) die Augensumme ≥ 10 ist? (iv) die erste Augenzahl kleiner als die zweite ist?

24. Man würfelt vier Mal hintereinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
(i) alle vier Zahlen verschieden sind? (ii) die Zahlen 1 und 2 nicht vorkommen?
(iii) die Zahl 1 genau einmal auftritt? (iv) genau zwei verschiedene Zahlen vorkommen?

25. SRP Mathematik AHS, Haupttermin 2015/16, Teil 1, Aufgabe 23 (Verschiedenfärbige Kugeln);
SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2014/15, Teil 1, Aufgabe 21 (Rote und blaue Kugeln).

26. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 2 2015/16, Teil 1, Aufgabe 22 (Weiche und harte Eier);
SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2014/15, Teil 1, Aufgabe 24 (Sammelwahrscheinlichkeit).

27. In einer Urne sind 4 weiße, 3 schwarze und 1 rote Kugel. Es werden 3 Kugeln hintereinander mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
(i) ist genau eine der Kugeln schwarz? (ii) wird keine weiße Kugel gezogen?
(iii) treten drei verschiedene Farben auf? (iv) ist die zweite Kugel rot, die andern aber nicht?

28. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 4 Personen zwei am selben Wochentag geboren sind?

29. Eine Urne enthält n Kugeln, durchnummeriert mit $1, 2, \ldots, n$. Wir ziehen mit Zurücklegen aus der Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir erstmals beim k-ten Zug eine Kugel ziehen, die wir vorher schon einmal gezogen hatten?

30. Ein Würfel wird 25 Mal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 4 Mal 1, 6 Mal 2, 5 Mal 3, 2 Mal 4, 3 Mal 5 und 5 Mal 6 zu erhalten?

31. Eine Zahl wird zufällig aus der Menge der ersten 100 natürlichen Zahlen (ohne Null) ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl
    (i) durch 4 oder durch 6 teilbar ist?
    (ii) durch 9 oder durch 10 teilbar ist?

32. Bei einem Glücksspiel werden drei Ein-Euro-Münzen unter neun umgedrehten Kaffeetassen versteckt, wobei jede Münze unter einer anderen Tasse liegt. Der Spieler wählt drei Tassen und dreht sie um. Er gewinnt die Münzen, die er findet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er keine, eine, zwei oder alle drei Münzen gewinnt?

33. In einer Urne sind 4 weiße, 3 schwarze und 1 rote Kugel. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
    (i) ist genau eine der Kugeln weiß?
    (ii) wird keine rote Kugel gezogen?
    (iii) ist höchstens eine Kugel schwarz?
    (iv) treten mehr weiße als schwarze Kugeln auf?

34. Aus 52 Spielkarten, die aus 13 $\heartsuit$-Karten, aus 13 $\diamondsuit$-Karten, aus 13 $\clubsuit$-Karten und aus 13 $\spadesuit$-Karten bestehen, wird eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang 17 gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5 $\heartsuit$-Karten, 3 $\diamondsuit$-Karten, 7 $\clubsuit$-Karten und 2 $\spadesuit$-Karten zu ziehen?

35. In einer Urne sind 5 rote, 3 blaue und 4 grüne Kugeln. Man zieht eine 3-elementige Teilmenge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Farben zu ziehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei verschiedene Farben zu ziehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedene Farben zu ziehen?

36. Aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 90$ wird solange ohne Zurücklegen gezogen, bis die ersten 15 Zahlen aufgetreten sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 80 Züge benötigt?

37. Zwei Punkte werden zufällig in $[0, 1]$ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer $\geq t$ ist?

38. Zwei Punkte werden zufällig in $[0, 1]$ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Summe $\leq t$ ist?

39. Auf einer Strecke der Länge 1 werden zwei Punkte zufällig gewählt. Dadurch wird diese Strecke in 3 Teile geteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die 3 Teilstrecken Seiten eines Dreiecks?

40. In einer Wand befindet sich ein äußerlich nicht sichtbares Drahtgeflecht aus 4 mm starkem Draht, das Rechtecke mit den Seitenlängen 50 mm und 80 mm (gemessen von Drahtmitte zu Drahtmitte) bildet. An einer zufällig gewählten Stelle wird mit einem 10 mm-Bohrer ein Loch in die Wand gebohrt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei das Drahtgeflecht getroffen?

41. Zwei Punkte a und b werden zufällig in $[0, 4]$ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ zwei reelle Nullstellen hat?

42. In einer Urne befinden sich die Buchstaben ANANAS. Es werden nacheinander 4 Buchstaben ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ANNA zu erhalten?

43. Aus einer Menge von Buchstaben wird zufällig drei Mal hintereinander ohne Zurücklegen gezogen. Man gewinnt, wenn man das Wort ELF zieht. Ist es günstiger, aus der Menge EFL oder aus der Menge EEFFLL zu ziehen?

44. In einer Urne sind 4 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander alle 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die erste schwarze Kugel kann an erster, zweiter, ... , fünfter Stelle kommen. Was ist am wahrscheinlichsten?

45. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser beim Lotto ist $\frac{1}{8145060}$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (mindestens drei richtige) ist $\frac{194130}{8145060}$. Jemand gibt jede Woche einen Tipp ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Jahr (52 Wochen) mindestens einen Sechser (mindestens einen Gewinn) zu erzielen?

46. Jemand möchte 100 Mal Lotto spielen. Ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Sechser zu gewinnen, größer, wenn man die 100 Tipps in 100 aufeinanderfolgenden Spielrunden abgibt, oder wenn man 100 Tipps bei einer Spielrunde abgibt.

47. Jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab. Wie viele Runden wären erforderlich, um mit Wahrscheinlichkeit ≥ 0.95 mindestens einen Sechser zu erzielen?

48. Ein Fragebogen enthält 5 Fragen, zu denen jeweils 3 Antworten vorgegeben sind. Einen positiven Prüfungsabschluss erreicht man, wenn mindestens die Hälfte der Antworten richtig angekreuzt ist. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, einen positiven Prüfungsabschluss zu erlangen, wenn man „ohne jede Ahnung“ einfach „blindlings“ ankreuzt?

49. Eine Münze, bei der „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ fällt, wird dreimal geworfen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für
    (i) Es kommt genau einmal „Zahl“
    (ii) „Wappen“ kommt öfter als „Zahl“
    (iii) Es kommt mindestens einmal „Zahl“
    (iv) Es kommt jedesmal das gleiche

50. Die sechs Flächen eines Würfels sind mit 122333 beschriftet. Dieser Würfel wird 9 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3 Mal 1, 4 Mal 2 und 2 Mal 3 zu erhalten?

51. Julia und Rupert spielen ein Tennismatch auf 3 gewonnene Sätze. Julia gewinnt mit Wahrscheinlichkeit 0.6 und Rupert mit Wahrscheinlichkeit 0.4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
    (i) dass Julia das Match ohne Satzverlust gewinnt?
    (ii) dass Julia das Match in 4 Sätzen gewinnt?
    (iii) dass Julia das Match in 5 Sätzen gewinnt?

52. In einer Urne sind 8 weiße und 2 schwarze Kugeln. Anna und Barbara spielen folgendes Spiel. Sie ziehen zufällig ohne Zurücklegen Kugeln aus dieser Urne, und zwar zuerst Anna eine, dann Barbara zwei, dann Anna zwei, dann Barbara zwei und immer so weiter. Wer zuerst eine schwarze Kugel zieht, hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Barbara?

53. Anna zieht aus der Menge WWS und Barbara zieht aus der Menge WWSSS. Sie ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen, wobei Anna beginnt. Siegerin ist, wer zuerst eine schwarze Kugel zieht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna gewinnt?

54. Anna und Barbara ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen aus einer Urne, die die Buchstaben AABBB enthält, wobei Anna beginnt. Siegerin ist, wer zuerst den Anfangsbuchstaben ihres

Namens zieht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anna? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Barbara? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es keine Siegerin?

55. Ebenso, aber gezogen wird aus einer Urne, die die Buchstaben AAABBBBB enthält.

56. In einer Urne befindet sich eine weiße und eine schwarze Kugel. Es wird so oft gezogen, bis die weiße Kugel kommt. Jedes Mal, wenn eine schwarze Kugel gezogen wird, wird sie und noch eine weitere schwarze Kugel zurückgelegt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man n Züge benötigt, bis die weiße Kugel gezogen wird.

57. Jemand hat beim Lotto 6 aus 45 die Zahlen 3, 9, 26, 37, 39, 43 getippt. Bei der Lottoziehung wird zusätzlich zu den sechs Gewinnzahlen auch noch eine Zusatzzahl gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass fünf der getippten Zahlen unter den Gewinnzahlen vorkommen und die sechste getippte Zahl die Zusatzzahl ist?

58. Peter und Paul spielen mit 20 Spielkarten. Peter bekommt 5 Karten und dann Paul ebenfalls 5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Peter alle vier Asse und Paul alle vier Könige?

59. Der Marktanteil der Firmen A, B und C für ein bestimmtes Gerät ist 30%, 50% und 20%. Waren der Firma A sind mit Wahrscheinlichkeit 0.1, jene der Firma B mit Wahrscheinlichkeit 0.2 und jene von C mit Wahrscheinlichkeit 0.15 fehlerhaft. Das Gerät, das ich gekauft habe, funktioniert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es von A, B bzw. C erzeugt?

60. Von zwei gleich aussehenden Würfeln ist einer normal, der andere zeigt 6 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Man wählt zufällig einen Würfel und würfelt fünf Mal. Man erhält fünf Mal 6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man den normalen Würfel gewählt hat?

61. Zur Erkennung einer bestimmten Krankheit wird ein Test verwendet, der bei 99% der Personen, die die Krankheit haben, diese auch feststellt. Allerdings zeigt der Test irrtümlicherweise bei 0.5% der Personen, die die Krankheit nicht haben, ebenfalls die Krankheit an. Man weiß auch dass 1% der Bevölkerung diese Krankheit haben. Bei einer Person wird diese Krankheit diagnostiziert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie die Krankheit?

62. An einem Straßenstück, wo man festgestellt hat, dass 30% der Autos zu schnell fahren, wird ein Radarmessgerät aufgestellt. Dieses Gerät erkennt ein zu schnell fahrendes Auto mit Wahrscheinlichkeit 0.98. Jedoch wird mit Wahrscheinlichkeit 0.05 ein nicht zu schnell fahrendes Auto irrtümlich als zu schnell gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer, der Strafe zahlen muss, dies ungerechterweise tut?

63. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2015/16, Teil 1, Aufgabe 22 (Zufallsvariable);
SRP Mathematik AHS, Haupttermin 2013/14, Teil 1, Aufgabe 23 (Diskrete Zufallsvariable).

64. Zwei Würfel werden geworfen. Sei X das Maximum der beiden geworfenen Zahlen. Man gebe den Wahrscheinlichkeitsvektor dieser Zufallsvariablen an.

65. Ebeso: X sei der Betrag der Differenz der beiden Augenzahlen.

66. Sei $w(k) = \frac{1}{k(k+1)}$ für $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Man zeige, dass $(w(k))_{k\geq 1}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist.

67. Ein Punkt wird zufällig im Quadrat $[0, 1]^2$ gewählt. Sei X sein Abstand vom Rand des Quadrats. Man berechne die Dichte der Zufallsvariablen X.

68. Zwei Punkte werden zufällig in $[0,1]$ gewählt. Sei X der Abstand der beiden Punkte. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X.

69. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2015/16, Teil 1, Aufgabe 23 (Parameter einer Binomialverteilung);
SRP Mathematik AHS, Nebentermin 2 2015/16, Teil 1, Aufgabe 23 (Zufallsexperiment).

70. Erfahrungsgemäß erscheinen 4% aller Fluggäste, die Plätze reservieren lassen, nicht zum Flug. Die Fluggesellschaft verkauft 75 Flugkarten für 73 verfügbare Plätze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Überbuchung gut geht?

71. Zwei gleichwertige Spieler spielen gegeneinander. Was ist wahrscheinlicher: Mindestens 6 von 8 oder mindestens 9 von 12 Spielen zu gewinnen?

72. Ein Prüfungstest enthält 10 Fragen. Zu jeder Frage sind 3 Antworten angegeben, von denen genau eine richtig ist. Wie viele richtig beantwortete Fragen muss man für ein positives Prüfungsergebnis verlangen, wenn die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Ankreuzen durchzukommen, höchstens 0.005 sein soll?

73. Anna und Barbara ziehen abwechselnd mit zurücklegen, wobei Anna beginnt. Anna zieht aus der Menge WWS und Barbara aus der Menge WS. Siegerin ist, wer zuerst eine schwarze Kugel zieht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna gewinnt?

74. Man würfelt so lange, bis zum n-ten Mal 6 auftritt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das beim k-ten Wurf passiert? (negative Binomialverteilung)

75. Die Anzahl X der Personen, die in einem Zeitintervall der Länge t (in Stunden) ein Geschäft betreten, sei $P(\lambda t)$-verteilt mit $\lambda = 10$ Personen pro Stunde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 15.00 und 15.30 höchstens 4 Personen das Geschäft betreten?

76. Die Anzahl der Unfälle, die sich in einem Unternehmen in einem Zeitraum von t Tagen ereignen, sei $P(\frac{t}{10})$-verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb einer Woche mehr als ein Unfall ereignet? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in zwei aufeinanderfolgenden Wochen kein Unfall ereignet?

77. Die Disteln auf einer Wiese seien Poissonverteilt, das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass k Disteln auf einem Wiesenstück der Fläche v m^2 wachsen, ist $w(k) = \frac{(\mu v)^k}{k!} e^{-\mu v}$. Auf der Wiese steht ein Baum. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Umkreis von 5 m höchstens 2 Disteln wachsen? Sei X die Entfernung vom Baum zur nächsten Distel. Welche Wahrscheinlichkeitsdichte hat X?

78. Die Lebensdauer X einer Glühbirne (in Stunden) sei $E(\lambda)$-verteilt. Man hat getestet, dass diese Type Glühbirnen 1000 Stunden mit Wahrscheinlichkeit 0.9 überlebt. Gesucht ist λ.

79. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Glühbirne aus dem letzten Beispiel 2000 Stunden überlebt? Wie viele Stunden überlebt sie mit Wahrscheinlichkeit 0.95?

80. Die Nutzungsdauer X (in Jahren) von Waschmaschinen habe die Dichte $f(x) = \frac{1}{8}\cos(\frac{x}{8})$ für $x \in [0, 4\pi]$ und $= 0$ für $x > 4\pi$.
    (i) Wieviel Prozent der Waschmaschinen werden länger als 10 Jahre genutzt?
    (ii) Wieviel Prozent der Waschmaschinen werden in der Garantiezeit von 6 Monaten defekt?
    (iii) Man ergänze: 75% aller Waschmaschinen werden länger als … genutzt.

81. Eine Maschine stellt Drahtstifte her. Ihre Länge ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\mu = 4$ cm und $\sigma = 0.1$ cm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge um mehr als 0.15 cm von μ abweicht?

82. Bei der automatischen Abfüllung von $\frac{1}{2}$ l Milchflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen als $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\mu = 500\text{cm}^3$ und $\sigma = 5\text{cm}^3$ angenommen.
    (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Milchflasche weniger als 490cm^3 enthält?
    (ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Abfüllung einer Milchflasche die Milch überläuft, wenn das Volumen der Milchflaschen 508cm^3 beträgt?

83. Die Arbeitszeit für die Montage einer Fernsehantenne sei normalverteilt mit $\mu = 115$ min und $\sigma = 20$ min. Welche Arbeitszeit muss im Kostenvoranschlag berechnet werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass diese Arbeitszeit überschritten wird, höchstens 0.25 sein soll?

84. Das Gewicht von Eiern sei normalverteilt mit $\mu = 66.4$ g und $\sigma = 9.5$ g. Die Eier sollen in drei Gewichtsklassen eingeteilt werden. Welche beiden Werte muss man als Grenzen zwischen den Gewichtsklassen festlegen, wenn in jeder Gewichtsklasse gleich viele Eier sein sollen?

85. Eine Maschine stellt Drahtstifte her. Die Länge der Nägel sei normalverteilt mit $\mu = 4$ cm und $\sigma = 0.1$ cm. Welche Abweichung vom Mittelwert μ muss man als tolerierbar zulassen, wenn man nicht mehr als 4% Ausschuss haben will?

86. Eine Verpackungsmaschine füllt Mehlpackungen mit der Nennmasse 1000 g ab, sodass die Massen der Packungen normalverteilt sind mit $\sigma = 2$ g. Der Verpacker muss auf Grund gesetzlicher Vorschriften garantieren, dass in höchstens 5% aller Packungen die auf der Packung angegebene Nennmasse um mehr als 3 g unterschritten wird. Auf welche mittlere Abfüllmenge μ muss er die Maschine einstellen?

87. Ein Produzent will Packungen mit der Sollmasse 1000 g abfüllen, sodass bei höchstens 5% aller Packungen der Inhalt mehr als 1010 g beträgt. Welche Standardabweichung σ darf die Abfüllanlage höchstens haben, wenn man die Masse der Packungen normalverteilt annimmt und die Maschine so justiert ist, dass die mittlere Füllmasse gleich der Sollmasse ist?

88. Ein Produzent will Packungen mit der Sollmasse 3 kg abfüllen. Die Packungsinhalte kann man als normalverteilt annehmen, wobei die Genauigkeit der verwendeten Abfüllanlage mit $\sigma = 0.03$ kg angegeben wird. Der Produzent will, dass bei höchstens 5% aller Packungen der Inhalt mehr als 3.06 kg beträgt. Welche Mindestfüllmenge t ist auf das Etikett zu drucken und auf welchen Mittelwert μ muss der Produzent die Abfüllanlage einstellen, wenn höchstens 2% der Packungen die garantierte Mindestfüllmenge t unterschreiten dürfen?

89. Ein Produzent will Packungen mit der Sollmasse 1000 g abfüllen, sodass bei höchstens 10% aller Packungen der Inhalt mehr als 1020 g beträgt. Aufgrund gesetzlicher Vorschriften dürfen höchstens 5% der Packungen weniger als 980 g enthalten. Wie genau muss die Abfüllanlage arbeiten, das heißt wie groß darf die Standardabweichung σ der normalverteilten Packungsinhalte höchstens sein, damit beides möglich ist?

90. Ein Würfel wird 720 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sechs
    (i) 115 bis 125 Mal geworfen wird?
    (ii) mehr als 140 Mal geworfen wird?

91. Ein Prüfungstest enthält 36 Fragen. Zu jeder Frage sind 2 Antworten angegeben, von denen genau eine richtig ist. Wie viele richtig beantwortete Fragen muss man für ein positives Prüfungsergebnis verlangen, wenn die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Ankreuzen

durchzukommen, höchstens 0.02 sein soll?

92. Eine Lotterie legt 20.000 Lose auf, von denen 4.000 gewinnen. Wie viele Lose muss man kaufen, damit man mit Wahrscheinlichkeit 0.998 mindestens 3 Gewinne erzielt?

93. Um eine Konsumentenbefragung durchzuführen, werden Fragebögen ausgeschickt. Man weiß aus Erfahrung, dass durchschnittlich 65% der Fragebögen ausgefüllt und zurückgeschickt werden. Wie viele Fragebögen muss man ausschicken, damit man mit 95-prozentiger Wahrscheinlichkeit 300 Fragebögen zurückerhält?

94. Ein Prüfungstest enthält Fragen, zu denen jeweils drei Antworten vorgegeben sind. Die Anzahl der Fragen ist ungerade. Einen positiven Prüfungsabschluss erreicht man, wenn mehr als die Hälfte der Fragen richtig angekreuzt ist. Wie viele Fragen muss man stellen, damit jemand, der rein zufällig ankreuzt, mit Wahrscheinlichkeit 0.99 durchfällt?

95. Nach Bezahlung von 4 Euro darf man einmal würfeln und erhält die Augenzahl in Euro. Was kann als mittlerer Gewinn pro Spiel (bzw. Verlust pro Spiel) erwartet werden?

96. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2015/16, Teil 2, Aufgabe 4 (Roulette).

97. SRP Mathematik AHS, Haupttermin 2015/16, Teil 2, Aufgabe 4 (Würfel mit unterschiedlichen Zahlen).

98. Jemand trifft ein Ziel mit Wahrscheinlichkeit 0.3. Wie viele Versuche bis zum ersten Treffer sind durchschnittlich erforderlich?

99. Man bestimme den Durchschnitt der Noten, die der Lehrer aus Beispiel gibt.

100. In einer Urne sind 3 rote, 3 blaue und 3 grüne Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei X die Anzahl der dabei auftretenden Farben. Man berechne $E(X)$.

101. Die Lebensdauer eines Gerätes habe die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$ für $x \geq 0$ (x in Jahren). Die Firma stellt das Gerät zum Preis von EUR 2.000,– her, verkauft es um n Euro und zahlt den Betrag zurück, wenn das Gerät innerhalb des ersten halben Jahres versagt. Wie ist n zu wählen, damit der Erwartungswert des Gewinnes EUR 500,– beträgt?

102. Sei X eine $G(p)$-verteilte Zufallsvariable. Man berechne $\mathrm{V}(X)$. Hinweis: Man multipliziert $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ zuerst mit x und differenziert dann. Damit erhält man $\mathrm{E}(X^2)$. Dann verwendet man $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

103. Sei X eine $P(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Man berechne $E(X)$ und $V(X)$.

104. Sei X eine $E(n, \lambda)$-verteilte Zufallsvariable mit $n \in \mathbb{N}$. Man berechne $E(X)$ und $V(X)$.

105. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von X sei $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Welche Dichte hat X^2?

106. Die Zufallsvariable X sei $E(\lambda)$-verteilt. Welche Wahrscheinlichkeitsdichte hat X^2?

107. Seien X und Y unabhängig und beide $E(\lambda)$-verteilt. Welche Dichte hat $X + Y$?

108. Sei X eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte f. Man leite eine Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte von X^3 her. Hinweis: Zuerst die Verteilungsfunktion berechnen.

109. Sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ und Wahrscheinlichkeitsdichte f. Man leite eine Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\sqrt{X}$ her.

110. Die Zufallsvariable X sei $E(\lambda)$-verteilt. Welche Wahrscheinlichkeitsdichte hat $\sqrt{X}$?

111. Seien X und Y unabhängig und beide $N(0,1)$-verteilt. Welche Dichte hat $\frac{X}{Y}$?

112. Seien X und Y unabhängig. Beide haben Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Welche Dichte hat X/Y? Hinweis: Die Funktion $u(t) = \frac{1}{(1+x^2t)(1+t)}$ hat Stammfunktion $U(t) = \frac{1}{x^2-1}\log\frac{1+x^2t}{1+t}$.

113. Seien X und Y Zufallsvariable und $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$. Sei $(u(i,j))_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor von X und Y. Sei $w(k) = \sum i = 0^k u(k-i,i)$ für $k \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $(w(k))_{k\in\mathbb{N}}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariable $X+Y$ ist.

114. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariable. Man zeige, dass $X+Y$ die $B(n+m,p)$-Verteilung hat, wenn X die $B(n,p)$-Verteilung und Y die $B(m,p)$-Verteilung hat. Hinweis: $\sum i = 0^k \binom{n}{k-i}\binom{m}{i} = \binom{n+m}{k}$, wobei man $\binom{u}{v} = 0$ setzt, wenn $u < v$ ist.

115. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariable. Man zeige, dass $X+Y$ die $P(\lambda+\mu)$-Verteilung hat, wenn X die $P(\lambda)$-Verteilung und Y die $P(\mu)$-Verteilung hat.

116. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 2 2015/16, Teil 1, Aufgabe 24 (Blutgruppe);
SRP Mathematik AHS, Nebentermin 2 2014/15, Teil 1, Aufgabe 24 (Breite eines Konfidenzintervalls).

117. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2015/16, Teil 1, Aufgabe 24 (500-Euro-Scheine in Österreich);
SRP Mathematik AHS, Haupttermin 2015/16, Teil 1, Aufgabe 24 (Vergleich zweier Konfidenzintervalle).

118. Die Körpergröße der Bewohner einer Stadt sei $N(\mu,\sigma)$-verteilt mit $\sigma = 6.4$ cm. Der Mittelwert der Größen von 100 zufällig ausgewählten Bewohnern ergab 171.3 cm. Man bestimme ein zweiseitiges 99%-Konfidenzintervall für μ.

119. Der Inhalt von Waschmittelpackungen sei $N(\mu,\sigma)$-verteilt mit $\sigma = 0.08$ kg. Man wiegt 17 Packungen und erhält die Abfüllgewichte: 2.79, 2.83, 2.84, 2.88, 2.89, 2.91, 2.93, 2.94, 2.96, 2.98, 3.01, 3.03, 3.06, 3.09, 3.10, 3.12, 3.13 kg. Man bestimme ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für das durchschnittliche Abfüllgewicht.

120. Wie groß muss der Stichprobenumfang n in Beispiel 119 gewählt werden, wenn die Länge des Konfidenzintervalls ≤ 0.07 sein soll?

121. Welches Konfidenzintervall erhält man für die Werte aus Beispiel , wenn man σ nicht als bekannt voraussetzt?

122. Welches Konfidenzintervall erhält man für die Werte aus Beispiel 119, wenn man σ nicht als bekannt voraussetzt?

123. Man berechne ein einseitiges 95%-Konfidenzintervall für die Werte aus Beispiel 119 mit bekanntem und unbekanntem σ.

124. SRP Mathematik AHS, Nebentermin 1 2014/15, Teil 2, Aufgabe 4 (FSME-Impfung).

125. SRP Mathematik AHS, Haupttermin 2014/15, Teil 2, Aufgabe 3 (Blutgruppen).

126. Ein Spieler spielt ein Glücksspiel. Er gewinnt 37 von 100 Spielen. Man berechne ein 95%-Konfidenzintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit.

127. Ein Reißnagel kann, wenn er in die Luft geworfen wird, zwei Lagen einnehmen: „Spitze nach oben“ oder „Spitze nach unten“. Sei p die unbekannte Wahrscheinlichkeit für „Spitze nach oben“. Ein Reißnagel wurde 300 Mal geworfen, wobei 219 Mal die Spitze nach oben zeigte. Man bestimme ein 95%-Konfidenzintervall für p.

128. Unter den 78742 Lebendgeburten im Jahre 2010 in Österreich waren 40331 Knaben. Man ermittle daraus ein 99%-Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p einer Knabengeburt.

129. Vor einer Bundespräsidentenwahl, bei der nur zwei Personen kandidieren, wird unter 3000 Personen eine Meinungsbefragung durchgeführt, von denen 1524 den Kandidaten A bevorzugen. Es soll mit 99%iger Sicherheit prognostiziert werden, ob Kandidat A die absolute Mehrheit erhalten wird. Ist diese Befragung für eine solche Prognose ausreichend? Man berechne ein geeignetes einseitiges Konfidenzintervall.

130. Wie viele Spiele muss der Spieler aus Beispiel 126 spielen, um ein Konfidenzintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit zu erhalten, dessen Länge ≤ 0.1 ist?

131. Bei einer Wahlumfrage unter 4000 Wählern geben 328 an, die Partei A wählen zu wollen, die traditionell unter 10 % Stimmen erhält. Man bestimme ein zweiseitiges 99%-Konfidenzintervall für den Wähleranteil der Partei A.

132. Der Anteil p der Raucher soll mit 95-prozentiger Sicherheit mit einem Fehler von höchstens 2% bestimmt werden. Wie groß muss man die Stichprobenumfang n wählen? Wie groß muss man den Stichprobenumfang n wählen, wenn man annehmen kann, dass $p \leq 0.2$ gilt?

133. Sei p der unbekannte Ausschussanteil einer Sorte Glühbirnen. Man toleriert einen Ausschussanteil von $p_0 = 0.04$. Bei jeder Lieferung wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 300$ gezogen. Die Lieferfirma will dadurch bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ nachweisen, dass der Ausschussanteil kleiner als p_0 ist. Es wird daher $H_0 : p \geq p_0$ gegen $H_1 : p < p_0$ getestet. Man bestimme den Verwerfungsbereich.

134. Um zu beurteilen, ob die Partei A die 5% Hürde überspringen wird, sollen in einem Wahlkreis 600 Wahlberechtigte hinsichtlich ihres beabsichtigten Wahlverhaltens befragt werden. Man formuliere eine geeignete Hypothese und ermittle den Verwerfungsbereich zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$.

135. Erfahrungsgemäß bestehen $\frac{3}{4}$ der Kandidaten die Reifeprüfung. Eine Maturaschule behauptet von sich, dass die von ihr betreuten Kandidaten besser seien. Zum Beweis führt sie an, dass von 90 Kandidaten nur 18 durchgefallen seien. Ist die Behauptung glaubwürdig?

136. Das Medikament A hilft in $\frac{2}{3}$ aller Fälle. Es soll untersucht werden, ob das neue Medikament B besser ist. Es hilft bei 18 von 20 Patienten, an denen es erprobt wird. Wie ist zu entscheiden, wenn das Resultat signifikant auf dem 1%-Niveau sein soll?

137. Ein Getränkehersteller füllt Literflaschen ab. Er behauptet, dass nur 10% der Flaschen einen zu geringen Inhalt aufweisen. Ein Kunde vermutet, dass dieser Anteil höher ist und möchte auf dem 5%-Niveau testen. Er wählt zufällig 20 Flaschen aus und stellt folgende Inhalte (in Liter) fest: 0.96, 1.10, 1.08, 1.05, 1.00, 1.04, 0.95, 0.92, 1.16, 1.10, 1.02, 1.09, 0.93, 1.04, 1.04, 1.00, 1.08, 0.95, 1.02, 1.02. Man führe den Test durch.

138. Sind Ratten neugierig? 40 Ratten durchlaufen zweimal einen Gang, der sich in zwei Gänge verzweigt. Beim zweiten Durchlauf haben 14 Ratten den gleichen Gang gewählt, die übrigen

den anderen. Man formuliere eine geeignete Hypothese. Kann man die Hypothese bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ ablehnen?

139. Sind Ratten lichtscheu? Um diese Frage zu entscheiden werden 100 Ratten durch einen Gang geschickt, der sich in einen hellen und einen dunklen Gang verzweigt. Man formuliere eine geeignete Hypothese. Bei einem Versuch haben 87 von 100 Ratten den unbeleuchteten Gang gewählt. Kann man die Hypothese bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.01$ ablehnen?

140. Ein Würfel wird 1000 Mal geworfen. Es erscheint 192 Mal Sechs. Ist dieses Ergebnis für die Behauptung, dass der Würfel falsch ist, signifikant? Man teste zweiseitig auf dem 5%-Niveau.

141. Bei einer Blutuntersuchung ergab sich, dass von 2000 Versuchspersonen 706 die Blutgruppe 0 aufweisen. Kann die Hypothese, dass 35 Prozent der Personen die Blutgruppe 0 haben, aufgrund des Stichprobenergebnisses bei $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

142. Eine Partei hatte bei den letzten Wahlen einen Stimmenanteil von 30%. Die Parteiführung will vor den Neuwahlen wissen, ob sie den Stimmenanteil gehalten hat. Für den Stimmenanteil p soll $H_0 : p \geq 0.3$ gegen $H_1 : p < 0.3$ mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ getestet werden. Stichprobenumfang n und Verwerfungsbereich $\{0, 1, \ldots, k_0\}$ sollen so bestimmt werden, dass die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese bei $p \leq 0.25$ zu verwerfen, mindestens 0.95 ist.

143. Ein Händler hat mit dem Erzeuger einer Ware vereinbart, dass der unbekannte Ausschussanteil p in einer Lieferung höchstens 4% ausmachen darf. Man bestimme Stichprobenumfang n und Verwerfungsbereich V so, dass bei $p \leq 0.04$ die Lieferung mit Wahrscheinlichkeit 0.95 angenommen und bei $p \geq 0.06$ nur mit Wahrscheinlichkeit 0.01 angenommen wird.

144. Um einen Zufallszahlengenerator, der Zufallszahlen im Intervall $[0, 1)$ liefert, zu testen, wurde gezählt, wie viele von 1000 Zufallszahlen in die Intervalle $[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10})$ für $1 \leq i \leq 10$ fielen. Man erhielt die Werte 117, 95, 98, 87, 106, 109, 92, 93, 108 und 95. Gibt der χ^2-Test einen Hinweis darauf, dass der Zufallszahlengenerator keine zufälligen Werte liefert?

145. In einer Firma soll untersucht werden, ob sich die Krankenstandsmeldungen der Angestellten gleichmäßig auf die 5 Werktage verteilen. Von 150 zufällig gewählten Krankenstandsmeldungen entfielen 37 auf einen Montag, 29 auf einen Dienstag, 26 auf einen Mittwoch, 27 auf einen Donnerstag und 31 auf einen Freitag. Kann auf Grund dieser Stichprobe geschlossen werden, dass sich die Krankenstände gleichmäßig auf die Werktage verteilen?

146. In 100 zufällig ausgewählten Zeitintervallen von 10 Minuten wurde die Anzahl X der PKW registriert, die zum Tanken kamen. In 25 Fällen war die Anzahl 0, in 35 Fällen war sie 1, in 24 Fällen war sie 2, in 11 Fällen war sie 3, in 5 Fällen war sie ≥ 4. Hat X die $P(\lambda)$-Verteilung mit $\lambda = 1.4$? Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten für $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ und $X \geq 4$ unter dieser Annahme und führe den χ^2-Test durch.

147. Bei Kontrollen der Straßenbahn wurde in 360 zufällig ausgewählten Wagen die Anzahl der Schwarzfahrer ermittelt: In 299 Wagen fand man keinen Schwarzfahrer, in 51 Wagen fand man einen, in 9 Wagen fand man zwei, in einem Wagen fand man drei und mehr als drei wurden nie gefunden. Mit Hilfe eines χ^2-Tests ist zu prüfen, ob die Anzahl der Schwarzfahrer in einem zufällig gewählten Wagen $P(\lambda)$-verteilt ist mit $\lambda = 0.2$.

148. Besteht ein Zusammenhang zwischen Rauchen und einer bestimmten Krankheit? In einer Stichprobe vom Umfang 200 waren 22 Raucher, die die Krankheit haben, 43 Raucher die die

Krankheit nicht haben, 14 Nichtraucher, die die Krankheit haben, und 121 Nichtraucher, die die Krankheit nicht haben. Spricht ein χ^2-Test mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ gegen die Unabhängigkeit von Rauchen und dieser Krankheit?

149. Besteht ein Zusammenhang zwischen Berufserfolg und schulischer Leistung? Der Berufserfolg wird nach gewissen Kriterien in gut und schlecht eingeteilt, der schulische Erfolg in gut, mittel und schlecht. In einer Stichprobe hatten von denen, die guten Berufserfolg haben, 69 eine gute, 67 eine mittlere und 54 eine schlechte schulische Leistung. Von denen, die schlechten Berufserfolg haben, hatten 48 eine gute, 63 eine mittlere und 72 eine schlechte schulische Leistung. Sind Berufserfolg und schulische Leistung unabhängig?

150. Eine Umfrage zu einem Gesetzesentwurf ergibt, dass in Oberösterreich von 50 befragten Personen 33 dafür und 17 dagegen, in Niederösterreich von 55 befragten Personen 18 dafür und 37 dagegen, in Wien von 50 befragten Personen 24 dafür und 26 dagegen waren. Herrscht in den drei Bundesländern dieselbe Meinung zu diesem Gesetzesentwurf? Man überprüfe mit einem χ^2-Test, ob die Meinung unabhängig vom Bundesland ist.